Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 495, 2020 г.

С. М. Ананьевский, Н. А. Крюков

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ В ДИСКРЕТНОМ АНАЛОГЕ ЗАДАЧИ О ПАРКОВКЕ

В настоящей работе продолжается исследование естественной дискретизации задачи Реньи, известной под названием "задача о парковке".

Пусть l – фиксированное целое число, $l \geqslant 2$. Также пусть n, i – целые числа, причем, $n \geqslant 0$ и $0 \leqslant i \leqslant n - l$. Описание изучаемой в данной работе задачи следующее.

На отрезок $[0, n]$ будем помещать открытый интервал $(i, i+l)$, где i – случайная величина, с равной вероятностью принимающая значения $0, 1, 2, \ldots, n-l$ для всех $n \geqslant l$. Если $x < l$, то говорим, что интервал не помещается. После размещения первого интервала образуются два свободных отрезка $[0, i]$ и $[i+l, n]$, на каждый из которых помещаем открытый интервал длины l по тому же правилу. Размещение интервалов на свободных отрезках осуществляется независимо друг от друга и так далее. По окончании процесса заполнения отрезка $[0, n]$ интервалами между любыми двумя соседними интервалами расстояние будет не больше $l-1$. Пусть $\xi_{n,l}$ означает суммарную длину разместившихся интервалов. Асимптотическое поведение математических ожиданий, а также дисперсий данной последовательности случайных величин при неограниченном увеличении n уже изучалось ранее.

Данная статья ставит своей целью показать, что при естественной нормировке описанных выше случайных величин $\xi_{n,l}$, они будут по распределению сходиться к стандартной нормальной случайной величине.

Случайная величина $\xi_{n,l}$ может возникать в различных практических задачах. Например, если мы хотим расшифровать информацию, записанную на линейном носителе длины n. Предположим, что инструмент, с помощью которого возможна расшифровка, позволяет анализировать куски информации только длины l. Для проведения анализа из случайно выбранного места носителя информации вырезается

Ключевые слова: случайное заполнение, дискретная задача о "парковке", асимптотическое поведение, асимптотическая нормальность.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ грант No. 18-01-00393.

кусок носителя $(i, i+l)$ длины l и поступает на расшифровку. В результате этого весь носитель распадается на 2 части: $[0, i]$ и $[i+l, n]$, которые в дальнейшем подвергаются такой же процедуре вырезания. Этот процесс продолжается до тех пор, пока длины всех неподверженных расшифровке кусков не станут меньше l. Тогда случайная величина $\xi_{n,l}$ означает объем расшифрованной информации.

Другой, очень похожий пример, при котором возникает случайная величина $\xi_{n,l}$, следующий. На линейный носитель, длина которого равна n, записываются поступающие куски информации длины l. При этом для записи этого куска случайным образом выбирается место $(i, i+l)$. После записи первого куска на линейном носителе образуются два свободных места $[0, i]$ и $[i+l, n]$ для записи следующих кусков информации, которые в свою очередь подвергаются такой же процедуре. Это продолжается до тех пор, пока длины всех свободных мест носителя не станут меньше l. Здесь $\xi_{n,l}$ будет означать общий объем размещенной информации.

§1. Введение

Впервые задача случайного заполнения отрезка была представлена в работе Реньи [1]. На отрезке $[0, x]$ для некоторого фиксированного $x > 1$ случайным образом размещается интервал $(t, t+1)$, тем самым разбивая изначальный отрезок на два: $[0, t]$ и $[t+1, x]$. Если какой-либо из них имеет длину меньше единицы, он исключается из дальнейшего рассмотрения. Остальные продолжают заполняться по вышеописанному правилу независимо друг от друга. Выражение “случайным образом” означает, что t является равномерно распределенной на $[0, x-1]$ случайной величиной, которая не зависит от других аналогичных случайных величин. Данный процесс заканчивается в тот момент, когда не остается свободных отрезков длины хотя бы 1. Когда процесс заканчивается, подсчитывается суммарное количество размещенных на изначальном отрезке интервалов. Оно обозначается через N_x. Для $0 \leqslant x < 1$ значение N_x принимается равным нулю.

В работе Реньи [1] было показано, что при любом $n \geqslant 1$

$$\mathbf{E}\{N_x\} = \lambda x + \lambda - 1 + O(x^{-n}), \qquad (x \to \infty). \tag{1}$$

Для константы λ также было получено следующее выражение

$$\lambda = \int_0^\infty e^{-2\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u} du} dt. \qquad (2)$$

Позднее в работе Дворецкого и Роббинса [2] было дано уточнение соотношения (1):

$$\mathbf{E}\{N_x\} = \lambda x + \lambda - 1 + O\left(\left(\frac{2e}{x}\right)^{x-\frac{3}{2}}\right), \qquad (x \to \infty). \qquad (3)$$

Также было изучено поведение дисперсии той же последовательности случайных величин и было доказано, что существует положительная константа λ_2, такая что верно соотношение

$$\mathbf{D}\{N_x\} = \lambda_2 x + \lambda_2 + O\left(\left(\frac{4e}{x}\right)^{x-4}\right), \qquad (x \to \infty). \qquad (4)$$

В работах [4] и [5] рассматривался один из дискретных аналогов задачи случайного заполнения отрезка. В нем длина отрезка x принимает только целые неотрицательные значения (будем в таком случае обозначать длину переменной n вместо x). Случайная величина t так же может принимать только целые значения (таким образом, она распределена равномерно на наборе целых чисел $\{0, \ldots, n-1\}$. Однако, если при разбиении остаются отрезки длины 1, они также исключаются из рассмотрения. В статье [4] были явно вычислены три первых момента случайных величин N_n, а в работе [5] было изучено асимптотическое поведение моментов больших порядков, а также доказана асимптотическая нормальность данной последовательности случайных величин.

Еще один дискретный аналог задачи случайного заполнения отрезка был рассмотрен в работе [3]. Аналогично описанной в начале настоящей работы задаче, длина отрезка x принимает только целые значения. Однако в данном случае вместо интервала $(t, t+1)$ на отрезок размещается интервал $(t, t+l)$ для некоторой заранее заданной натуральной константы l. Случайная величина t теперь является равномерно распределенной на наборе целых чисел $\{1, \ldots, n-l\}$, а из рассмотрения исключались все отрезки, длина которых меньше чем l.

При помощи производящих функций в этой статье было получено следующее асимптотическое поведение математических ожиданий $\mathbf{E}\{N_n\}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{E}\{N_n\}}{ln} = e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\,dx.$$

Изучение данной задачи было продолжено в работе [11]. В ней было дано уточнение полученной в работе [3] асимптотики математических ожиданий $\mathbf{E}\{N_n\}$, а также было доказано аналогичное соотношение для дисперсий $\mathbf{D}\{N_n\}$.

В последнее время задачи о случайном заполнении отрезка вновь привлекают внимание математиков. Они были недавно рассмотрены в ряде статей, в том числе [6–10]. В работах [6, 7] рассматривались дискретные варианты задачи, в то время как [8–10] обращали внимание на непрерывные аналоги.

Данная работа представляет собой продолжение начатого в статьях [3] и [11] изучения дискретного аналога задачи случайного заполнения и ставит своей целью доказать асимптотическую нормальность последовательности определенных в этих работах случайных величин.

