Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 495, 2020 г.

Я. И. Белопольская, Е. И. Немченко

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ХЕМОТАКСИСА В СИСТЕМЕ ИЗ ДВУХ ПОПУЛЯЦИЙ

§1. Введение

Хемотаксис – это движение микроорганизмов или клеток в области повышенной концентрации определенных химических веществ, притягивающих клетки и производимых или потребляемых ими. В простейшем виде модель хемотаксиса может быть представлена в виде системы нелинейных уравнений в частных производных, состоящей из уравнений конвекции-диффузии для плотностей клеток, объединенных с уравнениями реакции-диффузии для концентраций хемоатрактантов.

В этой работе мы рассмотрим математическую модель хемотаксиса в системе, состоящей из двух взаимодействующих популяций клеток, подверженных влиянию одной и той же химической субстанции [1, 2],

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\sigma_1^2}{2}\Delta\phi - \nabla\cdot(\phi\chi_1\nabla g) + \beta_1\phi(1-\phi-a_1\psi), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\sigma_2^2}{2}\Delta\psi - \nabla\cdot(\psi\chi_2\nabla g) + \beta_2\psi(1-a_2\phi-\psi), \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\sigma_3^2}{2}\Delta g + c_1\phi + c_2\psi - c_3 g. \tag{1.3}$$

Здесь ϕ и ψ – плотности популяций первого и второго типа, а g – концентрация химического реагента. Система (1.1)–(1.3) учитывает наличие двух механизмов взаимодействия, а именно, взаимодействие типа Лотка–Вольтерра популяций и взаимодействие популяций и химического реагента типа Келлера–Сегеля. Коэффициенты диффузии $\sigma_q, q = 1, 2, 3$, уровни хемотаксиса $\chi_q \geqslant 0$, кинетические коэффициенты $\beta_q > 0$, коэффициенты взаимодействия $c_q \geqslant 0, q = 1, 2$, и коэффициенты $c_1, c_2, c_3 > 0$, регулирующие увеличение или уменьшение химического реагента соответствующей популяцией, – константы.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, хемотаксис, системы нелинейных параболических уравнений, слабые и ослабленные решения задачи Коши.

Цель работы – построить вероятностную модель, ассоциированную с задачей Коши для (1.1)–(1.3), в виде системы стохастических уравнений и получить вероятностное представление слабого решения задачи Коши с заданными начальными условиями

$$\phi(0,y)=\phi_0(y), \quad \psi(0,y)=\psi_0(y), \quad g(0,y)=g_0(y). \tag{1.4}$$

Мы интерпретируем систему (1.1)–(1.3) как систему прямых уравнений Колмогорова относительно плотностей распределений некоторых случайных процессов. Вообще говоря, нелинейную систему вида

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_q}{\partial t} &= \frac{1}{2}\nabla\cdot(\sigma_q\nabla u_q)-\nabla\cdot(u_q\chi_q\nabla u_3)\\ &\quad+\sum_{m=1}^{3}\alpha_{qm}(u)u_m+\gamma_q(u), \quad q=1,2,3,\end{aligned} \tag{1.5}$$

не удается непосредственно интерпретировать как уравнение в мерах ввиду ее нелинейности. Система (1.5) относится к классу систем, называемых системами сингулярных уравнений. Для того, чтобы иметь возможность рассматривать такого типа системы как уравнения в мерах, нужно их регуляризовать так, чтобы коэффициенты уравнений в системе были бы функциями регулярных функционалов от мер.

Система (1.1–(1.3) приобретет вид (1.5), если положить $u_1=\phi, u_2=\psi, u_3=g$, $\alpha_{11}(u)=-\beta_1[1-u_1]$, $\alpha_{12}(u)=-a_1\beta_1u_1$, $\alpha_{21}(u)=-\beta_2a_2u_2$, $\alpha_{22}(u)=-\beta_2[1-u_2]$, $\alpha_{31}(u)=\alpha_{32}(u)=0$, $\alpha_{33}=-c_3$ и задать $\gamma_q(u)$ соотношениями $\gamma_1(u)=\gamma_2(u)=0, \gamma_3(u)=c_1u_1+c_2u_2$.

Вероятностный подход к изучению моделей хемотаксиса в случае одной популяции развивался в ряде работ [3, 4]. В этой работе мы рассматриваем модель, в которой присутствует два механизма взаимодействия – хемотаксис и взаимодействие популяций. Развиваемый здесь подход может быть распространен на большее число популяций и химических субстанций, ответственных за хемотаксис. Используемые здесь идеи представляют обобщение идей работы [5], посвященной построению вероятностной интерпретации решения задачи Коши для нелинейных скалярных параболических уравнений.

§2. Вероятностная интерпретация слабых решений задачи Коши для системы параболических уравнений

Введем в рассмотрение ряд функциональных пространств. Пусть:

$C_b(R^d)$ обозначает пространство непрерывных скалярных ограниченных функций на R^d;

$C_0^\infty(R^d)$ – пространство бесконечно дифференцируемых скалярных функций с компактными носителями;

$\mathcal{S}(R^d)$ – пространство Шварца быстро убывающих тестовых функций, а $\mathcal{S}'(R^d)$ – двойственное к нему пространство обобщенных функций.

Пусть $\Omega_q = \mathcal{C}^d = C([0,T];R^d)$ – пространство непрерывных функций со значениями в R^d, заданных на $[0,T]$, $\mathcal{B}(\mathcal{C}^d)$ – сигма-алгебра его борелевских подмножеств, $q = 1,2,3$. Для заданного процесса $\xi_q(t)$ на вероятностном пространстве $(\Omega_q, \mathcal{F}_q, P)$ рассмотрим измеримое отображение $(\Omega_q, \mathcal{F}_q) \to (\mathcal{C}^d, \mathcal{B}(\mathcal{C}^d))$ вида $\omega \to \xi_q(t,\omega)$, где $\mathcal{B}(\mathcal{C}^d)$ – минимальная сигма-алгебра, для которой все проекции $\pi_t(\xi_q) = \xi_q(t)$, $\xi \in \mathcal{C}^d$, измеримы. Обозначим $\gamma_q = P \circ \xi_q^{-1}$ вероятностную меру на $(\mathcal{C}^d, \mathcal{B}(\mathcal{C}^d))$.

Снабдим множество $\mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d)$ борелевских вероятностных мер на $\mathcal{C}^d$, обладающих конечными моментами порядка 2, метрикой Вассерштейна $\mathcal{W}_T^2(\gamma,\gamma^1)$,

$$(\mathcal{W}_T^2(\gamma,\gamma^1))^2 = \inf_{\pi\in\Pi(\gamma,\gamma^1)} \left(\int_{\mathcal{C}^d}\int_{\mathcal{C}^d} \sup_{0\leqslant s\leqslant T} \|\xi(s,\omega) - \xi(s,\omega^1)\|^2 d\pi(\omega,\omega^1) \right).$$

Здесь $\Pi(\gamma,\gamma^1)$ обозначает множество борелевских вероятностных мер $\pi(d\omega, d\omega^1)$ на пространстве $\mathcal{C}^d \times \mathcal{C}^d$ с заданными маргинальными мерами $\gamma(d\omega) = \pi(d\omega \times \mathcal{C}^d)$ и $\gamma^1(d\omega^1) = \pi(\mathcal{C}^d \times d\omega^1)$, принадлежащими $\mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d)$.

Рассмотрим задачу Коши для линейного параболического уравнения в мерах

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta[A^2(y)\mu] - \nabla\cdot[a(y)\mu] + c(y)\mu, \quad \mu(0,dy) = \mu_0(y)\,dy, \tag{2.1}$$

где $A(y)\in R, a(y)\in R^d, u_0(y)\in R, y\in R^d$.

