

В. Ю. Новокшенов

АППРОКСИМАЦИЯ НУЛЕЙ ОБОБЩЕННЫХ ПОЛИНОМОВ ЭРМИТА С ПОМОЩЬЮ МОДУЛИРОВАННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

ВВЕДЕНИЕ

Оценка величины области, содержащей нули заданного полинома, является классической задачей анализа. По-видимому, первым результатом в этом направлении была теорема Коши, оценивающая радиус круга, в котором лежат нули полинома, через максимум модулей его коэффициентов. Более точно, для полинома

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

все его нули лежат в круге $|z| < 1 + A$, где $A = \max_{0 \leq j \leq n-1} |a_j|$.

Позже эта оценка усиливалась и уточнялась в многочисленных работах, учитывающих специфику тех или иных полиномов. Например, в работе [7] выведена оценка радиуса круга нулей полинома

$$p(z) = z^n + a_{n-s}z^{n-s} + \dots + a_1z + a_0$$

в виде $|z| < B$, где B - единственный положительный корень уравнения $t^s - t^{s-1} = Q^n$ и $Q^n = \max_{0 \leq j \leq n-s} |a_j|$.

Семейства полиномов имеют как правило сколь угодно большие степени n и некоторые соотношения рекурренции, задающие последующие полиномы по предыдущим. Эти соотношения позволяют определить скейлинг, связывающий независимую переменную z и степень полинома n так, чтобы все нули семейства лежали в фиксированной области. Так, для семейства полиномов Эрмита $H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}$, указанный скейлинг имеет вид $z = \sqrt{2n+1} \sin \varphi$, $\varepsilon < \varphi < \pi$, так что все нули $H_n(z)$ в переменной φ лежат на отрезке $[-\pi, \pi]$ (теорема Планшереля-Ротаха [17]).

Ключевые слова: обобщенные полиномы Эрмита, распределение нулей, уравнение Пенлеве IV, мероморфные решения, функция Вейерштрасса, метод Лиувилля-Стеклова, устойчивость по линейному приближению.

Обобщенные полиномы Эрмита $H_{m,n}(z)$ определяются как вронскианы классических полиномов Эрмита

$$H_{m,n}(z) = c_{m,n} \mathcal{W}(H_m(z), H_{m+1}(z), \dots, H_{m+n}(z)),$$

где $c_{m,n}$ – некоторые нормировочные постоянные.

Подобно классическим ортогональным полиномам, они обладают многими замечательными свойствами. Например, эти полиномы связаны трехчленными рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} 2mH_{m+1,n}H_{m-1,n} &= H_{m,n}H''_{m,n} - (H'_{m,n})^2 + 2mH_{m,n}^2, \\ 2nH_{m,n+1}H_{m,n-1} &= -H_{m,n}H''_{m,n} + (H'_{m,n})^2 + 2nH_{m,n}^2, \end{aligned}$$

которые ниже использованы для вычисления нулей и построения рисунков.

Также, полиномы $H_{m,n}(z)$ фигурируют в коэффициентах рекуррентности ортогональных на вещественной оси полиномов с весом $w(x, z, m) = (x - z)^m \exp(-x^2)$. А именно, эти полиномы $p_n(x)$, удовлетворяют рекуррентному соотношению [4]

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + a_n(z, m)p_n(x) + b_n(z, m)p_{n-1}(x),$$

где

$$a_n(z, m) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dz} \ln \frac{H_{n+1,m}}{H_{n,m}}, \quad b_n(z, m) = \frac{nH_{n+1,m}H_{n-1,m}}{2H_{n,m}^2}.$$

Эти соотношения использовались в недавних работах, где вычислялась функция распределения унитарного гауссовского ансамбля матриц $n \times n$ с вырождением порядка m у одного из собственных значений. Явные формулы для функции распределения позволили найти новое выражение для обобщенных полиномов Эрмита в виде повторного интеграла

$$\begin{aligned} H_{m,n}(z) &= \frac{\pi^{m/2} \prod_{k=1}^m k!}{2^{m(m+2n-1)/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \prod_{j=i+1}^n (x_i - x_j)^2 \\ &\times \prod_{k=1}^n (z - x_k)^m \exp(-x_k^2) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Другое свойство, которое будет использовано ниже, состоит в том, что логарифмические производные

$$u(z) = -2z + \frac{d}{dz} \ln \frac{H_{m,n+1}(z)}{H_{m+1,n}(z)} \quad (1)$$

доставляют рациональные решения четвертого уравнения Пенлеве (PIV)

$$u'' = \frac{(u')^2}{2u} + \frac{3}{2}u^3 + 4zu^2 + 2(z^2 - \alpha)u + \frac{\beta}{2u}, \quad (2)$$