§2. Основные результаты

Пусть n, l – два натуральных числа. Будем случайно помещать на отрезок $[0, n]$ интервалы длины l таким образом, чтобы начало и конец интервала были целыми числами. В случае $n < l$ такое невозможно, и процесс считается завершенным. Иначе поместим интервал $(t, t+l)$, где t – случайная величина, равномерно распределенная на множестве $\{0, \ldots, n-l\}$. Он разбивает изначальный отрезок на два: $[0, t]$ и $[t+l, n]$, которые заполняются независимо по аналогичному правилу. Как только процесс завершается, что означает, что все оставшиеся свободными отрезки имеют длину меньше чем l, обозначим через $\xi_{n,l}$ суммарную длину расположенных интервалов.

Более формально задачу можно поставить следующим образом. Зафиксируем некоторое натуральное число $l \geqslant 2$ и рассмотрим последовательность случайных величин $\xi_{n,l}$:

$$\xi_{0,l} = \ldots = \xi_{l-1,l} = 0, \tag{5}$$

$$\xi_{n,l} := l + \xi^*_{\nu_n,l} + \xi^*_{n-\nu_n-l,l} \quad \text{при} \quad n \geqslant 3, \tag{6}$$

где $\xi^*_{\nu_n,l}$ и $\xi^*_{n-\nu_n-l,l}$ – независимые копии случайных величин $\xi_{\nu_n,l}$ и $\xi_{n-\nu_n-l,l}$ соответственно, а ν_n – случайная величина, не зависящая от всех ξ^*_m, равновероятно принимающая значения $0,\dots,n-l$.

В статье [11] был доказан следующий результат:

Теорема 0. *Для описанных выше случайных величин $\xi_{n,l}$ и любого $T > 1$ верны соотношения*

$$\mathbf{E}\{\xi_{n,l}\} = l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l + o(T^{-n}), \qquad (n \to \infty), \tag{7}$$

где константа λ_l имеет вид

$$\lambda_l = e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}dx, \tag{8}$$

и соотношение

$$\mathbf{D}\{\xi_{n,l}\} = c_1(n-l) + o(1). \tag{9}$$

для некоторой вещественной константы c_1.

Данная теорема описывает поведение первых двух моментов последовательности случайных величин $\xi_{n.l}$ при $n \to \infty$. В следующей теореме эти соотношения обобщаются на все центральные моменты случайных величин $\xi_{n,l}$.

Теорема 1. *Для определенной выше последовательности случайных величин для любого натурального k при $n \to \infty$ верно соотношение*

$$\mathbf{E}\left\{(\xi_{n,l} - \mathbf{E}\{\xi_{n,l}\})^k\right\} = n^{\left[\frac{k}{2}\right]}(c_k + o(1)),$$

где $c_k \in \mathbf{R}$, и для четных k константы c_k обладают следующим свойством

$$c_k = c_2^{k/2}(k-1)!!. \tag{10}$$

Теорема 2. *Последовательность случайных величин*

$$\frac{\xi_{n,l} - \mathbf{E}\{\xi_{n,l}\}}{\sqrt{\mathbf{D}\{\xi_{n,l}\}}} \tag{11}$$

сходится к стандартной нормальной случайной величине по распределению.

§3. Вспомогательные результаты

Для доказательства обозначенных выше теорем нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* $a, b \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, *а также* $f_1(n), f_2(n)$ – *две последовательности вещественных чисел, определенные для* $n \in \mathbf{N}$, *такие что при* $n \to \infty$

$$f_1(n) \to 0, \qquad f_2(n) \to 0.$$

Тогда существует такая последовательность $f(n)$, *что при* $n \to \infty$

$$f(n) \to 0,$$

и справедливо равенство

$$\sum_{i=0}^{n-l} i^a (c_1 + f_1(i))(n-l-i)^b (c_2 + f_2(n-l-i)) = (n-l)^{a+b+1}(c + f(n)),$$

где константа c имеет вид

$$c = c_1 c_2 \frac{a!b!}{(a+b+1)!}.$$

Лемма 2. *Пусть* $\alpha \in \mathbf{R}_0^+$ *и* $c \in \mathbf{R}$. *Пусть также есть некоторая последовательность* $f(n)$, *определенная для* $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, *такая что* $f(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда существует некоторая функция* $f^*(n)$, *определенная для* $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, *такая что* $f^*(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$, *и выполняется равенство*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha}(c + f(n)) z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \sum_{i=0}^{\infty} n^{\alpha+1} \left(\frac{c}{\alpha+1} + f^*(n)\right) z^n$$

Лемма 3. *Пусть* $\alpha, c \in \mathbf{R}$. *Пусть также определены последовательности* $f(n)$, v_n *для* $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, *такие что* $f(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$, *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |v_n| < \infty$. *Тогда существует некоторая функция* $f^*(n)$, *определенная для* $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, *такая что* $f^*(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$, *и выполняется равенство*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha}(c + f(n)) z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_i z^n\right) = \sum_{i=0}^{\infty} n^{\alpha+\frac{1}{2}} f^*(n) z^n.$$

Доказательства

Доказательство леммы 1. Для начала покажем, что существует функция $f^*(n)$, такая что

$$c_1c_2\sum_{i=0}^{n-l} i^a(n-l-i)^b = (n-l)^{a+b+1}(c+f^*(n)).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-l} i^a(n-l-i)^b &= \sum_{i=0}^{n-l} i^a \sum_{j=0}^{b} C_b^j (n-l)^{b-j}(-i)^j\\ &= \sum_{j=0}^{b}(-1)^j C_b^j (n-l)^{b-j}\sum_{i=0}^{n-l} i^{a+j}\\ &= \sum_{j=0}^{b}(-1)^j C_b^j (n-l)^{b-j}(n-l)^{a+j+1}\sum_{i=0}^{n-l}\frac{i^{a+j}}{n^{a+j+1}}\\ &= (n-l)^{a+b-1}\sum_{j=0}^{b}(-1)^j C_b^j\sum_{i=0}^{n-l}\frac{i^{a+j}}{(n-l)^{a+j+1}}.\end{aligned}$$

Определим функцию

$$f_j(n) = \sum_{i=0}^{n-l}\frac{i^{a+j}}{(n-l)^{a+j+1}} - \frac{1}{a+j+1}.$$

Заметим, что при $n \to \infty$ верно $f_j(n) \to 0$. Используя эту функцию, написанную выше сумму можно переписать следующим образом

$$\sum_{i=0}^{n-l} i^a(n-l-i)^b = (n-l)^{a+b-1}\sum_{j=0}^{b} C_b^j\left(\frac{(-1)^j}{a+j+1} + (-1)^j f_j(n)\right).$$

Осталось определить функцию

$$f^*(n) = c_1c_2\sum_{j=0}^{b} C_b^j(-1)^j f_j(n)$$

и заметить, что

$$\sum_{j=0}^{b}\frac{(-1)^j C_b^j}{a+j+1} = b!\sum_{j=0}^{b}\frac{(-1)^j}{j!(b-j)!(a+j+1)} = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}.$$