Меру μ называют слабым решением уравнения (2.1), если для всех $h\in C_0^\infty([0,T]\times R^d)$ выполняется интегральное соотношение

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^T \int\limits_{R^d} h(t,y)\left[\frac{\partial\mu(t,dy)}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta[A^2(y)\mu(t,dy)]\right.\\
&\left.+\nabla\cdot[a(y)\mu(t,dy)] + c(y)\mu(t,dy)\right] dt = -\int\limits_0^T\int\limits_{R^d}\mu(t,dy)\\
&\times\left[\frac{\partial h(t,y)}{\partial t} + \frac{1}{2}A^2(y)\Delta h(t,y) + a(y)\cdot\nabla h(t,y) + c(y)h(t,y)\right] dt\\
&+\int\limits_{R^d} h(T,y)\mu(T,dy) - \int\limits_{R^d} h(0,y)\mu(0,dy).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Обозначим $P(0,x,t,dy)$ решение однородного уравнения

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta[A^2(y)\mu] - \nabla\cdot[a(y)\mu], \quad \mu(0,dy) = \mu_0(y)\,dy, \tag{2.3}$$

с начальным условием $\mu(0,dy) = I_x(dy)$, где $I_x(dy)$ – индикатор множества dy. Меру μ называют ослабленным решением линейного уравнения (2.1), если для всех $h \in C_0^\infty([0,T]\times R^d)$ выполняется интегральное соотношение

$$\begin{aligned}
\int\limits_{R^d} h(y)\mu(t,dy) &= \int\limits_{R^d} h(y)\int\limits_{R^d}\mu_0(dx)P(0,x,t,dy)\\
&+\int\limits_0^t\int\limits_{R^d}\left(\int\limits_{R^d} h(y)P(\theta,z,t,dy)\right)c(z)\mu(\theta,dz)\,d\theta.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Интерпретируя уравнение (2.1) как прямое уравнение Колмогорова для диффузионного процесса $\xi(t)$, мы построим этот процесс как решение некоторого стохастического уравнения. При этом сопряженное (обратное) уравнение Колмогорова, вид которого задается выражением в квадратных скобках в правой части (2.2), позволяет задать генератор марковского процесса $\xi(t)$, а затем построить этот марковский процесс как решение соответствующего стохастического уравнения

$$d\xi(t) = a(\xi(t))\,dt + A(\xi(t))\,dw(t), \quad \xi(0) = \xi_0.$$

Заметим, что формула Ито позволяет проверить, что для любой функции $h \in C_0^\infty([0,T] \times R^d)$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} d[\eta(t)h(t,\xi(t))] = \eta(t)\Big[\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}A^2(\xi(t))\Delta h(t,\xi(t)) \\ + a(\xi(t)) \cdot \nabla h(t,\xi(t)) + c(\xi(t))h(t,\xi(t))\Big]dt \\ + \nabla h(t,\xi(t)) \cdot A(\xi(t))\,dw(t), \end{aligned}$$

из которого вытекает справедливость (2.2), поскольку интегрируя последнее равенство в пределах от 0 до T и вычисляя математическое ожидание, мы получим требуемое интегральное соотношение.

При переходе к рассмотрению нелинейной параболической задачи возникает стохастическое уравнение, коэффициенты которого зависят от неизвестной функции (решения параболической задачи) и потребуется дополнительное замыкающее соотношение. К дальнейшему усложнению приводит рассмотрение систем нелинейных параболических уравнений, однако описанный выше подход остается неизменным.

Рассмотрим задачу Коши для нелинейной параболической системы

$$\frac{\partial u_q}{\partial t} = \mathcal{A}_q^*(u)u_q + \alpha_q^u u_q + \gamma_q(u), \quad u_{0q}(y) = u_{0q}(y), \;\; q = 1,2,3. \tag{2.5}$$

Здесь и ниже приняты обозначения $u = (u_1, u_2, u_3) \in R^3$, $\mu_q(dy) = u_q(y)\,dy$, $\int\limits_{R^d} \mathcal{A}h(y)\mu_q(dy) = \int\limits_{R^d} h(y)\mathcal{A}^*\mu_q(dy)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_q(u)h = \frac{\sigma_q^2}{2}\Delta h + m_q^{\nabla u_3} \cdot \nabla h, \quad q = 1,2, \quad \mathcal{A}_3 = \frac{\sigma_3^2}{2}\Delta h, \\ \Delta h = \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 h}{\partial x_k^2}, \quad y \cdot h = \sum_{k=1}^d y_k h_k, \\ m_q^{\nabla u_3}(t,y) = \chi_q \nabla u_3(t,y), \quad q = 1,2, \quad m_3^{\nabla u_3} \equiv 0, \\ \alpha_1(u) = \beta_1[1 - u_1 - a_1 u_2], \quad \alpha_2(u) = \beta_2[1 - a_2 u_1 - u_2], \\ \alpha_3(u) = -c_3, \quad \gamma_1(u) = \gamma_2(u) = 0, \quad \gamma_3(u) = c_1 u_1 + c_2 u_2. \end{aligned}$$

Для того, чтобы вывести стохастические уравнения, ассоциированные с задачей Коши (2.5), введем в рассмотрение вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, представляющее собой прямое произведение вероятностных пространств $(\Omega_q, \mathcal{F}_q, P_q)$. Пусть $\Omega_q = \mathcal{C}^d = C([0,T]; R^d)$

– пространство непрерывных функций $x(t) \in R^d$, заданных на интервале $[0,T]$, с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$. Обозначим $w_q(t) \in R^d$ винеровские процессы, заданные на $(\Omega_q, \mathcal{F}_q, P_q)$, $q = 1,2,3$, и рассмотрим стохастические уравнения

$$d\xi_q(s) = m_q^u(s, \xi_q(s))ds + \sigma_q dw_q(s), \quad \xi_q(0) = \xi_{0q}. \tag{2.6}$$

Здесь ξ_{0q} – независимые случайные величины с распределениями $\mu_{0q}(dy) = P\{\xi_q(0) \in dy\}$, не зависящие от $w_q(t)$. Если $\alpha_q^u(x)$ – ограниченные функции, то замыкающие соотношения можно получить, полагая $u_q(t,y) = \frac{d\mu_q(t,dy)}{dy}$, где меры $\mu_q(t,dy)$, заданы соотношениями

$$\int\limits_{R^d} h(y)\mu_q(t,dy) = \mathbf{E}\left[h(\xi_q(t)) \exp\left\{\int\limits_0^t \alpha_q^u(\theta, \xi_q(\theta))d\theta\right\}\right] \tag{2.7}$$

для любой непрерывной ограниченной функции $h(x)$.

Поскольку правая часть соотношения (2.7) представляет собой ограниченный линейный функционал на пространстве $C_b(R^d)$, то мера μ_q однозначно определена этим соотношением в силу теоремы Риса [6].

Нелинейные параболические системы вида (2.5) называют сингулярными системами и их изучение связано серьезными техническими трудностями. Наша цель в этой работе – разработать вероятностный подход к построению слабого решения задачи Коши для соответствующих регуляризованых систем, которые можно будет интерпретировать как системы нелинейных уравнений в мерах. Для того, чтобы построить требуемую регуляризацию, мы воспользуемся сглаживающим ядром $\rho : R^d \to R_+$ представляющим собой гладкую положительную функцию, удовлетворяющую условиям

$$\int\limits_{R^d} \rho(y)dy = 1, \quad \sup_y |\rho(y)| \leqslant K_\rho, \quad |\rho(x) - \rho(y)| \leqslant L_\rho \|x - y\|,$$

где K_ρ и L_ρ – положительные константы.

Прежде всего заметим, что уравнение для u_3 в системе (2.5) – это линейное неоднородное уравнение

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\sigma_3^2}{2}\Delta u_3 + c_1 u_1 + c_2 u_2 - c_3 u_3, \quad u_{03}(y) = u_{03}(y), \tag{2.8}$$

что позволяет рассматривать его как уравнение относительно $\mu_3(t,dy) = u_3(t,y)\,dy$ и искать решение задачи Коши для него с начальным условием $\mu_3(0,dy) = \mu_{03}(dy) = u_{03}(y)\,dy$.

Обозначим $p_3(0,x,t,y)$ решение задачи Коши для уравнения теплопрводности

$$\frac{\partial p_3}{\partial t} = \frac{\sigma_3^2}{2}\Delta p_3, \quad p_3(0,x,0,dy) = \delta(x-y),$$

где $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака. Решение $u_3(t,y)$ уравнения (2.8) допускает представление вида

$$\begin{aligned} u_3(t,y) &= e^{-\beta_3 t}\int\limits_{R^d} u_{03}(x)\,p_3(0,x,t,y)\,dx \\ &+ \int\limits_0^t\int\limits_{R^d} e^{-\beta_3(t-\tau)}[c_1u_1(\theta,z)+c_2u_2(\theta,z)]\,p_3(\theta,z,t,y)\,dzd\theta, \end{aligned} \tag{2.9}$$

откуда следует, что $\nabla u_3(t,y)$ представимо в виде

$$\begin{aligned} \nabla u_3(t,y) &= e^{-\beta_3 t}\int\limits_{R^d} u_{03}(x)\,\nabla p_3(0,x,t,y)\,dx \\ &+ \int\limits_0^t\int\limits_{R^d} e^{-\beta_3(t-\tau)}[c_1u_1(\theta,z)+c_2u_2(\theta,z)]\,\nabla p_3(\theta,z,t,y)\,dzd\theta. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Напомним, что $p_3(0,x,t,y) = \frac{1}{(2\pi\sigma_3^2 t)^{\frac{d}{2}}}e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2\sigma_3^2 t}}$, следовательно,

$$\nabla p_3(\theta,z,t,y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}(\sigma_3^2(t-\theta))^{\frac{d}{2}+1}}(y-z)e^{-\frac{\|y-z\|^2}{2\sigma_3^2(t-\theta)}}.$$

Из (2.10) вытекает, что коэффициенты $m_q^{\nabla u_3}$ являются функционалами от $\mu_q(t,dy), q = 1,2$. Однако, если $\alpha_{qm} \neq 0$, то нам по-прежнему нужна регуляризация системы, для того, чтобы рассматривать ее мерозначные решения.

