Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 494, 2020 г.

Н. В. Харук

РЕГУЛЯРИЗАЦИИ СМЕШАННОГО ТИПА И НЕЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ СИНГУЛЯРНОСТИ

§1. Введение

Теория перенормировок [1] является стандартным инструментом для устранения расходящихся величин в квантовой теории поля. Несмотря на то, что эта теория имеет широкий спектр применений и продолжает развиваться, она содержит несколько открытых вопросов, таких как наличие нелогарифмических сингулярностей и инвариантность конечных величин относительно процесса регуляризации.

Одними из самых распространенных типов регуляризации являются размерная [2, 3] и регуляризация с импульсом обрезания [4, 5]. Первая из них основана на изменении размерности пространства. Хотя такой подход сохраняет калибровочную инвариантность, его физический смысл не до конца определен. В этом смысле регуляризация с импульсом обрезания, которая подразумевает обрезание интеграла на нижнем или верхнем пределе интегрирования, противоположна.

Данная работа посвящена модификациям и смешиваниям упомянутых выше схем регуляризации. В качестве тестовой теории мы используем модель ϕ^4, так как она проста для вычислений. Более того, она позволяет получить расходимости, характерные для теории Янга–Миллса.

Ключевые слова: регуляризация с импульсом обрезания, размерная регуляризация, функция Грина, тепловое ядро, нелогарифмическая расходимость, регуляризация смешанного типа.

Автор благодарит А. В. Иванова за обсуждение и ценные комментарии. Работа выполнена за счет гранта в форме субсидий из федерального бюджета на создание и развитие международных математических центров мирового уровня, соглашение между МОН и ПОМИ РАН № 075-15-2019-1620 от 8 ноября 2019 г.

Одна из задач данной статьи – это показать процесс регуляризации на примере асимптотического разложения теплового ядра. Мы рассматриваем модификацию регуляризации с импульсом обрезания, основанную на сдвиге функции Грина. Затем изучается размерная регуляризация с целью упростить петлевые расчеты и найти нелогарифмические расходимости. Мы показываем, что обе задачи могут быть достигнуты путем добавления функций специального вида к ядру функции Грина.

Работа построена следующим образом. В Разделе 2 мы приводим краткое описание разложения теплового ядра и схем регуляризаций, а также обсуждаем примеры сдвигов функции Грина. Раздел 3 содержит обсуждение нелогарифмических сингулярностей. Некоторые дополнительные открытые вопросы и краткие комментарии приведены в Разделе 4.

§2. Функция Грина и ее регуляризации

Определения. Основным объектом исследования данной работы является функция Грина для оператора Лапласа. Она широко используется в различных областях, и, в частности, является центральным объектом в диаграммной технике Фейнмана [6] и петлевом разложении. Мы рассматриваем скалярную ϕ^4-модель, для которой оператор Лапласа имеет следующий вид

$$N(x) = -\partial_\mu \partial^\mu - v(x), \tag{1}$$

где $v(x)$ – гладкий скалярный потенциал.

Для работы с функцией Грина такого оператора мы используем метод теплового ядра [7], согласно которому

$$G(x,y) = \int_0^{+\infty} d\tau \left[\frac{e^{-r^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{d/2}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \tau^k a_k(x,y) \right) \right], \tag{2}$$

где $a_k(x,y)$ – коэффициенты Сили–деВитта и $r = |x-y|$.