Теперь покажем, что

$$\sum_{i=0}^{n-l} i^a(c_1+f_1(i))(n-l-i)^b(c_2+f_2(n-l-i)) = c_1c_2\sum_{i=0}^{n-l} i^a(n-l-i)^b + o((n-l)^{a+b+1}).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-l} i^a(c_1+f_1(i))(n-l-i)^b(c_2+f_2(n-l-i)) \\ = c_1c_2\sum_{i=0}^{n-l} i^a(n-l-i)^b + c_1\sum_{i=0}^{n-l} i^a(n-l-i)^b f_2(n-l-i) \\ + c_2\sum_{i=0}^{n-l} i^a(n-l-i)^b f_1(i) + \sum_{i=0}^{n-l} i^a(n-l-i)^b f_1(i)f_2(n-l-i).\end{aligned}$$

Мы знаем, что $f_1(n), f_2(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $C^* = \max(\max_{n\in\mathbf{N}}|f_1(n)|, \max_{n\in\mathbf{N}}|f_2(n)|) < \infty$. Таким образом,

$$\left|c_1\sum_{i=0}^{n-l} i^a(n-l-i)^b f_2(n-l-i)\right| \leqslant |c_1|\sum_{i=0}^{n-l} i^a(n-l-i)^b\,|f_2(n-l-i)|,$$

$$\left|c_2\sum_{i=0}^{n-l} i^a(n-l-i)^b f_1(i)\right| \leqslant |c_2|\sum_{i=0}^{n-l} i^a(n-l-i)^b\,|f_1(i)|,$$

$$\left|\sum_{i=0}^{n-l} i^a(n-l-i)^b f_1(i)f_2(n-l-i)\right| \leqslant C^*\sum_{i=0}^{n-l} i^a(n-l-i)^b\,|f_1(i)|.$$

То есть, нам необходимо доказать следующие соотношения:

$$\frac{1}{n^{a+b+1}}\sum_{i=0}^{n-l} i^a(n-l-i)^b\,|f_1(i)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$\frac{1}{n^{a+b+1}}\sum_{i=0}^{n-l} i^a(n-l-i)^b\,|f_2(n-l-i)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Докажем первое. Второе будет аналогично. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $f_1(n) \to 0$, то существует N_0, такое что для всех $n > N_0$ $|f_1(n)| < \varepsilon$.

Для $n > e^l + 1$ распишем нашу сумму следующим образом:

$$\sum_{i=0}^{n-l} i^a (n-l-i)^b \left|f_1(i)\right| = \sum_{i=\ln(n)+1}^{n-l} i^a (n-l-i)^b \left|f_1(i)\right| + \sum_{i=0}^{\ln(n)} i^a (n-l-i)^b \left|f_1(i)\right|.$$

Посмотрим отдельно на первую сумму. При достаточно больших n выполнено неравенство $\ln(n) > N_0$. Следовательно

$$\sum_{i=\ln(n)+1}^{n-l} i^a (n-l-i)^b \left|f_1(i)\right| \leqslant \varepsilon \sum_{i=\ln(n)+1}^{n-l} i^a (n-l-i)^b \leqslant \varepsilon \sum_{i=0}^{n-l} i^a (n-l-i)^b.$$

Мы знаем, что

$$\sum_{i=0}^{n-l} i^a (n-l-i)^b = (n-l)^{a+b+1} \left(c + f^*(n)\right).$$

Отсюда верно неравенство

$$\frac{1}{(n-l)^{a+b+1}} \sum_{i=\ln(n)+1}^{n-l} i^a (n-l-i)^b \left|f_1(i)\right| \leqslant \varepsilon \left(c + f^*(n)\right).$$

Это верно для любого положительного ε при достаточно больших n. Значит

$$\frac{1}{(n-l)^{a+b+1}} \sum_{i=\ln(n)+1}^{n-l} i^a (n-l-i)^b \left|f_1(i)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Теперь рассмотрим вторую сумму. Заметим, что

$$\sum_{i=0}^{\ln(n)} i^a (n-l-i)^b \left|f_1(i)\right| \leqslant C^* \sum_{i=0}^{\ln(n)} i^a (n-l-i)^b.$$

Ранее мы уже получили равенство

$$\sum_{i=0}^{\ln(n)} i^a (n-l-i)^b = (n-l)^{a+b-1} \sum_{j=0}^{b} (-1)^j C_b^j \sum_{i=0}^{\ln(n)} \frac{i^{a+j}}{(n-l)^{a+j+1}}.$$

Также мы знаем, что

$$\sum_{i=0}^{\ln(n)} \frac{i^{a+j}}{(n-l)^{a+j+1}} = \left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^{a+j+1} \left(\frac{1}{a+j+1} + f_j(\ln(n)+l)\right)$$
$$\leqslant \left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^{a+1} \left(\frac{1}{a+j+1} + f_j(\ln(n)+l)\right).$$

Значит при $n \to \infty$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{(n-l)^{a+b+1}} \sum_{i=0}^{\ln(n)} i^a (n-l-i)^b \leqslant \left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^{a+1} (c + f^*(\ln(n)+l)) \to 0,$$

которое завершает доказательство леммы. □

Доказательство леммы 2. Заметим, что

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha (c+f(n)) z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} k^\alpha (c+f(k)) z^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(c \sum_{k=0}^{n} k^\alpha + \sum_{k=0}^{n} k^\alpha f(k)\right) z^n.$$

Определим две функции

$$f_1^*(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}} - \frac{1}{\alpha+1},$$
$$f_2^*(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}} f(k).$$

Таким образом,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha (c+f(n)) z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha+1} \left(\frac{c}{\alpha+1} + c f_1^*(n) + f_2^*(n)\right) z^n.$$

Определим функцию $f^*(n) = c f_1^*(n) + f_2^*(n)$. Тогда мы получили необходимое нам выражение, и осталось показать, что $f^*(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Так как

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}} \to \frac{1}{\alpha+1}, \qquad n \to \infty,$$

получаем, что $cf_1^*(n) \to 0$. Осталось показать, что $f_2^*(n) \to 0$. Для этого достаточно заметить, что

$$|f_2^*(n)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}} \right| |f(k)| \leqslant \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} |f(k)|}{n} \to 0 \qquad (n \to \infty). \qquad \square$$

Доказательство леммы 3. Заметим, что

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha (c + f(n)) z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_i z^n\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} k^\alpha (c + f(k)) v_{n-k} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha+\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n} \frac{k^\alpha}{n^\alpha} \frac{c + f(k)}{n^{\frac{1}{2}}} v_{n-k} z^{\cdot}\end{aligned}$$

Определим функцию

$$f^*(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^\alpha}{n^\alpha} \frac{c + f(k)}{n^{\frac{1}{2}}} v_{n-k}.$$

Таким образом, необходимо доказать, что $f^*(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned}|f^*(n)| &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{k^\alpha}{n^\alpha} \frac{|c + f(k)|}{n^{\frac{1}{2}}} |v_{n-k}| \leqslant \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{n} |c + f(k)| |v_{n-k}| \\ &\leqslant \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} |c| \sum_{k=0}^{n} |v_{n-k}| + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{n} |f(k)| |v_{n-k}|.\end{aligned}$$

Так как $f(n) \to 0$, то существует некоторая константа K, такая что $|f(n)| < K$ для любого n. Тогда

$$\begin{aligned}|f^*(n)| &\leqslant \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} |c| \sum_{k=0}^{n} |v_{n-k}| + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} K \sum_{k=0}^{n} |v_{n-k}| \\ &\leqslant \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} (|c| + |K|) \sum_{k=0}^{\infty} |v_k| \to 0. \qquad \square\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1. Определим вспомогательную последовательность

$$L_{k,n} = \mathbf{E}\{(\xi_n - (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l))^k\}.$$