Пусть $w_q(t)$ – независимые винеровские процессы, ξ_{0q} – заданные независимые случайные величины, не зависящие от $w_q(t)$, $q = 1,2,3$.

Рассмотрим стохастическую систему

$$d\xi_q(s) = m_q^{\nabla v_3}(s, \xi_q(s))ds + \sigma_q dw_q(s), \xi_q(0) = \xi_{0q}, \quad q = 1, 2, \tag{2.11}$$

$$d\xi_3(s) = \sigma_3 dw_3(s), \xi_3(0) = \xi_{03}, \tag{2.12}$$

$$v_q(t, y) = E\left[\rho(y - \xi_q(t))exp\left\{\int_0^t \alpha_q^v(s, \xi_q(s))ds\right\}\right], \quad q = 1, 2, \tag{2.13}$$

$$v_3(t, y) = e^{-c_3 t}\int_{R^d} u_{03}(x)p_3(0, x, t, y)dx + \int_0^t\int_{R^d} e^{-c_3(t-\tau)} \tag{2.14}$$
$$\times [c_1 v_1(\tau, z) + c_2 v_2(\tau, z)]p_3(\tau, z, t, y)dzd\tau.$$

Для того, чтобы замкнуть систему (2.11) –(2.14), нужно дополнительно получить представление для градиента функции $v_3(t, y)$,

$$\begin{gathered}\nabla_y v_3(t, y) = e^{-c_3 t}\int_{R^d} u_{03}(x)\nabla_y p_3(0, x, t, y)dx \\ + \int_0^t\int_{R^d} e^{c_3\tau}[c_1 v_1(\tau, z) + c_2 v_2(\tau, z)]\nabla_y p_3(\tau, z, t, y)dzd\tau.\end{gathered} \tag{2.15}$$

Заметим, что полученное выражение для $\nabla v_3 = \vartheta_q(v_1, v_2)$ позволяет исключить v_3 из системы (2.11)–(2.14) и рассматривать замкнутую систему (2.11), (2.13).

В параграфе 4 мы установим связь между системой (2.11), (2.13), (2.15) и системой

$$\xi_q(t) = \xi_{0q} + \int_0^t m_q^{\vartheta(\mu_1,\mu_2)}(s, \xi_q(s)))ds + \int_0^t \sigma_q dw_q(s), \quad q = 1, 2, \tag{2.16}$$

где $\xi_q(0) \sim \mu_{0q}$ и $\mu_q(t)$ – это меры, заданные соотношениями

$$\int_{R^d} h(y)\mu_q(t, dy) = \mathbf{E}\left[h(\xi_q(t, \omega))e^{\int_0^t \alpha_q(\rho*\mu)(\tau, \xi_q(\tau))d\tau}\right]. \tag{2.17}$$

Как будет показано в параграфе 4, решение системы (2.16)–(2.17) позволяет построить слабое решение $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ следующей задачи

Коши

$$\partial_t \mu_q = \frac{1}{2}\sigma_q \Delta \mu_q + \nabla \cdot [\mu_q \chi_q(\nabla p_3 * \mu)] + \alpha_q(\rho * \mu)\mu_q, q = 1, 2, \qquad (2.18)$$

$\mu_q(0, dy) = \mu_{0q}(dy)$.

Наконец, функции $v_q(t, y)$, заданные соотношениями (2.11), (2.13), и меры $\mu(t) = (\mu_1(t), \mu_2(t))$, удовлетворяющие (2.18), связаны формулами

$$v_q(t, y) = [\rho * \mu_q](t, y) = \int\limits_{R^d} \rho(y - x)\mu_q(t, dx).$$

Мы будем говорить, что $\mu_q(t, dy), q = 1, 2$, удовлетворяют (2.18) в слабом смысле, если для любых $h \in C_0^\infty([0, T] \times R^d)$ выполняются соотношения

$$\int\limits_{R^d} \mu_q(t, dx)h(t, x) - \int\limits_{R^d} \mu_{0q}(dx)h(0, x) \qquad (2.19)$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_{R^d} \mu_q(\theta, dx)\Big[\frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{\sigma_q^2}{2}\Delta h(\theta, x) - m_q^{\vartheta(\mu)}(\theta, x) \cdot \nabla h(\theta, x)$$

$$+ \alpha_q^\mu(\theta, x)h(\theta, x)\Big] d\theta,$$

$q = 1, 2$.

При этом, выбирая в качестве $\rho = \rho_\epsilon$ дельтаобразную последовательность, можно формально получить, что v_q^ϵ сходится к решению системы (2.5) при $\epsilon \to 0$.

Для того, чтобы доказать существование решения системы (2.11), (2.13), (2.15) прежде всего рассмотрим замкнутую систему относительно $\xi_1(t), \xi_2(t), v_1(t, y), v_2(t, y)$ и воспользуемся следующими соображениями.

Пусть $\Omega_q = \mathcal{C}^d$ – канонические пространства и ξ_q – канонические процессы, т.е. $\xi_q : \mathcal{C}^d \to \mathcal{C}^d$, $\xi_q(t, \omega) = \omega_q(t), \omega \in \Omega_q$ и $\gamma_q = \gamma_{\xi_q}$ – распределение процесса $\xi_q(t)$ на каноническом пространстве Ω_q. Перепишем уравнения (2.13) в виде

$$v_q(t, y) = \int\limits_{\mathcal{C}^d} \rho(y - \omega(t)) \exp\left\{\int\limits_0^t \alpha_q^v(s, \omega(s))ds\right\} \gamma_q(d\omega), \qquad (2.20)$$

$q = 1, 2$.

Обозначим $Z_q : [0,T] \times \mathcal{C}^d \to R$ отображение, определенное на функциях $\kappa \in \mathcal{C}^2$ соотношениями

$$Z_q(t,\kappa) = \exp\left\{ \int_0^t \alpha_q^v(\kappa(s))ds \right\}, \quad q = 1,2.$$

Будем говорить, что выполнены условия **C 2.1**, если существуют такие положительные константы $K_\rho, L_\rho, K_\alpha, L_\alpha, K_m, L_m$, что сглаживающая функция $\rho(y)$ удовлетворяет оценкам

$$\sup_{y \in R^d} \rho(y) \leqslant K_\rho, \quad |\rho(y) - \rho(y^1)| \leqslant L_\rho \|y - y^1\|, \quad y, y^1 \in R^d,$$

а функции $\alpha_q^v = \alpha_q(v), m_q^v = m_q(v)$ удовлетворяют оценкам вида

$$|\alpha_q(v)| \leqslant K_\alpha, \quad |\alpha_q(v) - \alpha_q(v^1)| \leqslant L_\alpha \|v - v^1\|, \quad v, v^1 \in R^2,$$

$$\|m_q(v)\| \leqslant K_m, \|m_q(v) - m_q(v^1)\| \leqslant L_m \|v - v^1\|.$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* **C 2.1**. *Для заданных вероятностных мер* γ_q, $q = 1,2$, *система* (2.20) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что в рассматриваемых условиях $v_q(t,y)$ – скалярные ограниченные липшицевы функции.

Действительно, в силу ограниченности сглаживающей функции ρ, а также свойств α_q, мы имеем

$$\sup_{y \in R^d} |v_q(t,y)| \leqslant K_\rho e^{K_{\alpha_q} T}$$

и

$$|v_q(t,x) - v_q(t,y)| \leqslant \int_{\mathcal{C}^d} |\rho(x - \xi_q(t,\omega)) - \rho(y - \xi_q(t,\omega))|$$

$$\times \exp\left\{ \int_0^t \alpha_q^v(s,\omega(s))ds \right\} \gamma_q(d\omega) \leqslant L_\rho e^{K_{\alpha_q} T} \|x - y\|.$$

Обозначим $\mathcal{R}, \mathcal{R}^2$ соответственно – пространство скалярных и векторных непрерывных процессов $\kappa(t) \in R$, $\zeta(t) \in R^2$, $t \in [0,T]$, заданных на канонических пространствах $\Omega_q = \mathcal{C}^d$ и удовлетворяющих оценкам

$$\|\kappa_q\|_{\infty,1} = \mathbf{E}^{\gamma_q}\left[\sup_{t\in[0,T]}|\kappa_q(t)|\right] = \int\limits_{\mathcal{C}^d}\sup_{t\in[0,T]}|\kappa_q(t)|\gamma_q(d\omega) < \infty,$$

$$\|\zeta_q\|_{\infty,1} = \mathbf{E}^{\gamma_q}\left[\sup_{t\in[0,T]}\|\zeta_q(t)\|\right] = \int\limits_{\mathcal{C}^d}\sup_{t\in[0,T]}\|\zeta_q(t)\|\gamma_q(d\omega) < \infty,$$

и заметим, что $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}^2$ – банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_{\infty,1}$. Наряду с этими нормами введем эквивалентные нормы $\|\cdot\|^K_{\infty,1}$ в $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}^2$, заданные для некоторого числа $K > 0$ соотношениями вида

$$\|\kappa_q\|^K_{\infty,1} = \mathbf{E}^{\gamma_q}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{-Kt}|\kappa_q(t)|\right].$$