Отметим, что нас интересуют инфракрасные (ИК) расходимости в координатном представлении, что приводит к рассмотрению области $x \sim y$. При таких условиях, асимптотическое разложение функции

Грина в четырехмерном пространстве имеет вид (см. [8, 9])

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi^2 r^2} - \frac{\ln(r\mu)^2}{16\pi^2} a_1(x,y) + \frac{r^2 \ln(r\mu)^2}{64\pi^2} a_2(x,y) + PS(x,y) + o(r^3), \tag{3}$$

где

$$a_1(x,y) = v(y) + \frac{1}{2}(x-y)^\mu \partial_\mu v(y) + \frac{1}{6}(x-y)^{\mu\nu} \partial_{\mu\nu} v(y) + o(r^2), \tag{4}$$

$$a_2(x,y) = \frac{1}{6}\partial_{\mu\mu} v(y) + \frac{1}{2} v^2(y) + o(1), \tag{5}$$

и $PS(x,y)$ – нелокальная регулярная часть [10]. Мы ввели вспомогательный размерный параметр μ, который не влияет на вычисления, чтобы сохранить безразмерность аргумента $\ln(\,\cdot\,)$.

Регуляризация с импульсом обрезания. Введем регуляризацию с импульсом обрезания, как это было предложено в [11]. Она получается с помощью следующей замены в показателе экспоненты в (2)

$$r \to r_\Lambda = \begin{cases} r & , \quad 1/\Lambda \leqslant r; \\ 1/\Lambda & , \quad 0 \leqslant r < 1/\Lambda. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь Λ – размерный параметр. Тогда, используя характеристическую функцию χ, мы получаем следующее разложение

$$G^\Lambda(x,y) = G(x,y)\big|_{r\Lambda=1} \chi_{(r\Lambda<1)} + G(x,y)\chi_{(r\Lambda\geqslant 1)}, \tag{7}$$

где коэффициенты Сили–деВитта не изменяются.

Заметим, что функция Грина может быть изменена следующим образом

$$G^\Lambda(x,y) \to G^\Lambda(x,y) + f^\Lambda(x,y) \;:\; N(x) f^\Lambda(x,y) \underset{\Lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{8}$$

где $N(x)$ – оператор Лапласа (1).

В частности, это означает, что мы можем изменить первый член в формуле (7), поскольку функция $f^\Lambda(x,y) = \Lambda^2 \chi_{(r\Lambda<1)}$ удовлетворяет последнему условию из (8). Например, мы можем опустить первое слагаемое полностью, так как верно равенство

$$G(x,y)\big|_{r\Lambda=1} = \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}(1+o(1)), \quad r\Lambda < 1, \quad \Lambda \to +\infty. \tag{9}$$

Стоит отметить, что в зависимости от рассматриваемой модели, можно использовать различные условия. В скалярной теории удобно положить первое слагаемое в формуле (7) равным нулю, тогда как в теории Янга–Миллса, которая содержит дифференциальный оператор в вершинах, удобнее сохранять непрерывность и использовать другое условие (см. [11]).

Размерная регуляризация. Рассмотрим функцию Грина (2) в пространстве с нецелой размерностью $d = 4 - 2\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Легко проверить, что тогда мы имеем следующие изменения в (3).

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi^2 r^2} &\to \frac{r^{2\varepsilon-2}\mu^{2\varepsilon}\Gamma(1-\varepsilon)}{4\pi^{2-\varepsilon}};\\
-\frac{\ln(r\mu)^2}{16\pi^2} &\to \frac{1}{(4\pi)^{2-\varepsilon}\varepsilon} + \frac{(r\mu)^{2\varepsilon}\Gamma(-\varepsilon)}{4^2\pi^{2-\varepsilon}} - \frac{(r\mu)^2}{4(4\pi)^{2-\varepsilon}(\varepsilon-1)} + \ldots;\\
\frac{r^2\ln(r\mu)^2}{64\pi^2} &\to \frac{\mu^{2\varepsilon}r^{2\varepsilon+2}\Gamma(-1-\varepsilon)}{4^3\pi^{2-\varepsilon}} - \frac{r^2}{4^{3-\varepsilon}\pi^{2-\varepsilon}\varepsilon} + \frac{\mu^{-2}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}(\varepsilon+1)} + \ldots,
\end{aligned}$$