с коэффициентами

$$\alpha = n - m, \quad \beta = -2(m + n + 1)^2$$

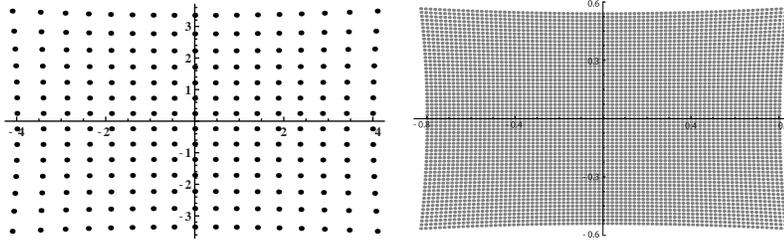


Рис. 1. Нули обобщенных полиномов Эрмита $H_{m,n}(z)$ при $m = 17$ и $n = 14$ (слева) и при $m = 81$ и $n = 61$ в скейлинговой переменной $\zeta = z(2m + n)^{-1/2}$ (справа).

Ниже мы будем вычислять области нулей полиномов $H_{m,n}(z)$ при

$$|z| < O(\sqrt{2m + n}), \quad m, n \rightarrow \infty, \quad m = O(n). \quad (3)$$

Для этого, по примеру недавних работ [2, 14] и [15], мы используем рациональные решения (1) уравнения PIV (2). Подобный подход для других семейств полиномов, ассоциированных с уравнением Пенлеве II (PII), был применен ранее в работах [3, 9] и [10]. Он основан на свойстве полной интегрируемости уравнений Пенлеве методом изомодромных деформаций (методом задачи Римана). В монографии П. Дейфта [8] этот метод был модифицирован для классических ортогональных полиномов и с его помощью были воспроизведены результаты ранних работ по вычислению асимптотик распределения нулей для полиномов Лагерра, Якоби и Эрмита. Однако, семейства полиномов

Воробьева–Яблонского [19] (уравнение PII) и обобщенные полиномы Эрмита (уравнение PIV) требуют для этой цели громоздких вычислений и нетривиального “асимптотического разделения” задачи Римана. В силу этого обстоятельства в ряде примеров построение асимптотики нулей не было доведено до конца.

Отметим, что вычисление распределения нулей классических ортогональных полиномов выполнялось во многих работах, начиная с Дарбу и Лиувилля. Ключевым здесь является использование линейных дифференциальных уравнений, для представления решений которых применяется метод функции Грина. При больших значениях номера полинома в ядре интегрального уравнения появляется большой параметр, что позволяет применить метод ВКБ или метод перевала. В результате получаются оценки для решений соответствующих интегральных уравнений, которые дают оценки для координат нулей. В §1 мы даем краткий обзор этого метода для полиномов Эрмита.

В случае обобщенных полиномов Эрмита мы будем следовать этой идее, модифицировав ее для нелинейного уравнения, которому удовлетворяют эти полиномы. По сути, оно эквивалентно уравнению PIV (2), однако мы не будем использовать свойство его полной интегрируемости. Вместо этого в §2 мы выполняем асимптотическую редукцию (10) при $m, n \rightarrow \infty$ к нелинейному уравнению первого порядка, описывающего “модулированную” ζ -функцию Вейерштрасса. Роль параметров модуляции играют эллиптические инварианты, зависящие от “медленной” переменной z/\sqrt{n} . В результате (Теорема 2), полюсы этой функции будут совпадать с нулями $H_{m,n}(z)$. В §3 мы устанавливаем границы области нулей, выполняя анализ устойчивости решений линеаризованного уравнения (10). При этом выясняется роль скейлинга $\zeta = z(2m + n)^{-1/2}$, фигурирующего в формулах для распределения нулей.