Тогда для $n \geqslant l$

$$\begin{aligned} L_{k,n} &= \mathbf{E}\{(\xi_n - (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l))^k\} = \mathbf{E}\{\mathbf{E}\{(\xi_n - (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l))^k|i\}\} \\ &= \mathbf{E}\{\mathbf{E}\{((\xi_{i-1} - (l\lambda_l(i-1) + l^2\lambda_l - l) \\ &+ (\xi_{n+1-l-i} - (l\lambda_l(n+1-i-l) + l^2\lambda_l - l)))^k|i\}\} \\ &= \frac{1}{n+1-l}\sum_{i=0}^{n-l}\sum_{j=0}^{k} C_k^j L_{j,i} L_{k-j,n-l-i}, \end{aligned}$$

а для $n < l$

$$L_{k,n} = (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l)^k.$$

Будем доказывать по индукции, что для $k \geqslant 1$

$$L_{k,n} = n^{[\frac{k}{2}]}(c_k + f_k(n)), \tag{12}$$

где

$$f_k(n) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Из теоремы 0 мы знаем это соотношение для $k = 1$ и $k = 2$, причем $c_1 = 0$. Заметим, что соотношение для $L_{k,n}$ можно переписать в виде

$$L_{k,n} = \frac{2}{n+1-l}\sum_{i=0}^{n-l} L_{k,i} + \frac{1}{n+1-l}\sum_{i=0}^{n-l}\sum_{j=1}^{k-1} C_k^j L_{j,i} L_{k-j,n-l-i}.$$

Заметим, что второе слагаемое не зависит от последовательности $L_{k,n}$. Определим последовательность $r_{k,n}$:

$$r_{k,n} = \sum_{i=0}^{n-l}\sum_{j=1}^{k-1} C_k^j L_{j,i} L_{k-j,n-l-i}.$$

Рассмотрим отдельно эту последовательность. По лемме 1 и индукционному предположению,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-l} L_{j,i} L_{k-j,n-l-i} &= c_j c_{k-j} \frac{\left[\frac{j}{2}\right]!\left[\frac{k-j}{2}\right]!}{\left(\left[\frac{j}{2}\right] + \left[\frac{k-j}{2}\right] + 1\right)!}(n-l)^{\left[\frac{j}{2}\right]+\left[\frac{k-j}{2}\right]+1} \\ &+ o\left(n^{\left[\frac{j}{2}\right]+\left[\frac{k-j}{2}\right]+1}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, для $k \geqslant 3$

$$r_{k,n} = \sum_{j=1}^{k-1} C_k^j c_j c_{k-j} \frac{\left[\frac{j}{2}\right]! \left[\frac{k-j}{2}\right]!}{\left(\left[\frac{j}{2}\right] + \left[\frac{k-j}{2}\right] + 1\right)!} (n-l)^{\left[\frac{j}{2}\right] + \left[\frac{k-j}{2}\right] + 1} + o(n^{\left[\frac{j}{2}\right] + \left[\frac{k-j}{2}\right] + 1}).$$

Будем далее считать, что $k \geqslant 4$. Рассмотрим сумму $\left[\frac{j}{2}\right] + \left[\frac{k-j}{2}\right] + 1$. Заметим, что:

Для нечетного k эта сумма всегда равна $\left[\frac{k}{2}\right] + 1$.
Для четного k и нечетного j она равна $\left[\frac{k}{2}\right]$.
Для четного k и четного j она равна $\left[\frac{k}{2}\right] + 1$.

Значит, если k нечетно, то

$$r_{k,n} = (n-l)^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} \sum_{j=1}^{k-1} C_k^j c_j c_{k-j} \frac{\left[\frac{j}{2}\right]! \left[\frac{k-j}{2}\right]!}{\left(\left[\frac{j}{2}\right] + \left[\frac{k-j}{2}\right] + 1\right)!} + o(n^{\left[\frac{k}{2}\right]+1}).$$

Определим константу c_k^* в данном случае как

$$c_k^* = \sum_{j=1}^{k-1} C_k^j c_j c_{k-j} \frac{\left[\frac{j}{2}\right]! \left[\frac{k-j}{2}\right]!}{\left(\left[\frac{j}{2}\right] + \left[\frac{k-j}{2}\right] + 1\right)!}.$$

Если k четно, то

$$r_{k,n} = (n-l)^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} \sum_{\substack{j=2 \\ 2|j}}^{k-2} C_k^j c_j c_{k-j} \frac{\left[\frac{j}{2}\right]! \left[\frac{k-j}{2}\right]!}{\left(\left[\frac{j}{2}\right] + \left[\frac{k-j}{2}\right] + 1\right)!} + o(n^{\left[\frac{k}{2}\right]+1}).$$

Константа c_k^* в таком случае определяется как

$$c_k^* = \sum_{\substack{j=2 \\ 2|j}}^{k-2} C_k^j c_j c_{k-j} \frac{\left[\frac{j}{2}\right]! \left[\frac{k-j}{2}\right]!}{\left(\left[\frac{j}{2}\right] + \left[\frac{k-j}{2}\right] + 1\right)!}.$$

Упростим эту константу. Так как k и j четные, положим $k = 2a$ и $j = 2b$. Тогда

$$c_k = \sum_{b=1}^{a-1} c_{2b} c_{2a-2b} \frac{b!(a-b)!}{(a+1)!}.$$

По индукционному предположению, в силу (10),

$$c_{2b} = c_2^b(2b-1)!! = c_2^b\frac{(2b)!}{2^b b!},$$
$$c_{2(a-b)} = c_2^{a-b}(2a-2b-2)!! = c_2^{a-b}\frac{(2a-2b)!}{2^{a-b}(a-b)!}.$$

Таким образом,

$$c_k^* = \sum_{b=1}^{a-1} C_{2a}^{2b} c_2^b \frac{(2b)!}{2^b b!} c_2^{a-b} \frac{(2a-2b)!}{2^{a-b}(a-b)!} \frac{b!(a-b)!}{(a+1)!} = \frac{c_2^a}{2^a}\sum_{b=1}^{a-1} C_{2a}^{2b}\frac{(2b)!(2a-2b)!}{(a+1)!}$$
$$= \frac{c_2^a(2a)!}{2^a(a+1)!}(a-1) = c_2^a\frac{a-1}{a+1}(2a-1)!!.$$

Вернув на место k, получим

$$c_k^* = \frac{k-2}{k+2}c_2^{\left[\frac{k}{2}\right]}(k-1)!!.$$

Значит, для любого k мы знаем следующее асимптотическое соотношение для $r_{k,n}$:

$$r_{k,n} = (n-l)^{\left[\frac{k}{2}\right]+1}(c_k^* + o(1)).$$

Определим функции $f^*(n)$ следующим образом:

$$f_k^*(n) = \frac{r_{k,n}}{(n-l)^{\left[\frac{k}{2}\right]}} - c_k^*.$$

В таком случае при $n \to \infty$ верно $f_k^*(n) \to 0$, а также

$$r_{k,n} = (n-l)^{\left[\frac{k}{2}\right]+1}(c_k^* + f_k^*(n)).$$

Вернемся к рекуррентному соотношению для $L_{k,n}$. Определим последовательность

$$S_{k,n} = \sum_{i=0}^{n} L_{k,i}.$$

Тогда для этой последовательности верно соотношение

$$S_{k,n} - S_{k,n-1} = \frac{2}{n+1-l}S_{k,n-l} + \frac{1}{n+1-l}r_{k,n},$$
$$(n+1-l)S_{k,n} - (n+1-l)S_{k,n-1} = 2S_{k,n-l} + r_{k,n}.$$