Зададим операторы

$$G^\gamma : \mathcal{R}^2 \to C([0,T]\times R^d; R^2)$$

и

$$\Theta : C([0,T]\times R^d; R^2) \to \mathcal{R}^2$$

соотношениями $G^\gamma = (G^\gamma_1, G^\gamma_2)$, где $G_q\colon \mathcal{R} \to C([0,T]\times R^d; R), q = 1,2,$

$$G^\gamma_q(\kappa)(t,y) = \int\limits_{\mathcal{C}^d}\rho(y-\xi_q(t,\omega))\exp\left\{\int\limits_0^t \alpha^\kappa_q(s,\xi_q(s))ds\right\}\gamma_q(d\omega), \quad (2.21)$$

и

$$\Theta(v)(t,\omega_q) = v(t,\xi_q(t)), \quad (2.22)$$

Заметим при этом, что $\Theta\circ G^\gamma : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$, а систему уравнений (2.20) можно переписать в виде

$$v = (G^\gamma\circ\Theta)(v), \quad (2.23)$$

Предположим, что существует неподвижная точка $\kappa\in\mathcal{R}^2$ отображения $H = \Theta\circ G^\gamma$, т.е. $\kappa = \Theta\circ G^\gamma(\kappa)$. Покажем, что тогда существует единственное решение $v = (v_1, v_2)$ системы (2.20). Поскольку κ – неподвижная точка отображения H, то $\kappa = \Theta(G^\gamma(\kappa))$ и, следовательно, $v = G^\gamma(\kappa)$ удовлетворяет (2.23).

Для того, чтобы доказать единственность, предположим, что существует два решения u и g системы (2.23), т.е. справедливы равенства

$$u = G^\gamma\circ\Theta(u)(t,\omega)$$

и

$$g = G^\gamma \circ \Theta(g)(t,\omega).$$

Обозначим

$$\kappa = \Theta(u), \quad \kappa^1 = \Theta(g).$$

Поскольку $u = G^\gamma(\kappa)$, то $\kappa = \Theta(u) = \Theta(G^\gamma(\kappa))$. Аналогично, $\kappa^1 = \Theta(g) = \Theta(G^\gamma(g))$. При этом κ и κ^1 – неподвижные точки отображения H, следовательно, $\kappa = \kappa^1$ γ-п.в. откуда вытекает, что

$$u = G^\gamma(\kappa) = G^\gamma(\kappa^1) = g.$$

Остается проверить, что отображение H является сжимающим.

Обозначим $Z_q(t,v) = \exp\left\{\int\limits_0^t \alpha_q^v(s)ds\right\}$. Используя оценку

$$e^Y - e^X = (Y-X)\int\limits_0^1 e^{\theta Y + (1-\theta))X}d\theta \leqslant e^{\sup(X,Y)}|Y-X|,$$

и выбирая $Y = \int\limits_0^t \alpha_q(v(s))ds, \quad X = \int\limits_0^t \alpha_q(v^1(s))ds$, можно проверить, что справедлива оценка

$$\begin{aligned} |Z_q(t,v) - Z_q(t,v^1)| &\leqslant e^{tK_{\alpha_q}} \int\limits_0^t |\alpha_q(v(s)) - \alpha_q(v^1(s))|ds \\ &\leqslant e^{tK_{\alpha_q}} L_{\alpha_q} \int\limits_0^t |v(s) - v^1(s)|ds. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Из неравенства (2.24) вытекает, что для любой пары $(\kappa,\psi) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1$ и $(t,y) \in [0,T] \times R^d$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} &|\Gamma_q^\gamma(\kappa)(t,y) - \Gamma_q^\gamma(\psi)(t,y)| \\ &\quad = \int\limits_{\mathcal{C}^d} \rho(y - \xi_q(t,\omega)) \Big| e^{\int\limits_0^t \alpha_q(\kappa(s,\omega))ds} - e^{\int\limits_0^t \alpha_q(\psi(s,\omega))ds} \Big| \gamma_q(d\omega) \\ &\quad \leqslant K_\rho e^{TK_\alpha} L_\alpha \int\limits_{\mathcal{C}^d} \int\limits_0^t \|\kappa(s,\omega) - \psi(s,\omega)\| \, ds \, \gamma_q(d\omega) \end{aligned}$$

$$\leqslant CK_\rho e^{TK_\alpha} L_\alpha \mathbf{E}\Big[\int_0^t e^{Ks} e^{-Ks} |\kappa(s,\omega) - \psi(s,\omega)|\, ds\Big]$$

$$\leqslant CK_\rho e^{TK_\alpha} L_\alpha \mathbf{E}\Big[\int_0^t e^{Ks} \sup_{s\leqslant t} e^{-Ks} |\kappa(s,\omega) - \psi(s,\omega)|\, ds\Big]$$

$$\leqslant CK_\rho e^{TK_\alpha} L_\alpha \frac{e^{Kt}-1}{K} \|\kappa - \psi\|_{\infty,1}.$$

Таким образом,

$$\|\Theta \circ \Gamma^\gamma(\psi) - \Theta \circ \Gamma^\gamma(\psi)\|_{\infty,1}$$

$$= \mathbf{E}[\sup_{t\leqslant T} e^{-Kt} \|\Theta \circ \Gamma^\gamma(\psi)(t) - \Theta \circ \Gamma^\gamma(\kappa)(t)\|]$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^2 \mathbf{E}[\sup_{t\leqslant T} e^{-Kt} \|\Theta \circ \Gamma^\gamma_q(\psi)(t) - \Theta \circ \Gamma^\gamma_q(\kappa)(t)\|]$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^2 \sup_{t\leqslant T} e^{-Kt} \mathbf{E}[\|\Theta \circ \Gamma^\gamma(\psi(t,\xi_q(t))) - \Theta \circ \Gamma^\gamma(\kappa(t,\xi_q(t)))\|]$$

$$\leqslant 2CK_\rho e^{TK_\alpha} L_\alpha \frac{1}{K} \|\kappa - \psi\|^K_{\infty,1}.$$

Наконец, выбирая достаточно большое K, мы получим, что H – сжимающее отображение. □

Таким образом, мы показали, что при заданных вероятностных мерах γ_q существует единственное решение системы (2.20). Исследуем теперь зависимость полученных решений $v_q^\gamma(t,y)$ от мер γ_q и пространственной переменной $y \in R^d$.

Обозначим $\mathcal{Q} = \mathcal{C}^d \times \mathcal{C}^d$.

Лемма 2.2. *Пусть выполнено условие* **C 2.1** *и* v_q *удовлетворяет* (2.20)*. Тогда для любой пары вероятностных мер*

$$(\gamma,\gamma^1) \in \mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d) \times \mathcal{P}_q(\mathcal{C}^d)$$

и всех $(t,y,y^1) \in [0,T] \times R^d \times R^d$

$$|v_q^\gamma(t,y) - v_q^{\gamma^1}(t,y^1)|^2 \leqslant C_{\rho,\alpha_q}(t)[\|y - y^1\|^2 + |\mathcal{W}_t^2(\gamma,\gamma^1)|^2]. \tag{2.25}$$

Доказательство. Пусть $(\gamma,\gamma^1) \in \mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d) \times \mathcal{P}_q(\mathcal{C}^d)$. Тогда

$$|v_q^\gamma(t,y) - v_q^{\gamma^1}(t,y^1)|^2 \leqslant 2|v_q^\gamma(t,y) - v_q^\gamma(t,y^1)|^2 + 2|v_q^\gamma(t,y^1) - v_q^{\gamma^1}(t,y^1)|^2. \tag{2.26}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (2.26)

$$|v_q^\gamma(t,y)-v_q^\gamma(t,y^1)|^2 \leqslant \Big|\int\limits_{\mathcal{C}^d} |\rho(y-\xi_q(t,\omega))-\rho(y^1-\xi_q(t,\omega))| \times e^{\int_0^t \alpha_q(v(s,\xi_q(s)))ds}\gamma(d\omega)\Big|^2 \leqslant L_\rho e^{tK_{\alpha_q}}\|y-y^1\|^2. \tag{2.27}$$

Рассмотрим далее второе слагаемое в правой части (2.26). В силу неравенства Йенсена получим

$$\begin{aligned} &|v_q^\gamma(t,y^1)-v_q^{\gamma^1}(t,y^1)|^2 \\ &= \Big|\int\limits_{\mathcal{C}^d} \rho(y^1-\xi_q(t,\omega))e^{\int_0^t \alpha_q(v(s,\xi_q(s,\omega)))ds}\gamma(d\omega) \\ &- \int\limits_{\mathcal{C}^d} \rho(y^1-\xi_q(t,\omega^1))e^{\int_0^t \alpha_q(v(s,\xi_q(s,\omega^1)))ds}\gamma^1(d\omega^1)\Big|^2 \\ &\leqslant \int\limits_{\mathcal{C}^d\times\mathcal{C}^d} \Big|\rho(y^1-\xi(t,\omega))e^{\int_0^t \alpha_q(v(s,\xi_q(s,\omega)))ds} \\ &- \rho(y^1-\xi(t,\omega^1))e^{\int_0^t \alpha_q(v(s,\xi_q(s,\omega^1)))ds}\Big|^2\pi(d\omega,d\omega^1) \end{aligned} \tag{2.28}$$