где μ – вспомогательный размерный параметр и $\Gamma(x)$ – Гамма-функция. Заметим, что в этом случае функция Грина может быть изменена следующим образом

$$G^\varepsilon(x,y) \to G^\varepsilon(x,y) + f_\varepsilon(x,y) \;:\; N(x)f_\varepsilon(x,y) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{10}$$

Выбирая $f_\varepsilon(x,y) = \varepsilon r^{2\varepsilon-2}$, что удовлетворяет условию (10), мы можем получить функцию Грина в виде

$$\begin{aligned}
G^\varepsilon(x,y) = \frac{1}{4\pi^2 r^{2-2\varepsilon}} - \frac{\ln(r\mu)^2}{16\pi^2}a_1(x,y) + \frac{r^2\ln(r\mu)^2}{64\pi^2}a_2(x,y)\\
+ PS(x,y) + o(r^3),
\end{aligned} \tag{11}$$

где только первое слагаемое отличается от (3).

Отметим несколько важных моментов. С одной стороны, деформация функции Грина, описанная выше, значительно упрощает петлевые вычисления, так как нам не придется работать с громоздкими рядами по степеням ε. Однако с другой стороны, мы можем потерять важные свойства, такие как калибровочная инвариантность в теории Янга–Миллса, которую потом придется дополнительно восстанавливать.

Также необходимо сделать еще одно замечание. В случае размерной регуляризации мы должны изменять размерность не только функции Грина, но и полей, и меры интегрирования. На самом деле мы может избежать таких модификаций, определив новую размерную регуляризацию путем деформации только функции Грина, а остальные объекты оставить без изменений. В отличие от стандартного подхода, такой случай имеет ясный физический смысл, так как размерность $d = 4$ сохраняется.

§3. Нелогарифмические расходимости

Рассмотрим трех-петлевую диаграмму для модели ϕ^4. Она имеет следующий вид

$$\int d^4x \int d^4y \left[G^4(x,y) - G^4(x,y)\big|_{v=0}\right]. \tag{12}$$

Это показательный пример, так как он дает расходимости, характерные для двух-петлевых вкладов в эффективное действие Янга–Миллса (см. [12]). Для ее подсчета нам необходимо применить регуляризацию и использовать разложение функции Грина (3), где коэффициенты Сили–деВитта $a_j(x,y)$ могут быть представлены рядами Тейлора (4)–(5). Далее мы делаем сдвиг $x - y \to x$, так что расходящиеся части факторизуются в виде $I \cdot J$, где I – сингулярный член, независящий от v, и J – конечный функционал от v.

Рассмотрим вклады I, которые соответствуют расходимостям. Напомним, что мы рассматриваем ИК сингулярности, поэтому после перехода в полярные координаты будем анализировать только окрестность нуля, например, шар с центром в начале координат. В Таблице 1 мы приводим типичные расходимости для регуляризации с импульсом обрезания (7), где первое слагаемое положено равным нулю, и для размерной регуляризации (11).

Регуляризация с импульсом обрезания		Размерная регуляризация	
интеграл	расходимости	интеграл	расходимости
$\int_{1/\Lambda}^1 dr\, r^{-3}$	$O(\Lambda^2)$	$\int_0^1 dr\, r^{-3+\alpha\varepsilon}$	$\int_0^\infty dr\, e^{(2-\alpha\varepsilon)r} \underset{\alpha\varepsilon\leqslant 2}{=} \infty$
$\int_{1/\Lambda}^1 dr\, r^{-3}\ln(r)$	$O(\Lambda^2 L)$	$\int_0^1 dr\, r^{-3+\alpha\varepsilon}\ln(r)$	$\int_0^\infty dr\, e^{(2-\alpha\varepsilon)r}\, r \underset{\alpha\varepsilon\leqslant 2}{=} \infty$
$\int_{1/\Lambda}^1 dr\, r^{-1}\ln^n(r)$	$O(L^{n+1})$	$\int_0^1 dr\, r^{-1+\beta\varepsilon}\ln^n(r)$	$O(\varepsilon^{-n-1})$

Таблица 1. Типичные интегралы и их расходимости для (12), полученные с помощью регуляризации с импульсом обрезания и размерной регуляризации, где $L = \ln(\Lambda/\mu)$, $\mu = 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ и $n = 0, 1, 2$.