Определим следующие производящие функции:

$$F_k(z) = \sum_{i=l}^{\infty} S_{k,i}z^i,$$

$$h_k(z) = \sum_{i=l}^{\infty} r_{i,k} z^{i-l}.$$

Из определения $r_{i,k}$ следует, что $h_k(z)$ сходится при $|z| < 1$. А так как для любого n верно неравенство

$$|L_{k,n}| \leqslant (n + l\lambda_l n + l^2\lambda_l + l)^k,$$

то ряд $F_k(z)$ также сходится при $|z| < 1$. Тогда

$$F_k'(z) = \sum_{i=l}^{\infty} i S_{k,i} z^{i-1}.$$

Домножив соотношение для $S_{k,n}$ на z^n и сложив по $n \geqslant l$, получим

$$\sum_{n=l}^{\infty}(n+1-l)S_{k,n}z^n - \sum_{n=l}^{\infty}(n+1-l)S_{k,n-1}z^n \\ = 2z^l \sum_{n=l}^{\infty} S_{k,n-l}z^{n-l} + z^l h_k(z),$$

$$z\sum_{n=l}^{\infty} nS_{k,n}z^{n-1} - (l-1)\sum_{n=l}^{\infty} S_{k,n}z^n - z^2\sum_{n=l}^{\infty}(n-1)S_{k,n-1}z^{n-2} \\ + (l-2)z\sum_{n=l}^{\infty} S_{k,n-1}z^{n-1} = 2z^l \sum_{n=0}^{\infty} S_{k,n}z^n + z^l h_k(z),$$

$$zF_k'(z) - (l-1)F_k(z) - z^2F_k'(z) - (l-1)S_{k,l-1}z^l + (l-2)zF_k(z) \\ + (l-2)S_{k,l-1}z^l = 2z^l \sum_{n=0}^{l-1} S_{k,n}z^n + 2z^l F_k(z) + z^l h_k(z),$$

$$(z-z^2)F_k'(z) - \left(2z^l - z(l-2) + l - 1\right) F_k(z) \\ = 2z^l \sum_{n=0}^{l-1} S_{k,n}z^n + S_{k,l-1}z^l + z^l h_k(z).$$

Определим еще одну функцию

$$g_k(z) = 2\sum_{n=0}^{l-1} S_{k,n}z^n + S_{k,l-1}.$$

В таком случае

$$(z-z^2)F_k'(z)-\left(2z^l-z(l-2)+l-1\right)F_k(z)=z^lg_k(z)+z^lh_k(z).$$

Из статьи [11] мы знаем, что в таком случае функция $F_k(z)$ принимает вид

$$F_k(z)=H(z)K_k(z),$$

где

$$H(z)=\frac{cz^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}}{(1-z)^3},$$

а также верно соотношение

$$(z-z^2)H(z)K_k'(z)=z^lg_k(z)+z^lh_k(z).$$

Из последнего равенства следует, что

$$cK_k'(z)=e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2g_k(z)+e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2h_k(z).$$

Таким образом, так же как в статье [11],

$$K_k(z)=\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x)^2g_k(x)dx+\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x)^2h_k(x)dx. \qquad (13)$$

Также заметим, что

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty}L_{k,i}z^i&=\sum_{i=0}^{l}L_{k,i}z^i+\sum_{i=l+1}^{\infty}(S_{k,i}-S_{k,i-1})z^i\\&=\sum_{i=0}^{l}L_{k,i}z^i+\sum_{i=l+1}^{\infty}S_{k,i}z^i-z\sum_{i=l}^{\infty}S_{k,i}z^i\\&=\sum_{i=0}^{l}L_{k,i}(z^i-z^l)+(1-z)F_k(z)\\&=\sum_{i=0}^{l}L_{k,i}(z^i-z^l)+\frac{z^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}}{(1-z)^2}K_k(z).\end{aligned} \qquad (14)$$

Рассмотрим случай $k=3$ отдельно. Заметим, что в этом случае функция $K_3(z)$ конечна в точке $z=1$, а значит, как и в статье [11],

$$L_{3,n}=n(Q_0+o(1)),$$

где константа Q_0 определена следующим равенством:

$$Q_0 = e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} K_3(1).$$

Теперь будем считать, что $k \geqslant 4$. Проинтегрируем по частям второе слагаемое в равенстве (13) несколько раз. Целью данного процесса является отделение важных для асимптотики слагаемых от неважных, а также вынесение в важных слагаемых множителей $e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}$ и $(1-x)$ из-под интеграла с целью его дальнейшего сокращения.

$$\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x)^2 h_k(x)dx = e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2\int\limits_0^z h_k(x)dx$$

$$-\int\limits_0^z\int\limits_0^x h_k(y)dyd\left(e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x)^2\right) = e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2\int\limits_0^z h_k(x)dx$$

$$-\int\limits_0^z\int\limits_0^x h_k(y)dy\left(2\sum_{i=0}^{l-2}x^i e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x)^2 - 2e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x)\right)dx$$

$$= e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2\int\limits_0^z h_k(x)dx$$

$$-\int\limits_0^z\int\limits_0^x h_k(y)dy\left(2(1-x^{l-1})e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x) - 2e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x)\right)dx$$

$$= e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2\int\limits_0^z h_k(x)dx + 2\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x)x^{l-1}\int\limits_0^x h_k(y)dydx$$

$$= e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2\int\limits_0^z h_k(x)dx + 2e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)\int\limits_0^z x^{l-1}\int\limits_0^x h_k(y)dydx$$

$$-2\int\limits_0^z\int\limits_0^x u^{l-1}\int\limits_0^u h_k(y)dydud\left(e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x)\right)$$

$$= e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2\int\limits_0^z h_k(x)dx + 2e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)\int\limits_0^z x^{l-1}\int\limits_0^x h_k(y)dydx$$

$$-2\int\limits_0^z\int\limits_0^x u^{l-1}\int\limits_0^u h_k(y)dydu\left(2\sum_{i=1}^{l-1}x^i e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x) - e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\right)dx$$

$$= e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2\int\limits_0^z h_k(x)dx + 2e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)\int\limits_0^z x^{l-1}\int\limits_0^x h_k(y)dydx$$

$$-2\int\limits_0^z\int\limits_0^x u^{l-1}\int\limits_0^u h_k(y)dydu\left((1-2x^{l-1})e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\right)dx$$

$$= e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2\int\limits_0^z h_k(x)dx + 2e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)\int\limits_0^z x^{l-1}\int\limits_0^x h_k(y)dydx$$

$$-2\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\int\limits_0^x u^{l-1}\int\limits_0^u h_k(y)dydudx$$

$$+4\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}x^{l-1}\int\limits_0^x u^{l-1}\int\limits_0^u h_k(y)dydudx$$

$$= e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2\int\limits_0^z h_k(x)dx + 2e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)\int\limits_0^z x^{l-1}\int\limits_0^x h_k(y)dydx$$