для любой меры $\pi\in\Pi(\gamma,\gamma^1)$. Пусть $\kappa,\kappa^1\in C([0,T];R^2)$. Оценим разность

$$\begin{aligned} &\big|\rho(y^1-\xi_q(t))Z_q(t,\kappa)-\rho(y^1-\xi_q^1(t))Z_q(t,\kappa^1)\big|^2 \\ &\leqslant 2\|\rho(y^1-\xi_q(t))-\rho(y^1-\xi_q^1(t))\big|^2\big|Z_q(t,\kappa)\big|^2 \\ &+ 2\big|\rho(y^1-\xi_q^1(t))\big|^2\big|Z_q(t,\kappa)-Z_q(t,\kappa^1)\big|^2. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Используя липшицевские свойства функции ρ и оценку (2.26), получим

$$\begin{aligned} &\big|\rho(y^1-\xi_q(t))Z_q(t,\kappa)-\rho(y^1-\xi_q^1(t))Z_q(t,\kappa^1)\big|^2 \\ &\leqslant 2L_\rho^2 e^{2tK_{\alpha_q}}|\xi_q(t)-\xi_q^1(t)|^2+4K_\rho^2L_{\alpha_q}^2 t\int\limits_0^t|\kappa(s)-\kappa^1(s)|^2ds \end{aligned}$$

$$\leqslant C[(1+t)\sup_{s\leqslant t}\|\xi_q(s)-\xi_q^1(s)\|^2+\int\limits_0^t|\kappa(s)-\kappa^1(s)|^2ds].$$

Подставляя последнюю оценку в (2.29) и принимая во внимание (2.27), мы получим неравенство

$$\begin{aligned}|v_q^\gamma(t,y)&-v_q^{\gamma_1}(t,y^1)|^2\\ &\leqslant 2C(t)\int\limits_{\mathcal{C}^d\times\mathcal{C}^d}\Bigl((1+t)\sup_{s\leqslant t}\|\xi_q(s,\omega)-\xi_q(s,\omega^1)\|^2\\ &+\int\limits_0^t|v^\gamma(s,\xi_q(s,\omega))-v^{\gamma_1}(s,\xi_q(s,\omega^1))|^2ds\Bigr)\pi(d\omega,d\omega^1).\end{aligned}\tag{2.30}$$

Отсюда следует, что

$$m(s)=\mathbf{E}|v^\gamma(t,\xi(s,\omega))-v^{\gamma_1}(t,\xi(s,\omega^1))|^2$$

подчиняется оценке

$$m(t)\leqslant 2C(t)\int\limits_0^t m(s)ds+C^2(T)\int\limits_{\mathcal{C}^d\times\mathcal{C}^d}\sup_{s\leqslant t}\|\xi(s,\omega)-\xi(s,\omega^1)\|^2\pi(d\omega,d\omega^1),$$

для всех $t\in[0,T]$, откуда в силу леммы Гронуолла,

$$m(t)\leqslant C^2(t)\int\limits_{\mathcal{C}^d\times\mathcal{C}^d}\sup_{s\leqslant t}\|\xi(s,\omega)-\xi(s,\omega^1)\|^2\pi(d\omega,d\omega^1)e^{2C(T)}.$$

Подставляя полученную оценку в (2.26), мы получим неравенство

$$\begin{aligned}|v^\gamma(t,y)-v^{\gamma_1}(t,y^1)|^2\leqslant C\Bigl[\|y-y^1\|^2\\ +\int\limits_{\mathcal{C}^d\times\mathcal{C}^d}\sup_{s\leqslant t}\|\xi(s,\omega)-\xi(s,\omega^1)\|^2\pi(d\omega,d\omega^1)\Bigr].\end{aligned}\tag{2.31}$$

Поскольку полученная оценка справедлива при всех $\pi\in\Pi(\gamma,\gamma^1)$, то, вычисляя инфимум по $\pi\in\Pi(\gamma,\gamma^1)$, мы докажем справедливость оценки (2.25). $\square$

Напомним, что существование и единственность решения системы (2.20) были доказаны в предположении, что заданы меры γ_q или, эквивалентно, что заданы канонические процессы $\xi_q(t)$. Осталось показать, что такие процессы существуют.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия* **C 2.1**. *Тогда существует единственное сильное решение системы СДУ*

$$d\xi_q(s) = m_q^{\vartheta(v_1,v_2)}(s, \xi_q(s))ds + \sigma_q dw_q(s), \quad \xi_q(0) = \xi_{0q}, \ \ q = 1, 2, \tag{2.32}$$

Доказательство. Пусть $\gamma_q \in \mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d)$. В силу справедливости условия **C 2.1**, из леммы 2.2 следует, что функции $v_q^\gamma(t, y)$ удовлетворяют условию Липшица по пространственной переменной (равномерно по t). При этом коэффициенты стохастического уравнения удовлетворяют условиям классической теоремы о существовании и единственности решения СДУ. Далее в силу теоремы Буркхольдера–Ганди–Дэвиса и неравенства Йенсена существует положительная константа K_0 (зависящая от коэффициентов СДУ) для которой справедлива оценка $\mathbf{E}[\sup_{t\leqslant T} \|\xi_q(t)\|^2] \leqslant K_0(1 + \mathbf{E}[\|\xi_{0q}\|^2])$. Следовательно, распределение $\mathcal{L}(\xi_q)$ принадлежит $\mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d)$.

Рассмотрим отображения $\mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d) \to \mathcal{P}_2(\mathcal{C}^d)$, заданные соотношениями $N_q(\gamma) = \mathcal{L}_q(\xi_q^\gamma)$ и покажем, что отображение $N = (N_1, N_2)$, является сжимающим в пространстве $\mathcal{P}_2(\mathcal{Q})$ в метрике Вассерштейна. Пусть $u = u^\gamma$ и $u^1 = u^{\gamma^1}$ – решения (2.17), соответствующие γ и γ^1. Обозначим $\xi_q(t) = \xi_q^\gamma(t)$ и $\xi^1(t) = \xi_q^{\gamma^1}(t)$, $q = 1, 2$, – решения (2.4), связанные с γ и γ^1, и, используя (2.22) и **C 2.1**, получим

$$\mathbf{E}[\sup_{t\in[0,T]} \|\xi(t) - \xi^1(t)\|^2] \leqslant 2\sum_{q=1}^{2} \mathbf{E}[\|\xi_q(t) - \xi_q^1(t)\|^2] \leqslant \tag{2.33}$$

$$\leqslant C\Big[\int_0^T \mathbf{E}[\sum_{q=1}^{2} \sup_{s\in[0,t]} \|\xi_q(s) - \xi_q^1(s)\|^2]dt + \int_0^T |\mathcal{W}_t(\gamma, \gamma^1)|^2\, dt\Big].$$

Из определения метрики Вассерштейна следует оценка

$$\mathcal{W}_t^2(N(\gamma), N(\gamma^1)) \leqslant \mathbf{E}[\sup_{s\leqslant t} \|\xi(s) - \xi^1(s)\|^2], \tag{2.34}$$

а из (2.30) следует оценка

$$\mathbf{E}\big[\sup_{t\leqslant T} \|\xi_q(t) - \xi_q^1(t)\|^2\big] \leqslant C\Big[\int_0^T \mathbf{E}\sup_{s\leqslant t} \|\xi_q(s) - \xi_q^1(s)\|^2 dt + \int_0^T |\mathcal{W}_t(\gamma, \gamma^1)|^2 dt\Big]$$

с константой C, зависящей от констант в условии **C 2.1**. Применяя лемму Гронуолла, из (2.33) выведем неравенство

$$\mathbf{E}[\sup_{t\leqslant T}\|\xi_q(t)-\xi_q^1(t)\|^2]\leqslant Ce^{CT}\int\limits_0^T|\mathcal{W}_t(\gamma,\gamma^1)|^2dt$$

и, с учетом (2.34), получим неравенство

$$\mathcal{W}_t^2(N(\gamma),N(\gamma^1))\leqslant Ce^{CT}\int\limits_0^T|\mathcal{W}_t(\gamma,\gamma^1)|^2dt.$$

Итерируя полученную оценку, мы покажем, что оператор $N=(N_1,N_2)$ является сжимающим в пространстве $\mathcal{P}_2(\mathcal{Q})$ и, следовательно, существует единственная неподвижная точка этого отображения. □

§3. Случай растущих коэффициентов

В этом параграфе мы откажемся от предположения, что коэффициенты системы (2.5) ограничены и докажем существование и единственность ее решения на некотором интервале $[0,T_1]$.