Из таблицы видно, что при размерной регуляризации возникают бесконечные вклады. Некоторые статьи предлагают следующее решение этой проблемы: сначала интеграл вычисляется при значении параметра $\alpha\varepsilon > 2$, а затем аналитически продолжается в область $\alpha\varepsilon \leqslant 2$. Это означает, что такие вклады дают сингулярность, пропорциональную полюсу $(\alpha\varepsilon - 2)^{-1}$ (см. [13]). Однако, такое объяснение не совсем корректно, так как формула (12) может не существовать в области $\alpha\varepsilon > 2$ и могут возникнуть другие расходимости.

Мы хотим предложить другой подход. Воспользуемся свойством (10) и добавим к функции Грина (11) следующий вклад

$$f_\varepsilon(x,y) = -\frac{1}{4\pi^2 r^{2-2\varepsilon}}\chi_{(0,\,e^{-g(\varepsilon)})}, \tag{13}$$

где $g(\varepsilon)$ – возрастающая функция при $\varepsilon \to +0$, свойства которой определим ниже. Такая добавка означает, что мы вырезаем область $(0, e^{-g(\varepsilon)})$ в интегралах (12). Другими словами, мы смешиваем размерную регуляризацию и регуляризацию с импульсом обрезания.

Ясно, что функция должна обладать свойством $g(\varepsilon) \to +\infty$ при $\varepsilon \to +0$ для того, чтобы можно было снять регуляризацию. Сформулируем еще несколько предположений, которые позволят найти дополнительные ограничения:

(1) бесконечные вклады должны быть регуляризованы;
(2) стандартные полюса $1/\varepsilon^k$ не должны быть изменены.

Первое условие может быть достигнуто требованием $g(\varepsilon) < +\infty$ для всех $\varepsilon > 0$. Действительно, после замены переменных, бесконечные вклады из Таблицы 1 имеют следующий вид

$$\int_0^{g(\varepsilon)} dr\, e^{(2-\alpha\varepsilon)r} r^n = \frac{1}{2} g^n(\varepsilon) e^{(2-\alpha\varepsilon)g(\varepsilon)}(1+o(1)), \tag{14}$$

где $n = 0,\,1$, и ε достаточно мало.

Чтобы удовлетворить второму условию, необходимо проверить, что следующая разность стремится к нулю при $\varepsilon \to +0$

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty dr\, e^{-\beta\varepsilon r} r^n - \int\limits_0^{g(\varepsilon)} dr\, e^{-\beta\varepsilon r} r^n &= \int\limits_0^\infty dr\, (r+g(\varepsilon))^n e^{-\beta\varepsilon r} e^{-\beta\varepsilon g(\varepsilon)} \\ &= P(\varepsilon^{-1}, g(\varepsilon))\, e^{-\beta\varepsilon g(\varepsilon)},\end{aligned} \tag{15}$$

где $n = 0, 1, 2$, и P – полином конечной степени. Например, она стремится к нулю, если $g(\varepsilon) = \sigma\varepsilon^{-1-\delta}$ для произвольных положительных δ и σ. Таким образом, в смешанной регуляризации мы сохранили полюса $1/\varepsilon$, а также получили экспоненциально большие сингулярности (14), которые позволяют провести аналогию с регуляризацией обрезанием.

Рассмотрим предельный случай, когда $\delta = 0$ и $\sigma = 1/2$. При таких значениях разность (15) не стремится к нулю, и второе условие нарушается. Это означает, что формула (15) дает дополнительные логарифмические сингулярности, которые изменяют значение коэффициентов около полюсов. Кроме того, это приводит к возникновению сингулярностей двух типов, ε^{-1} и $\exp(\varepsilon^{-1})$, согласно формуле (14), между которыми строго экспоненциальное отношение, так как $2\varepsilon g(\varepsilon) = 1$.