$$-2e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int\limits_0^z\int\limits_0^x u^{l-1}\int\limits_0^u h_k(y)dydudx$$

$$+4\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\sum_{i=0}^{l-2}x^i\int\limits_0^x\int\limits_0^t u^{l-1}\int\limits_0^u h_k(y)dydudtdx$$

$$+4e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int\limits_0^z x^{l-1}\int\limits_0^x u^{l-1}\int\limits_0^u h_k(y)dydudx$$

$$-8\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\sum_{i=0}^{l-2}x^i\int\limits_0^x t^{l-1}\int\limits_0^t u^{l-1}\int\limits_0^u h_k(y)dydudtdx$$

$$=e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2\int\limits_0^z h_k(x)dx+2e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)\int\limits_0^z x^{l-1}\int\limits_0^x h_k(y)dydx$$

$$-2e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int\limits_0^z\int\limits_0^x u^{l-1}\int\limits_0^u h_k(y)dydudx$$

$$+4e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int\limits_0^z x^{l-1}\int\limits_0^x u^{l-1}\int\limits_0^u h_k(y)dydudx$$

$$+4\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\sum_{i=0}^{l-2}x^i\int\limits_0^x\int\limits_0^t u^{l-1}\int\limits_0^u h_k(y)dydudtdx$$

$$-8\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\sum_{i=0}^{l-2}x^i\int\limits_0^x t^{l-1}\int\limits_0^t u^{l-1}\int\limits_0^u h_k(y)dydudtdx.$$

Подставив полученное выше выражение для $K_k(z)$ в равенство (14), получим

$$\sum_{i=l}^{\infty} L_{k,i} z^i = \sum_{i=0}^{l} L_{k,i}(z^i - z^l) + \frac{z^{l-1} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1} \frac{z^i}{i}}}{(1-z)^2} \int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1} \frac{x^i}{i}} (1-x)^2 g_k(x)dx$$

$$+ z^{l-1} \int\limits_0^z h_k(x)dx + 2\frac{z^{l-1} \int\limits_0^z x^{l-1} \int\limits_0^x h_k(y)dydx}{(1-z)}$$

$$- 2\frac{z^{l-1} \int\limits_0^z \int\limits_0^x u^{l-1} \int\limits_0^u h_k(y)dydudx}{(1-z)^2}$$

$$+ 4\frac{z^{l-1} \int\limits_0^z x^{l-1} \int\limits_0^x u^{l-1} \int\limits_0^u h_k(y)dydudx}{(1-z)^2}$$

$$+ 4\frac{z^{l-1} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1} \frac{z^i}{i}} \int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1} \frac{x^i}{i}} \sum\limits_{i=0}^{l-2} x^i \int\limits_0^x \int\limits_0^t u^{l-1} \int\limits_0^u h_k(y)dydudtdx}{(1-z)^2}$$

$$- 8\frac{z^{l-1} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1} \frac{z^i}{i}} \int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1} \frac{x^i}{i}} \sum\limits_{i=0}^{l-2} x^i \int\limits_0^x t^{l-1} \int\limits_0^t u^{l-1} \int\limits_0^u h_k(y)dydudtdx}{(1-z)^2}$$

Будем рассматривать каждое слагаемое отдельно. Заметим, что первое слагаемое влияет на асимптотику $L_{k,i}$. Второе слагаемое, аналогично случаю $k = 3$, представляется в виде

$$\frac{z^{l-1} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1} \frac{z^i}{i}}}{(1-z)^2} \int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1} \frac{x^i}{i}} (1-x)^2 g_k(x)dx = \sum_{n=l}^{\infty} n(Q_1 + o(1))z^n,$$

где

$$Q_1 = e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1} \frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1} \frac{x^i}{i}} (1-x)^2 g_k(x)dx.$$

Заметим, что исходя из определения функции $h_k(z)$,

$$\int\limits_0^z h_k(x)dx = \int\limits_0^z \sum_{n=l}^{\infty} r_{n,k} x^{n-l} dx = \sum_{n=l}^{\infty} \frac{r_{n,k}}{n-l+1} z^{n-l+1}$$
$$= \sum_{i=l}^{\infty} \frac{n-l}{n-l+1} (n-l)^{\left[\frac{k}{2}\right]} (c_k^* + f_k^*(n)) z^{n-l+1}.$$

Значит, третье слагаемое разлагается в ряд следующим образом

$$z^{l-1} \int\limits_0^z h_k(x)dx = \sum_{n=l}^{\infty} (n-l)^{\left[\frac{k}{2}\right]} (c_k^* + f_{k,0}^{**}(n-l)) z^n$$
$$= z^l \sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]} (c_k^* + f_{k,0}^{**}(n)) z^n,$$

а четвертое представимо в виде

$$2\frac{z^{l-1} \int_0^z x^{l-1} \int_0^x h_k(y)dydx}{(1-z)}$$
$$= 2\left(\sum_{n=l}^{\infty} \frac{n-l}{n+1} (n-l)^{\left[\frac{k}{2}\right]-1} (c_k^* + f_k^*(n)) z^{n+l}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)$$
$$= \left(\sum_{n=l}^{\infty} (n-l)^{\left[\frac{k}{2}\right]-1} \left(2c_k^* - 2\frac{l-1}{n+1} c_k^* + 2\frac{n-l}{n+1} f_k^*(n)\right) z^{n+l}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)$$
$$= z^{2l} \left(\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-1} \left(2c_k^* - 2\frac{l-1}{n+l+1} c_k^* + 2\frac{n}{n+l+1} f_k^*(n+l)\right) z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right).$$

Заметим, что при $n \to \infty$ выполнено

$$2f_{k,1}^{**}(n) := -2\frac{l-1}{n+l+1} c_k^* + 2\frac{n}{n+l+1} f_k^*(n+l) \to 0.$$

Значит, по лемме 2 существует последовательность $f_{k,1}^{***}(n)$, такая что $f_{k,1}^{***}(n) \to 0$ при $n \to \infty$, и при этом

$$2\frac{z^{l-1} \int_0^z x^{l-1} \int_0^x h_k(y)dydx}{(1-z)} = z^{2l} \sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]} \left(\frac{2c_k^*}{\left[\frac{k}{2}\right]} + f_{k,1}^{***}(n)\right).$$

Также мы получили соотношение

$$\int\limits_0^z x^{l-1}\int\limits_0^x h_k(y)dydx=\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-1}\left(c_k^*+f_{k,1}^{**}(n)\right)z^{n+l+1}.$$

Рассмотрим следующие два слагаемых в сумме. Пятое слагаемое можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&2\frac{z^{l-1}\int\limits_0^z\int\limits_0^x u^{l-1}\int\limits_0^u h_k(y)dydudx}{(1-z)^2}\\
&=2z^{l-1}\left(\int\limits_0^z\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-1}\left(c_k^*+f_{k,1}^{**}(n)\right)x^{n+l+1}dx\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2\\
&=2z^{l-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+l+2}n^{\left[\frac{k}{2}\right]-2}\left(c_k^*+f_{k,1}^{**}(n)\right)z^{n+l+2}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2\\
&=2z^{2l+1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-2}\left(c_k^*-\frac{l+2}{n+l+2}c_k^*+\frac{n}{n+l+2}f_{k,1}^{**}(n)\right)z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2.
\end{aligned}$$