§1. МЕТОД ЛИУВИЛЛЯ–СТЕКЛОВА

Классические ортогональные полиномы зачастую удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям [1]. Например, полиномы Эрмита $H_n(z)$ можно получить как решения уравнения второго порядка

$$H_n'' - 2zH_n' + 2nH_n = 0 \quad (4)$$

с начальными условиями

$$H_n(0) = \frac{2^n \sqrt{\pi}}{\Gamma((1-n)/2)}, \quad H'_n(0) = 0, \quad n = 2m. \quad (5)$$

Формула Грина, соответствующая этому решению, имеет вид [1]

$$e^{-x^2/2} H_n(z) = \lambda_n \cos \left(z\sqrt{2n+1} - \frac{\pi n}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \int_0^z \sin [(z-t)\sqrt{2n+1}] t^2 e^{-t^2/2} H_n(t) dt,$$

где $\lambda_n = |H_n(0)|$. Разлагая интеграл в правой части (6) по методу перевала при $n \rightarrow \infty$, получим для вещественных z

$$\lambda_n^{-1} e^{-x^2/2} H_n(z) = \cos \left(z\sqrt{2n+1} - \frac{\pi n}{2} \right) \sum_{\nu=0}^{p-1} \frac{v_\nu(z)}{(2n+1)^\nu} + \sin \left(z\sqrt{2n+1} - \frac{\pi n}{2} \right) \sum_{\nu=0}^{p-1} \frac{w_\nu(z)}{(2n+1)^\nu} + O(n^{-p}),$$

где v_ν и w_ν - некоторые полиномы порядка ν . При $\nu = 0$ имеем [1], гл. 8

$$\lambda_n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} (1 + O(n^{-1})), \quad v_0(z) = 1, \quad w_n(z) = \frac{z^3}{6}.$$

Тогда из оценки (6) вытекает формула Планшереля - Ротаха о нулях семейства полиномов Эрмита

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(n+1)} e^{-z^2/2} H_n(z) = \cos \left(z\sqrt{2n+1} - \frac{\pi n}{2} \right) + \frac{z^3}{6} \sin \left(z\sqrt{2n+1} - \frac{\pi n}{2} \right) + O(n^{-1}). \quad (6)$$

Тем самым, нули $H_n(z)$ вещественны и лежат в области $z = \sqrt{2n+1} \cos \varphi$, $\varepsilon \leq \varphi \leq \pi - \varepsilon$ при $n \rightarrow \infty$.

Обобщенные полиномы Эрмита $H_{m,n}(z)$ удовлетворяют билинейному уравнению четвертого порядка [6]

$$H_{m,n} H_{m,n}'''' - 4H'_{m,n} H_{m,n}''' + 3(H''_{m,n})^2 + 4zH_{m,n} H'_{m,n} - 8mnH_{m,n}^2 - 4(z^2 + 2n - 2m) \left\{ H_{m,n} H''_{m,n} - (H'_{m,n})^2 \right\} = 0. \quad (7)$$

Вводя логарифмическую производную

$$\sigma(z) = \frac{d}{dz} \ln H_{m,n}(z), \quad (8)$$

сведем уравнение (1) к уравнению третьего порядка

$$\sigma''' + 6(\sigma')^2 - 4(-2m + 2n + z^2)\sigma' + 4z\sigma - 8mn = 0. \quad (9)$$

с начальными условиями

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma'(0) = 2n, \quad \sigma''(0) = 0.$$

Оно допускает еще одно понижение порядка и приводится к так называемому *сигма-уравнению* [6]

$$(\sigma'')^2 + 4\sigma'(\sigma' - 2n)(\sigma' + 2m) - 4(z\sigma' - \sigma)^2 = 0 \quad (10)$$

с начальными условиями

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma'(0) = 2n. \quad (11)$$

В самом деле, дифференцируя (10) по z и сокращая на σ'' , получим уравнение (9).

Очевидно, что уравнения (9) и (10) не допускает непосредственного применения метода Лиувилля–Стеклова. Тем не менее, при больших значениях m и n можно применить асимптотические методы для оценки распределения полюсов решений $\sigma(z)$.

§2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ

Все нули полинома $H_{m,n}$ являются простыми [6], поэтому логарифмическая производная (8) имеет простой полюс $z = z_0$ в соответствующем нуле полинома $H_{m,n}(z_0) = 0$.