Обозначим $K_{v_q}(t)=\sup_y|v_q(t,y)|=\|v_q(t)\|_\infty$ и $K_{0q}=\|u_{0q}\|_\infty$, $K_0=\sup_q K_{0q}$, $K_u(\tau)=\sum_{q=1}^{d_1}K_{v_q}(\tau)$ и пусть $\rho_0=\max(\beta_1,\beta_2),\rho=\max(\beta_1a_1,\beta_2a_2)$.

Будем говорить, что выполнены условия **C 3.1**, если в условии **C 2.1** условия роста функций $\alpha_q^v=\alpha_q(v),m_q^v=m_q(v)$, $q=1,2$, имеют вид

$$|m_q(v)|\leqslant C^q+C_1K_{v_1}+C_2K_{v_2},$$

$$|\alpha_q(v)|\leqslant\rho_0+\rho[K_{v_1}+K_{v_2}].$$

Рассмотрим стохастическую систему

$$d\xi_q(s)=m_q(v(s,\xi_m(s)))\,ds+\sigma_q\,dw_q(s),\quad \xi_q(0)=\xi_{0q}\in R^d, \tag{3.1}$$

$$v_q(t,y)=\mathbf{E}\Big[\rho\big(y-\xi_q(t)\big)\exp\Big\{\int\limits_0^t\alpha_q(v(\tau,\xi_q(\tau)))\,d\tau\Big\}\Big]. \tag{3.2}$$

Для изучения этой системы нам понадобится ряд вспомогательных результатов.

Предварительно линеаризуем систему уравнений (3.1), (3.2).

Пусть $g(t,y)=(g_1(t,y),g_2(t,y))\in R^2$ – заданная ограниченная функция, удовлетворяющая условию Липшица

$$\sup_y \|g(t,y)\|\leqslant K_g(t), \quad \|g(y,y)-g(t,y^1)\|\leqslant L_g\|y-y^1\|.$$

Рассмотрим стохастическую систему

$$d\xi_q(s)=m_q(g(s,\xi_q(s)))\,ds+\sigma_q\,dw_q(s),\ \ \xi_q(0)=\xi_{0q}\in R^d,\ \ q=1,2, \quad (3.3)$$

и функции

$$u_q(t,y)=\mathbf{E}\Big[\rho\big(y-\xi_q(t)\big)\exp\Big\{\int_0^t \alpha_q(g(\tau,\xi_q(\tau)))d\tau\Big\}\Big]. \quad (3.4)$$

Из общих результатов теории стохастических дифференциальных уравнений вытекает ряд нужных для дальнейшего оценок. Константы C,K,L в этих оценках могут изменяться от строчки к строчке.

Обозначим $K_v(t)=\sup_y|v(t,y)|=\|v(t)\|_\infty$ и $K_{0q}=\|u_{0q}\|_\infty$.

Лемма 3.1. *Предположим, что выполнено условие* **C 3.1**. *Тогда функции $u_q(t)$, заданные соотношениями* (3.4), *обладают следующими свойствами: существует интервал $[0,T_1]$, длина которого удовлетворяет оценке*

$$T_1<\frac{1}{\rho_0}\log\left(1+\frac{\rho_0}{\rho K_0}\right),$$

и положительная ограниченная функция $m(t)$, определенная на $[0,T_1]$, такие что $K_u(t)=\sum_{q=1}^{2}\|u_q(t)\|_\infty\leqslant m(t)$, если $\sum_{q=1}^{2}\|g_q(t)\|_\infty=K_g(t)\leqslant m(t)$ при $t\in[0,T_1]$

Доказательство. В силу общих результатов теории СДУ при выполнении условия **C 3.1** существует единственный случайный процесс $\xi_q(t)$, удовлетворяющий (3.3). Из (3.4) вытекает оценка

$$K_{u_q}(t)\leqslant K_{0q}\mathbf{E}\Big[\exp\Big\{\int_0^t\big[-C^q+C_1g_1(\tau,\xi_q(\tau))+C_2g_2(\tau,\xi_q(\tau))\big]\,d\tau\Big\}\Big]. \quad (3.5)$$

Обозначим $K_0 = \sup_q K_{0q}$, $\quad K_u(\tau) = \sum_{q=1}^{d_1} K_{v_q}(\tau)$. Из (3.5) следует, что

$$K_u(t) \leqslant 2K_0 \exp\left\{ \int_0^t [-C^q + C_1 K_{g_1}(\tau) + C_2 K_{g_2}(\tau)] d\tau \right\},$$

Пусть $\rho^0 = \min(C^1, C^2)$, $\rho_q = \max(C_1, C_2)$, $\rho^1 = \max_q \rho_q$.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$m(t) = 2K_0 \exp\left\{ \int_0^t [\rho^0 + \rho^1 m(\tau)]\, d\tau \right\}$$

и заметим, что его решение $m(t)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{dm(t)}{dt} = \left[\rho^0 + \rho^1 m(t)\right] m(t), \quad m(0) = 2K_0, \tag{3.6}$$

и имеет вид

$$m(t) = \frac{2K_0\rho^0}{\rho^0 + K_0\rho^1 - K_0\rho^1 e^{\rho^0 t}}. \tag{3.7}$$

Отсюда вытекает, что справедлива оценка $K_v(t) \leqslant m(t)$ при условии $K_g(t) \leqslant m(t)$, где функция $m(t)$, заданная соотношением (3.7), – ограниченная функция на интервале $[0, T_1]$, длина которого подчиняется оценке

$$T_1 < \frac{1}{\rho^0} \log\Big(1 + \frac{\rho^0}{K_0\rho^1}\Big). \qquad \square$$

Теорема 3.2. *Пусть выполнено условие* **C 3.1**. *Тогда существует единственное решение* $(\xi_q(t), v_q(t,y))$ *системы* (3.1), (3.2)*, определенное на интервале* $[0, T_1]$ *и такое, что* $\xi_q(t) \in R^d$ *обладает марковским свойством, а* $v_q(t,x)$ *– ограниченная липшицева функция.*

Доказательство. Очевидно, что соотношения (3.2) можно рассматривать как функциональное уравнение $v(t,y) = \Phi(t,v)$, где Φ действует в пространстве $C_b([0,T_1] \times R^2; R^2)$. Последовательные приближения $v^{(k)}(t,y) = \Phi(t, v^{(k-1)})$ к решению этого уравнения имеют вид

$$\xi_q^{(0)} = x, \quad v_q^{(1)}(t,y) = u_{0q}(y),$$
$$d\xi_q^{(1)}(t) = -m_q(v_0(\xi_q^{(1)}(t)))\, dt + \sigma_q\, dw_q(t), \quad \xi_q^{(1)}(0) = \xi_{0q},$$

$$v_q^{(2)}(t,y) = \mathbf{E}\Big[\rho\big(y - \xi_q^{(1)}(t)\big)\exp\Big\{\int_0^t \alpha_q(v^{(1)}(\xi_q^{(1)}(\tau)))d\tau\Big\}\Big],$$

и

$$d\xi_q^{(k)}(t) = -m_q(v^{(k)}(t,\xi_q^{(k)}(t)))\,dt + \sigma_q\,dw_m(t), \quad \xi_m^{(k)}(0) = \xi_{0m}, \qquad (3.8)$$

$$v_q^{(k+1)}(t,y) = \mathbf{E}\Big[\rho(y - \xi_q^{(k)}(t))\exp\Big\{\int_0^t \alpha_q(v^{(k)}(\tau,\xi_q^{(k)}(\tau)))d\tau\Big\}\Big]. \qquad (3.9)$$

Покажем, что при выполнении условий **C 3.1** последовательности ($\xi_q^k(t)$ и $v_q^{k+1}(t,y)$) сходятся при $k \to \infty$ к решению системы (3.1), (3.2).

Из леммы 3.1 вытекает, что семейство $v^k(t,y)$ равномерно ограничено на интервале $[0,T_1]$ и равностепенно непрерывно, поскольку константа Липшица в оценке $v^k(t,y)$ по пространственной переменной не зависит от k. Пусть $n_q^k(t,y) = \big\|v_q^{(k+1)}(t,y) - v_q^{(k)}(t,y)\big\|$. Из леммы 3.1 вытекает также, что

$$\|n^k(t,y)\| \leqslant K\int_0^t \sup_y \|n^{k-1}(s,y)\|\,ds$$

и, следовательно, $\kappa^k(t) = \sup\limits_y \|n^k(t,y)\|$ подчиняется оценке

$$\kappa^k(t) \leqslant \int_0^t \cdots \int_0^t \|v^{(2)}(\tau_1) - v_0\| d\tau_1 \dots d\tau_n \leqslant \frac{C^n}{n!}$$

поскольку все $v^{(k)}(\tau)$ ограничены. Здесь C – положительная константа, зависящая от констант в условии **C 3.1** и T_1. Применяя теорему Арцела–Асколи мы приходим к утверждению о существовании при каждом $t \in [0,T_1]$ предельной ограниченной липшицевой функции $v(t,y) = \lim\limits_{k\to\infty} v^{(k)}(t,y)$, определенной на интервале $[0,T_1]$ и удовлетворяющей (3.2). Наконец, нетрудно проверить, что сходимость $v^k(t)$ к $v(t)$ равномерна на $[0,T_1]$.