Определим функцию

$$f_{k,2}^{**}(n)=-\frac{l+2}{n+l+2}c_k^*+\frac{n}{n+l+2}f_{k,1}^{**}(n).$$

Заметим, что $f_{k,2}^{**}(n)\to 0$ при $n\to\infty$. Значит, применив дважды лемму 2, получим, что существует некоторая функция $f_{k,2}^{***}(n)$, такая что $f_{k,2}^{***}(n)\to 0$ при $n\to\infty$, а также

$$\begin{aligned}
&2\frac{z^{l-1}\int\limits_0^z\int\limits_0^x u^{l-1}\int\limits_0^u h_k(y)dydudx}{(1-z)^2}\\
&\qquad=2z^{2l+1}\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]}\left(\frac{c_k^*}{\left(\left[\frac{k}{2}\right]-1\right)\left[\frac{k}{2}\right]}+f_{k,2}^{***}(n)\right)z^n.
\end{aligned}$$

Мы знаем, что

$$\int\limits_0^z\int\limits_0^x u^{l-1}\int\limits_0^u h_k(y)dydudx=z^{l+2}\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-2}\left(c_k^*+f_{k,2}^{**}(n)\right)z^n.$$

Шестое слагаемое можно записать в виде

$$4\frac{z^{l-1}\int\limits_0^z x^{l-1}\int\limits_0^x u^{l-1}\int\limits_0^u h_k(y)dydudx}{(1-z)^2}$$

$$= 4z^{l-1}\left(\int\limits_0^z \sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-1}\left(c_k^* + f_{k,1}^{**}(n)\right)x^{n+2l}dx\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2$$

$$= 4z^{l-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+2l+1}n^{\left[\frac{k}{2}\right]-2}\left(c_k^* + f_{k,1}^{**}(n)\right)z^{n+2l+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2$$

$$= 4z^{3l}\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-2}\left(c_k^* - \frac{2l+1}{n+2l+1}c_k^* + \frac{n}{n+2l+1}f_{k,1}^{**}(n)\right)z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2.$$

Определим функцию

$$f_{k,3}^{**}(n) = -\frac{2l+1}{n+2l+1}c_k^* + \frac{n}{n+2l+1}f_{k,1}^{**}(n).$$

Заметим, что $f_{k,3}^{**}(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, применив дважды лемму 2, получим, что существует некоторая функция $f_{k,3}^{***}(n)$, такая что $f_{k,3}^{***}(n) \to 0$ при $n \to \infty$, а также

$$4\frac{z^{l-1}\int\limits_0^z x^{l-1}\int\limits_0^x u^{l-1}\int\limits_0^u h_k(y)dydudx}{(1-z)^2}$$

$$= 4z^{3l}\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]}\left(\frac{c_k^*}{\left(\left[\frac{k}{2}\right]-1\right)\left[\frac{k}{2}\right]} + f_{k,3}^{***}(n)\right)z^n,$$

и мы знаем, что

$$\int\limits_0^z x^{l-1}\int\limits_0^x u^{l-1}\int\limits_0^u h_k(y)dydudx = z^{2l+1}\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-2}\left(c_k^* + f_{k,3}^{**}(n)\right)z^n.$$

Осталось разобраться с последними двумя слагаемыми. В силу леммы 3 существует такая последовательность $f_{k,4}^{**}(n)$, что $f_{k,4}^{**}(n) \to 0$ при $n \to \infty$, и

$$e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\sum_{i=0}^{l-2} z^i \int\limits_0^z\int\limits_0^t u^{l-1}\int\limits_0^u h_k(y)dydudt = z^{l+2}\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-\frac{3}{2}}f_{k,4}^{**}(n)z^n.$$

Проинтегрировав обе части, получим

$$\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} \sum_{i=0}^{l-2} x^i \int_0^x\int_0^t u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudtdx = z^{l+3}\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-\frac{5}{2}}\frac{nf^{**}_{k,4}(n)}{n+l+3}z^n.$$

Еще раз применив лемму 3, получим, что для некоторой функции $f^{**}_{k,5}(n)$, такой что $f^{**}_{k,5}(n)\to 0$ при $n\to\infty$, выполнено соотношение

$$z^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} \sum_{i=0}^{l-2} x^i \int_0^x\int_0^t u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudtdx$$
$$= z^{2l+2}\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-2} f^{**}_{k,5}(n).$$

Теперь, применив дважды лемму 2, получим

$$4\frac{z^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} \sum\limits_{i=0}^{l-2} x^i \int\limits_0^x\int\limits_0^t u^{l-1}\int\limits_0^u h_k(y)dydudtdx}{(1-z)^2}$$
$$= 4z^{2l+2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-2}(0+f^{**}_{k,5}(n))\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)$$
$$= 4z^{2l+2}\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]}(0+o(1)).$$

Проделав аналогичные действия с последним слагаемым, получим

$$8\frac{z^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} \sum\limits_{i=0}^{l-2} x^i \int\limits_0^x t^{l-1}\int\limits_0^t u^{l-1}\int\limits_0^u h_k(y)dydudtdx}{(1-z)^2}$$
$$= 8z^{3l+1}\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]}(0+o(1)).$$

Итак, получаем, что

$$\begin{aligned}\sum_{n=l}^{\infty} L_{k,n} z^n &= \sum_{n=0}^{l} L_{k,n}(z^n - z^l) + \sum_{n=l}^{\infty} n(Q_1 + o(1)) z^n \\ &+ z^l \sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]}(c_k^* + o(1)) z^n + z^{2l} \sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]} \left(\frac{2c_k^*}{\left[\frac{k}{2}\right]} + o(1) \right) \\ &- 2z^{2l+1} \sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]} \left(\frac{c_k^*}{\left(\left[\frac{k}{2}\right] - 1\right)\left[\frac{k}{2}\right]} + o(1) \right) z^n \\ &+ 4z^{3l} \sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]} \left(\frac{c_k^*}{\left(\left[\frac{k}{2}\right] - 1\right)\left[\frac{k}{2}\right]} + o(1) \right) z^n \\ &+ 4z^{2l+2} \sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]}(0 + o(1)) - 8z^{3l+1} \sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]}(0 + o(1)).\end{aligned}$$

Значит, мы получили следующее представление для последовательности $L_{k,n}$:

$$\begin{aligned}L_{k,n} &= n(Q_1 + o(1)) + n^{\left[\frac{k}{2}\right]} \left(c_k^* + 2\frac{c_k^*}{\left[\frac{k}{2}\right]} - 2\frac{c_k^*}{\left[\frac{k}{2}\right]\left(\left[\frac{k}{2}\right] - 1\right)} + 4\frac{c_k^*}{\left[\frac{k}{2}\right]\left(\left[\frac{k}{2}\right] - 1\right)} + o(1) \right) \\ &= n(Q_1 + o(1)) + n^{\left[\frac{k}{2}\right]} \left(\frac{c_k^*\left[\frac{k}{2}\right]\left(\left[\frac{k}{2}\right] - 1\right) + 2c_k^*\left(\left[\frac{k}{2}\right] - 1\right) + 2c_k^*}{\left[\frac{k}{2}\right]\left(\left[\frac{k}{2}\right] - 1\right)} + o(1) \right) \\ &= n(Q_1 + o(1)) + n^{\left[\frac{k}{2}\right]} \left(c_k^* \frac{\left[\frac{k}{2}\right] + 1}{\left[\frac{k}{2}\right] - 1} + o(1) \right).\end{aligned}$$