Предположим

$$m, n \gg 1, \quad m = O(n),$$

и будем искать асимптотическое решение уравнения (9) в виде

$$\sigma(z) = nz + \sqrt{n} S \left(z\sqrt{n} + \phi_0(z) + n^{-1/2}\phi_1(z) + O(n^{-3/2}) \right) \quad (12)$$

$$+ P \left(z\sqrt{n} + \phi_0(z) + n^{-1/2}\phi_1(z) + O(n^{-3/2}) \right) + O(n^{-1/2}), \quad (13)$$

$$x = z\sqrt{n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Подставляя асимптотику (12) в уравнение (9), получим в главном порядке по n

$$(S'')^2 - 4\frac{z^2}{n}(S')^2 + 4((S')^2 - 1)\left(S' + 1 + \frac{2m}{n}\right) = 0, \quad (14)$$

где

$$S' = \frac{dS}{dx}, \quad x = z\sqrt{n}.$$

Будем считать коэффициент z^2/n медленной переменной $\frac{z}{\sqrt{n}} = \frac{x}{n} = O(1)$. Тогда уравнение (14) имеет общее решение в виде эллиптической функции

$$S'(x) = -\wp(x - C|g_2, g_3) + \frac{A}{3}, \quad (15)$$

где \wp -функция Вейерштрасса,

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{2m}{n} - \frac{x^2}{n^2}, \\ g_2 &= \frac{4}{3}A^2 + 4, \\ g_3 &= -\frac{4}{3}A\left(\frac{2}{9}A^2 + 1\right) - 4\left(1 + \frac{2m}{n}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Произвольная постоянная C в (15) определяются из начальных условий (11) с учетом подстановки (12)

$$S(0) = 0, \quad S'(0) = 1. \quad (17)$$

Приравнивая далее следующие степени n в уравнении (10), получим линейные уравнения для фазовых сдвигов младшего порядка ϕ_0, ϕ_1, \dots и функции P

$$\begin{aligned} \phi_0' (-S' + 2(1 + \alpha)(S')^2 + 3(S')^3 - S'') &= 0, \\ P'' S'' &= P' (-2 + 4(1 + \alpha)S' + 6(S')^2), \\ P'' - 4(P')^2(1 + \alpha + 3S') - 4z^2(S')^2 & \\ - 2(6(S')^3 - (S'')^2 - 2S' + 4(S')^2(1 + \alpha)) \phi_1' &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\alpha = 2m/n$.

Из уравнений (18) следует

$$\phi'_0 = 0, \quad (19)$$

$$P'(x) = \exp \int_0^x \frac{6S'^2(\xi) + 4(1 + \alpha)S'(\xi) - 2}{S''(\xi)} d\xi, \quad (20)$$

$$\phi'_1 = \frac{P''^2 - 4z^2S'^2 - 4P'^2(1 + \alpha + 3S')}{12S'^3 - 2S'^2 + 8(1 + \alpha)S'^2 - 4S'}. \quad (21)$$

Легко показать, что остальные члены формальной асимптотики (12) также строятся рекуррентно из линейных уравнений, получаемых подстановкой (12) в уравнение (10).

Заметим, что в силу формул (1) и (8) уравнение (10) эквивалентно уравнению PIV (2). Анализ редукций PIV к эллиптическим уравнениям был подробно исследован в работе А. А. Капаева [12]. Методом изомонодромных деформаций в ней были обоснованы асимптотики вида (12) путем сравнения соответствующих данных монодромии и деформаций графа Стокса.

Тем самым справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Асимптотика (12) формально удовлетворяет уравнению (10) с точностью до членов порядка $O(n^{-3/2})$.*

Обратимся к анализу уравнения для главного члена асимптотики. Его решения представляют собой “модулированную” эллиптическую функцию, то есть эллиптические инварианты здесь зависят от “медленной” переменной $x^2/n^2 = z^2/n$. Как известно, \wp -функция Вейерштрасса имеет прямоугольную периодическую решетку полюсов с периодами $2\omega_1$ и $2\omega_2$, где

$$\omega_{1,2} = \int_{\infty}^{e_{1,2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3}},$$

и e_1 и e_2 - корни полинома $4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3$, такие что ω_1 вещественный, а ω_2 чисто мнимый. Если g_2 и g_3 зависят от медленной переменной, то тем же свойством обладают периоды $2\omega_1$ и $2\omega_2$. Тем самым, прямоугольная решетка полюсов здесь слегка деформируется как показано на Рис. 1.