§4. Обсуждение

В данной статье мы рассмотрели несколько идей модификации процесса регуляризации. Было показано, что функция Грина может быть изменена с помощью сдвига. Его явный вид зависит от рассматриваемой теории и регуляризационной схемы. Такое преобразование позволяет упростить вычисления. Также мы отметили, что нецелую размерность пространства можно использовать только для деформации функции Грина, так что размерная регуляризация приобретает четкий физический смысл. Однако, в этих случаях калибровочная инвариантность может быть нарушена, что требует дальнейшего изучения.

Кроме того, мы представили регуляризацию смешанного типа. Мы показали, как бесконечные вклады могут быть регуляризованы с помощью подходящего выбора функции $g(\varepsilon)$, и что это приводит к нелогарифмическим расходимостям. В то же время стандартные полюса остаются без изменений. Мы хотим подчеркнуть, что в данной работе для простоты изложения мы рассматривали смешанную регуляризацию, основанную на функции Грина со сдвигом. Также, как отмечено выше, мы вернулись к размерности $d = 4$ для анализа расходимостей трех-петлевой диаграммы. Однако, эти предположения не являются необходимыми, поэтому более общий случай смешанной регуляризации может быть рассмотрен.

Список литературы

1. J. C. Collins, *Renormalization: an introduction to renormalization, the renormalization group and the operator-product expansion.* — Cambridge, Cambridge University Press (1984).
2. G. 't Hooft, M. Veltman, *Regularization and renormalization of gauge fields.* — Nucl. Phys. B **44** (1972), 189–213.
3. C. G. Bollini, J. J. Giambiaggi, *Lowest order "divergent" graphs in v-dimensional space.* — Phys. Lett. B **40** (1972), 566–568.
4. J. Polchinski, *Renormalization and effective lagrangians.* — Nuclear Physics B **231(2)** (1984), 269–295.
5. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Quantum equation of motion and two-loop cutoff renormalization for ϕ^3 model.* — Zap. Nauchn. Sem. POMI, **487** (2019), 151–166.
6. R. P. Feynman, *Space-time approach to quantum electrodynamics.* — Physical Review, **76** (1949), 769.
7. B. S. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields, Gordon and Breach.* — NewYork (1965).
8. P. B. Gilkey, *The spectral geometry of a Riemannian manifold.* — J. Differ. Geom., **10** (1975), 601–618.
9. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Heat kernel: proper time method, Fock-Schwinger gauge, path integral representation, and Wilson line* (2019). [arXiv:1906.04019 [hep-th]].
10. M. Lucher, *Dimensional regularisation in the presence of large background fields.* — Annals of Physics, **142** (1982), 359–392.
11. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Two-loop Cutoff renormalization of 4-D Yang–Mills effective action.* — J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.,`https://doi.org/10.1088/1361-6471/abb939` (2020).
12. L. D. Faddeev, A. A. Slavnov, *Gauge Fields: An Introduction to Quantum Theory.* — Frontiers in Physics, Addison-Wesley, **83** (1991).
13. K. Hagiwara, S. Ishihara, R. Szalapski, D. Zeppenfeld, *Low energy effects of new interactions in the electroweak boson sector.* — Phys. Rev. D **48(5)** (1993), 2182–2203.

Kharuk N. V. Mixed type regularizations and nonlogarithmic singularities.

In this paper we discuss dimensional and cutoff regularizations, using the heat kernel method as an example. The regularization modifications by adding to a Green function a special type operator are considered. In particular, we show that the dimensional regularization can lead to non-logarithmic divergences.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института В. А. Стеклова РАН;
Международный математический институт
им. Леонарда Эйлера;
Университет ИТМО, Санкт-Петербург 197101, Россия
E-mail: `natakharuk@mail.ru`

Поступило 1 сентября 2020 г.