Для того, чтобы доказать единственность решения (3.2), предположим обратное, т.е. пусть существует два решения $u(t,y)$ и $v(t,y)$ системы (3.2). Используя стандартные оценки и липшицевость коэффициентов m_q^v и α_q^v и функции $v = (v_1, v_2)$, можно проверить, что справедлива оценка

$$\|v(t) - u(t)\|_\infty \leqslant \text{const} \int\limits_0^t \|v(s) - u(s)\|\, ds$$

из которой в силу леммы Гронуолла следует, что $\|u(t) - v(t)\|_\infty = 0$. Следовательно, решение $v(t, y)$ единственно. $\square$

Поскольку мы доказали, что при выполнении условия **C 3.1** функции $v_q(t, y)$, удовлетворяющие (3.2), ограничены при $t \in [0, T_1]$, то коэффициенты $\alpha_q(y, v)$ вида (2.3) также ограничены. Отсюда вытекает, что на интервале $[0, T_1]$ выполняется условие **C 2.1**, и, следовательно, результаты предыдущего параграфа применимы и в рассматриваемом случае.

Другими словами справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Предположим, что выполнено условие* **C 3.1**. *Тогда существует такой интервал* $[0, T_1]$, *что для* $t \in [0, T_1]$ *существует единственное единственное решение* $\xi_q(t)$, $v_q(t, y)$ *системы* (3.1)–(3.2). *При этом процесс* $\xi_q(t) \in R^d$ *обладает марковским свойством, а функции* $v_q(t, y) \in R_+$ *ограничены и липшицевы по пространственному аргументу.*

§4. Связь стохастической и параболической системы

Покажем, что меры $\mu_q(t, dy)$, связанные соотношениями

$$v_q(t, y) = [\rho * \mu_q](t, y)$$

с функциями $v_q(t, y)$, построенными в предыдущем параграфе, удовлетворяют в слабом смысле задаче Коши (2.18) на интервале $[0, T_1]$. С этой целью мы предварительно установим эквивалентность стохастических систем

$$\xi_q(t) = \xi_{0q} + \int\limits_0^t m_q^{\vartheta(v_1^\gamma, v_2^\gamma)}(s, \xi_q(s))\, ds + \int\limits_0 t\sigma_q\, dw_q(s), \quad q = 1, 2, \tag{4.1}$$

$$v_q^\gamma(t, y) = \int\limits_{\mathcal{C}^d} \rho\big(y - \xi_q(t, \omega)\big) \exp\left\{ \int\limits_0^t \alpha_q(v^\gamma(s, \xi_q(s)))ds \right\} \gamma_q(d\omega), \tag{4.2}$$

$$\mathcal{L}(\xi_q) = \gamma_q, P\{\xi_{0q} \in dy\} = \mu_{0q}(dy),$$

и

$$\xi_q(t) = \xi_{0q} + \int\limits_0^t m_q^{\vartheta(\mu_1^\gamma,\mu_2^\gamma)}(s,\xi_q(s)))ds + \int\limits_0^t \sigma_q dw_q(s), \qquad (4.3)$$

$$\int_{R^d} h(y)\mu_q^\gamma(t,dy) = \int_{\mathcal{C}^d} h(\xi_q(t,\omega))\exp\Big\{\int_0^t \alpha_q(\rho*\mu^\gamma)(s,\xi_q(s))\,ds\Big\}\gamma_q(d\omega), \qquad (4.4)$$

где $P\{\xi_q(0)\in dy\} = \mu_{0q}(dy)$, $\mathcal{L}(\xi_q) = \gamma_q$ и

$$\rho*\mu_q^\gamma(t,y) = \int\limits_{R^d} \rho(y-x)\mu_q^\gamma(t,dx).$$

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* **C 3.1**. *Тогда существование решения системы уравнений типа Маккина–Власова вида* (4.1)–(4.2) *эквивалентно существованию решения системы* (4.3)–(4.4). *Точнее говоря, если* $(\xi_q(t),\mu_q^\gamma(t))$, $q=1,2$, *– решение системы* (4.3)–(4.4), *то* $(\xi_q(t),v_q^\gamma(t))$ *– решение системы* (4.1)–(4.2), *причем* $v_q^\gamma(t,y) = \rho*\mu_q^\gamma$. *Справедливо и обратное утверждение.*

Если кроме того измеримые множества $V=\{y\in R^d : \mathcal{F}(\rho)(y)=0\}$ *имеют нулевую меру Лебега,* $\mathrm{Leb}(V)=0$, *то эти системы эквивалентны, т.е. меры* μ_q^γ, *задаваемые соотношениями* (4.4), *единственным образом определяют функции* v_q^γ, *удовлетворяющие* (4.2) *и наоборот функции* v_q^γ *удовлетворяющие* (4.2) *единственным образом задают меры* μ_q^γ, *удовлетворяющие* (4.4).

Доказательство. Пусть $(\xi_q(t),v_q^\gamma(t))$ – решение системы (4.1)–(4.2). Обозначим

$$F(h)(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int\limits_{R^d} h(y)\,e^{-z\cdot y}\,dy$$

преобразование Фурье функции $h\in S(R^d)$. Поскольку $\rho\in L^1(R^d)$, то, применяя преобразование Фурье к функции $v_q^\gamma(t,y)$, получим

$$F(v_q^\gamma)(t,z) = F(\rho)(z)\int\limits_{\mathcal{C}^d} e^{-iz\cdot\xi_q(t,\omega)}\exp\Big\{\int\limits_0^t \alpha_q(v^{\gamma_q}(s,\xi_q(s,\omega)))\,ds\Big\}\gamma_q(d\omega). \qquad (4.5)$$

Из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости следует, что функция

$$g_q^{\gamma}(z) = \int\limits_{\mathcal{C}^d} e^{-iz\cdot\xi_q(t,\omega)} \exp\left\{ \int\limits_0^t \alpha_q(v^{\gamma_q}(s,\xi_q(s,\omega)))\,ds \right\}\gamma_q(d\omega) \qquad (4.6)$$

непрерывна и, поскольку α_q ограничена при $t \in [0, T_1]$, то и $g_q^{\gamma}(z)$ ограничена.

Пусть $\{\beta_k\}_{k=1,\dots,d}$ – последовательность комплексных чисел и $\{y_k\}_{k=1,\dots,d} \in (R^d)^d$. Заметим, что для всех $z \in R^d$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\beta_k\bar{\alpha}_j e^{-iz\cdot(y_k-y_j)} = \left(\sum_{k=1}^{d}\beta_k e^{-iz\cdot y_k}\right)\overline{\left(\sum_{j=1}^{d}\beta_j e^{-iz\cdot y_j}\right)} = \left|\sum_{k=1}^{d}\beta_k e^{-iz\cdot y_k}\right|^2,$$

из которого вытекает, что g_q^{γ} неотрицательно определена. Тогда из теоремы Бохнера следует, что существует такая конечная неотрицательная борелевская мера $\nu_q^{\gamma}(t)$ на R^d, что для всех $z \in R^d$

$$g_q^{\gamma}(t,z) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\int\limits_{R^d} e^{-iz\cdot y}\nu_q^{\gamma}(t,dy). \qquad (4.7)$$

Покажем, что $\mu_q^{\gamma}(t,dy) \equiv \nu_q^{\gamma}(t,dy)$ удовлетворяет (4.5). Поскольку $\mu_q^{\gamma}(t,dy)$ – конечная неотрицательная борелевская мера, то она является элементом пространства распределений Шварца $S'(R^d)$, для которого справедливо равенство $F^{-1}(g^{\gamma}(t)) = \mu_q^{\gamma}(t)$, и для любой $\phi \in \mathcal{S}(R^d)$ имеет место оценка

$$\left|\int\limits_{R^d}\phi(x)\mu_q^{\gamma}(t,dx)\right| \leqslant \|\phi\|_{\infty}\mu_q^{\gamma}(t,R^d) < \infty.$$