Так как $k \geqslant 4$, то $\left[\frac{k}{2}\right] \geqslant 2$. Следовательно,

$$L_{k,n} = n^{\left[\frac{k}{2}\right]} \left(c_k^* \frac{\left[\frac{k}{2}\right] + 1}{\left[\frac{k}{2}\right] - 1} + o(1) \right)$$

Определяя константу $c_k = c_k^* \frac{\left[\frac{k}{2}\right]+1}{\left[\frac{k}{2}\right]-1}$, получаем необходимое соотношение (12). В случае четного k мы знаем, что $c_k^* = \frac{k-2}{k+2} c_2^{\frac{k}{2}} (k-1)!!$. Значит,

$$c_k = \frac{\left[\frac{k}{2}\right] + 1}{\left[\frac{k}{2}\right] - 1} \frac{k - 2}{k + 2} c_2^{\frac{k}{2}} (k-1)!! = c_2^{\frac{k}{2}} (k-1)!!,$$

и соотношение (10) также доказано. Осталось оценить разницу между $L_{k,n}$ и $\mathbf{E}\left\{(\xi_n - \mathbf{E}\{\xi_n\})^k\right\}$. Заметим, что

$$\mathbf{E}\Big\{(\xi_n - \mathbf{E}\{\xi_n\})^k\Big\} = \mathbf{E}\Big\{\Big(\left(\xi_n - (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l)\right) \\ - \Big(\mathbf{E}\{\xi_n\} - (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l)\Big)\Big)^k\Big\} = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{n-k}C_n^k L_{i,n} L_{0,n}^{n-k}$$

Согласно теореме 0, имеем $L_{0,n} = o(e^{-n})$. Также мы теперь знаем поведение всех $L_{i,n}$. Таким образом,

$$\mathbf{E}\left\{(\xi_n - \mathbf{E}\{\xi_n\})^k\right\} = L_{k,n} + o\left(e^{-n}\right) = n^{\left[\frac{k}{2}\right]}(c_k + o(1)),$$

что и необходимо было доказать. □

Доказательство теоремы 2. Данная теорема является прямым следствием теоремы 1 и следующей теоремы, доказательство которой можно найти в работе [12], на с. 390:

Теорема о слабой сходимости. *Пусть распределение случайной величины X однозначно определяется ее моментами и случайные величины X_n имеют моменты любого порядка. Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\{X_n^k\} = \mathbf{E}\{X^k\}$$

для любого натурального k. Тогда последовательность случайных величин X_n сходится по распределению к случайной величине X.

Для $k = 0$ и 1 очевидно, что

$$\mathbf{E}\left\{\frac{\xi_{n,l} - \mathbf{E}\left\{\xi_{n,l}\right\}}{\sqrt{\mathbf{D}\left\{\xi_{n,l}\right\}}}\right\} = 0, \quad \mathbf{E}\left\{\left(\frac{\xi_{n,l} - \mathbf{E}\left\{\xi_{n,l}\right\}}{\sqrt{\mathbf{D}\left\{\xi_{n,l}\right\}}}\right)^2\right\} = 1.$$

Для более старших моментов, согласно теореме 1, если k – четно, то при $n \to \infty$

$$\mathbf{E}\left\{\left(\frac{\xi_{n,l} - \mathbf{E}\left\{\xi_{n,l}\right\}}{\sqrt{\mathbf{D}\left\{\xi_{n,l}\right\}}}\right)^k\right\} = \frac{\mathbf{E}\left\{\left(\xi_{n,l} - \mathbf{E}\left\{\xi_{n,l}\right\}\right)^k\right\}}{\left(\mathbf{D}\left\{\xi_{n,l}\right\}\right)^{k/2}} \\ = \frac{n^{k/2}(c_2^{k/2}(k-1)!! + o(1))}{n^{k/2}(c_2^{k/2} + o(1))} \to (k-1)!!.$$

А если k – нечетное, то при $n \to \infty$

$$\mathbf{E}\left\{\left(\frac{\xi_{n,l} - \mathbf{E}\{\xi_{n,l}\}}{\sqrt{\mathbf{D}\{\xi_{n,l}\}}}\right)^k\right\} = \frac{\mathbf{E}\left\{(\xi_{n,l} - \mathbf{E}\{\xi_{n,l}\})^k\right\}}{(\mathbf{D}\{\xi_{n,l}\})^{k/2}}$$

$$= \frac{n^{(k-1)/2}(c_k + o(1))}{n^{k/2}(c_2^{k/2} + o(1))} \to 0.$$

Таким образом, так как стандартное нормальное распределение однозначно определяется своими моментами, теорема о слабой сходимости влечет за собой теорему 2. □

Список литературы

1. A. Rényi, *On a one-dimensional problem concerning space-filling.* — Publ. Math. Inst. Hungarian Acad. Sci., **3** (1958), 109–127.
2. A. Dvoretzky, H. Robbins, *On the "parking" problem.* — Publ. Math. Inst. Hungarian Acad. Sci., **9** (1964), 209–226.
3. R. G. Pinsky, *Problems from the Discrete to the Continuous.* — Springer International Publishing Switzerland, **3** (2014), 21–34.
4. С. М. Ананьевский, Н. А. Крюков, *Задача об эгоистичной парковке.* — Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия **5 (63)**, No. 4 (2018), 549–555. `https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.402`
5. С. М. Ананьевский, Н. А. Крюков, *Об асимптотической нормальности в одном обобщении задачи Реньи.* — Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия **6 (64)**, No. 3 (2019), 353–362. `https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.301`
6. M. P. Clay, N. J. Simanyi, *Rényi's parking problem revisited.* — 29 Dec. 2014. `ArXiv:1406.1781v1 [math.PR]`.
7. L. Geri, *The Page-Rényi parking process.* — 28 Nov. 2014. `ArXiv:1411.8002v1[math.PR]`.
8. С. М. Ананьевский, *Некоторые обобщения задачи о "парковке".* — Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия **3 (61)**, No. 4 (2016), 525–532. `https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.401`
9. С. М. Ананьевский, *Задача парковки для отрезков различной длины.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **228** (1996), 16–23.
10. А. Б. Ильєнко, В. В. Фатенко, *Узагальнення задачі Реньї про паркування.* — Наукові вісті НТУУ "КПІ": міжнародний науково-технічний журнал, No. 4(114) (2017), 54–60.
11. Н. А. Крюков, *Дискретизация задачи о парковке.* — Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия **7(65)**, No. 4, В печати.
12. P. Billingsley, *Probability and Measure.* — Third Edition, A Wiley–Interscience Publication, New York: Wiley, 1985.

Ananjevskii S. M., Kryukov N. A. Asymptotic normality in a discrete analog of the parking problem.

In this article, the authors study the behavior of the central moments of higher orders in a discrete version of the "parking problem". For these moments, asymptotic behavior is obtained with an unlimited increase in the length of the filled segment. This made it possible to prove the asymptotic normality of the total length of the allocated intervals of length l on a segment of length n for any fixed $l \geqslant 2$ with an unlimited increase in$n$.

С-Петербургский государственный университет
E-mail: ananjevskii@mail.ru

Поступило 29 октября 2020 г.

University of Lausanne
E-mail: kryuknik@gmail.com