Из соотношений (4.5) и (4.7) вытекает, что $F(v_q^{\gamma})(t,\cdot) = F(\rho)\times F(\mu_q^{\gamma}(t))$, и, следовательно, $v_q^{\gamma}(t,\cdot) = \rho * \mu^{\gamma}(t,\cdot)$. Обозначим $\langle\phi,\mu\rangle = \int\limits_{R^d}\phi(y)\mu(t,dy)$, $\phi \in S(R^d)$. Используя теорему Фубини и равенство $v_q^{\gamma}(t,\cdot) = \rho * \mu^{\gamma}(t,\cdot)$, мы получим, что для всех $\phi \in \mathcal{S}(R^d)$

$$\begin{aligned}\langle\phi,\mu_q^{\gamma}(t)\rangle &= \langle\phi,F^{-1}(g_q^{\gamma})(t)\rangle = \langle F^{-1}(\phi),g_q^{\gamma}(t)\rangle \\ &= \int\limits_{R^d} F^{-1}(\phi)(z)\left(\int\limits_{\mathcal{C}^d} e^{-iz\cdot\xi_q(t,\omega)} e^{\int_0^t \alpha_q(v^{\gamma}(s,\xi_q(s,\omega)))ds}\gamma_q(d\omega)\right)dz\end{aligned}$$

$$= \int\limits_{\mathcal{C}^d} \left(\int\limits_{R^d} F^{-1}(\phi)(z) e^{-iz\cdot\xi_q(t,\omega)} dz \right) e^{\int\limits_0^t \alpha_q(v^\gamma(s,\xi_q(s,\omega)))ds} \gamma_q(d\omega)$$

$$= \int\limits_{\mathcal{C}^d} \left(\int\limits_{R^d} F^{-1}(\phi)(z) e^{-iz\cdot\xi_q(t,\omega)} dz \right) e^{\int\limits_0^t \alpha_q(\rho*\mu_q^\gamma(s,\xi_q(s,\omega)))ds} \gamma_q(d\omega)$$

$$= \int\limits_{\mathcal{C}^d} \phi(\xi_q(t,\omega)) e^{\int\limits_0^t \alpha_q(\rho*\mu_q^\gamma(s,\xi_q(s,\omega)))ds} \gamma_q(d\omega).$$

Таким образом, $(\xi_q(t), v_q^\gamma(t))$ – решение системы (4.1)–(4.2), если $(\xi_q(t), \mu_q(t))$ – решение системы (4.3)–(4.4).

Для того, чтобы доказать справедливость обратного утверждения, предположим, что (ξ_q, μ_q^γ) удовлетворяют (4.1)–(4.2). Положим

$$v_q^\gamma(t,y) = (\rho * \mu_q^\gamma)(t,y)$$

и заметим, что при этом $(\xi_q(t), \mu^\gamma(t))$ удовлетворяют (4.3)–(4.4). Поскольку $\mu^\gamma(t)$ – конечная мера, то для проверки соотношений (4.1)–(4.2) достаточно положить $\phi = \rho(x - \cdot)$ в (4.3)–(4.4). Таким образом доказано первое утверждение теоремы.

Для доказательства второго утверждения заметим, что из соотношения $v_q^\gamma(t,y) = (\rho * \mu_q^\gamma)(t,y)$ следует, что соотношение $\mathrm{Leb}(\{y \in R^d : F(\rho)(y) = 0\}) = 0$, где Leb – мера Лебега, влечет за собой соотношение $F(\mu_q^\gamma(t)) = \frac{F(v_q^\gamma(t,\cdot))}{F(\rho)}$ п.в. для $t \in [0, T_1]$ и, следовательно, v_q^γ однозначно задает $\mu_q^\gamma(t)$ и наоборот, $\mu_q^\gamma(t)$ однозначно задает $v_q^\gamma(t)$. □

Далее, применяя формулу Ито, несложно проверить следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Существует такой интервал* $[0, T_1]$, *что меры* $\mu_q^\gamma(t)$, $q = 1, 2, 3$, *заданные соотношениями* (4.3), (4.4) *на этом интервале, удовлетворяют в слабом смысле задаче Коши*

$$\frac{\partial \mu_q}{\partial t} = \frac{\sigma_q^2}{2} \Delta \mu_q - \mathrm{div}(\mu_q \chi_q(\nabla p_3 * \mu)) + \mu_q \alpha_q(\rho * \mu), \tag{4.8}$$

$$\mu_q(0, dy) = \mu_{0q}(dy), \quad q = 1, 2,$$

$$\frac{\partial \mu_3}{\partial t} = \frac{\sigma_3^2}{2} \Delta \mu_3 + c_1 \mu_1^\gamma + c_2 \mu_2 - c_3 \mu_3, \quad \mu_3(0, dy) = \mu_{03}(dy). \tag{4.9}$$

Доказательство. Применив формулу Ито к процессу

$$\eta_q(t) = h(\xi_q(t)) \exp\Big\{ \int_0^t \alpha_q(\rho * \mu^\gamma(s))(\xi_q(s))\, ds \Big\},$$

в предположении, что $h \in C_0^\infty(R^d)$ и $\xi_q(t)$ удовлетворяет (4.3), мы получим после вычисления математического ожидания равенство

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big[h(\xi_q(t)) \exp\Big\{ \int_0^t \alpha_q([\rho * \mu^\gamma](s, \xi_q(s)))ds \Big\}\Big] \\
&= \mathbf{E}[h(\xi_{0q})] + \int_0^t \mathbf{E}\Big[h(\xi_q(s))\alpha_q([\rho * \mu^\gamma](s, \xi_q(s))) \\
&\times \exp\Big\{ \int_0^s \alpha_q([\rho * \mu^\gamma](\tau, \xi_q(\tau)))d\tau \Big\}\Big]\, ds \\
&\quad + \int_0^t \mathbf{E}\Big[\frac{\sigma_q^2}{2} \Delta h(\xi_q(s)) + \nabla h(\xi_q(s)) \cdot m_q([\rho * \mu^\gamma](s, \xi_q(s)))\Big]\, ds.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись определением меры $\mu_q^\gamma(t)$, мы получим

$$\begin{aligned}
&\int_{R^d} h(y)\, \mu_q^\gamma(t, dy) = \int_{R^d} h(y)\, \mu_{0q}(dy) \\
&\quad + \int_0^t \int_{R^d} h(y)\alpha_q([\rho * \mu^\gamma](s, y))\, \mu_q^\gamma(s, dy)\, ds \\
&\quad + \int_0^t \int_{R^d} \nabla h(y) \cdot m_q([\nabla p_3 * \mu^\gamma](s, y))\, \mu^\gamma(s, dy)\, ds \\
&\quad + \frac{d_q^2}{2} \int_0^t \int_{R^d} \Delta h(y)\, \mu^\gamma(s, dy)\, ds.
\end{aligned}$$

откуда вытекает утверждение теоремы для $q = 1, 2$.

В заключение нам осталось лишь проверить, что мера $\mu_3(t,dy) = u_3(t,y)\,dy$, где функция $u_3(t,y)$ задана соотношением (2.9), удовлетворяет в слабом смысле уравнению (2.8) с начальным условием $\mu_3(0,dx) = \mu_{03}(dx) = u_{03}(x)\,dx$, т.е. справедливо равенство

$$\int\limits_{R^d} \mu_3(t,dy)\,h(y) = \int\limits_{R^d}\int\limits_{R^d} \mu_{03}(dx) p_3(0,x,t,y)\,h(y)\,dy \tag{4.10}$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{R^d} \Bigg(\int\limits_{R^d} p_3(\theta,z,t,y) h(y)\,dy \Bigg) \big[c_1\mu_1(\theta,dz) + c_2\,\mu_2(\theta,dz)$$
$$- c_3\mu_3(\theta,dz)\big]\,d\theta$$

для любой функции $h \in C_0^\infty(R^d)$. Используя (4.10), можно проверить, что мера $\mu_3(t,dy)$ является единственным классическим решением задачи Коши (2.8) с начальным условием $\mu_3(0,dx) = u_{03}(x)dx$, откуда вытекает, что она является и слабым решением этой задачи Коши, что завершает доказательство теоремы. □

Список литературы

1. T. Black, J. Lankeit, M. Mizukami, *On the weakly competitive case in a two-species chemotaxis model.* — IMA J. Appl. Math., **81** (2016), 860–876.
2. H. Qiu, S. Guo, *Global existence and stability in a two-species chemotaxis system.* — Discrete & Continuous Dynamical Systems–B **24**, No. 4 (2019), 1569–1587.
3. Я. И. Белопольская, *Стохастические модели процессов хемотаксиса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **484**, (2018) 7–27.
4. D. Talay, M. Tomašević, *A new McKean—Vlasov stochastic interpretation of the parabolic–parabolic Keller—Segel model: The one-dimensional case.* — Bernoulli Soc. Math. Stat. and Prob., **26**, No. 2 (2020), 1323–1353.
5. Le Cavil, N. Oudjane, F. Russo, *Probabilistic representation of a class of for nonconseravtive nonlinear partial differential equations.* — ALEA, Lat Am. J. Probab. Math. Statist. **13** (2016), 1189–1233.
6. Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Лейнызин операторы.* Т. 1. *Общая теория*, М.: ИЛ, 1962.

Belopolskaya Ya. I., Nemchenko E. I. Chemotaxis stochastic model for two populations.

We construct a probabilistic representation of the Cauchy problem weak solution for a system of parabolic equations describing a chemotaxis process in a system of two interacting populations. We derive a stochastic system describing the Keller–Segel type chemotaxis process and the Lotka–Volterra type interatction between two populations and prove existence and uniqueness theorem for its solution. Finally, we show connections between solutions of the stochastic system and the Cauchy problem weak solution of the original PDE system.

Санкт-Петербургский Государственный
Архитектурно-Строительный Университет,
ул. 2-я Красноармейская 4, Санкт-Петербург,
190005, Россия
E-mail: yana@yb1569.spb.edu

Поступило 9 октября 2020 г.