Теорема 2. Нули $z_{k,l}$ полиномов $H_{m,n}(z)$ имеют асимптотику

$$\sqrt{n} z_{k,l} = 2\omega_1 k + 2\omega_2 l + C - n^{-1/2} \phi_1(n) + O(n^{-3/2}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (22)$$

$$k = 0, \pm 1, \dots, \pm \left[\frac{m}{2} \right], \quad l = 0, \pm 1, \dots, \pm \left[\frac{n}{2} \right],$$

где ω_1 и ω_2 полупериоды \wp -функции Вейерштрасса, функция ϕ_1 определена формулой (19), а константа C определяется из соотношения (17)

$$S'(0) = \wp(-C | g_2(0), g_3(0)) = 1.$$

Доказательство. В силу формул (8) и (15) нули полинома $H_{m,n}(z)$ совпадают с полюсами функции $\sigma(z)$. Учитывая асимптотику (12), заключаем, что нули приближенно, с точностью до $O(n^{-3/2})$ совпадают с полюсами эллиптической функции (15). Нули расположены симметрично относительно начала координат в силу соотношений [16]

$$H_{m,n}(-z) = (-1)^{mn} H_{m,n}(z), \quad H_{m,n}(iz) = i^{mn} H_{n,m}(z).$$

Кроме того, поскольку степень $H_{m,n}(z)$ равна mn , число нулей также равно этому числу, причем они расположены в "прямоугольнике" m по горизонтальным рядам и n по вертикальным [5]. Отсюда вытекает, что среди полюсов функции (15) следует выбрать mn полюсов, симметрично относительно $z = 0$. Поскольку при фиксированных эллиптических инвариантах g_2 и g_3 полюсы \wp -функции Вейерштрасса имеют вид

$$z_{k,l} = 2\omega_1 k + 2\omega_2 l, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

то для \wp -функции с аргументом $z\sqrt{n} - C + n^{-1/2}\phi_1(n) + O(n^{-3/2})$ имеет место формула (22). Теорема доказана.

На Рис. 2 изображен пример приближения нулей полинома $H_{17,24}(z)$ полюсами модулированной эллиптической функции (15).

§3. ГРАНИЦЫ МНОЖЕСТВА НУЛЕЙ

Приближение полюсами эллиптической функции (15) и Теорема 2 в принципе дают рецепт вычисления границ множества нулей $H_{m,n}(z)$. Однако, формула (22) предполагает оценку большого числа граничных точек, где фигурируют периоды ω_1 , ω_2 , сложно зависящие от медленной переменной z^2/n .

Другим путем, позволяющим приближенно установить эти границы, является анализ устойчивости решений исходного уравнения (10).

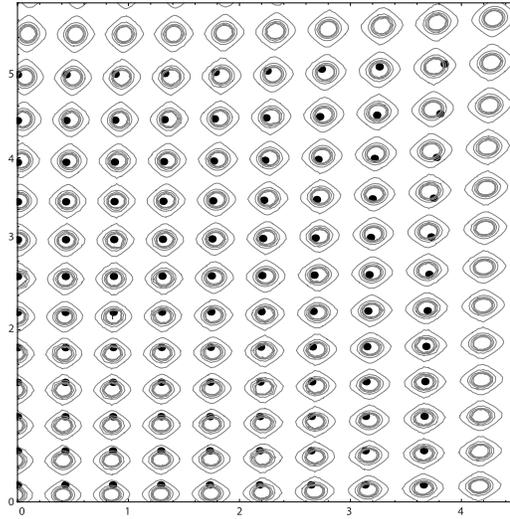


Рис. 2. Сравнение положения нулей обобщенных полиномов Эрмита $H_{m,n}(z)$ при $m = 17$ и $n = 24$ (черные точки) и линий уровня эллиптической функции (15) (серые контуры).

Поясним сначала этот путь на примере классических полиномов Эрмита.

Для полиномов Эрмита $H_n(z)$ уравнение (4) переписывается в виде

$$v'' + (2n + 1 - z^2)v = 0, \quad v(z) = e^{-\frac{z^2}{2}} H_n(z), \quad z \in \mathbb{R}. \quad (23)$$

Начальные условия (5) отвечают условиям локализации решений $v \in L_2(\mathbb{R})$, что в квантовой механике соответствует собственным функциям гармонического осциллятора. Нетрудно видеть, что при $n \rightarrow \infty$ область осцилляций решения $v(z)$ (и, соответственно, область нулей $H_n(z)$) лежит в интервале $(-\sqrt{2n+1}, \sqrt{2n+1})$. Причина этого ясна из уравнения (23), поскольку при $z^2 < 2n+1$ собственные числа чисто мнимые, а при $z^2 > 2n+1$ они становятся вещественными.

Для анализа сигма-уравнения удобнее воспользоваться его формой (9). Рассмотрим линеаризацию этого уравнения на асимптотическом решении (12)

$$\sigma(z) = nz + Y(z).$$

Тогда уравнение (9) запишется в виде

$$Y''' + 6(Y')^2 + 4(2m + n - z^2)Y' + 4zY + 2n^2 = 0. \quad (24)$$

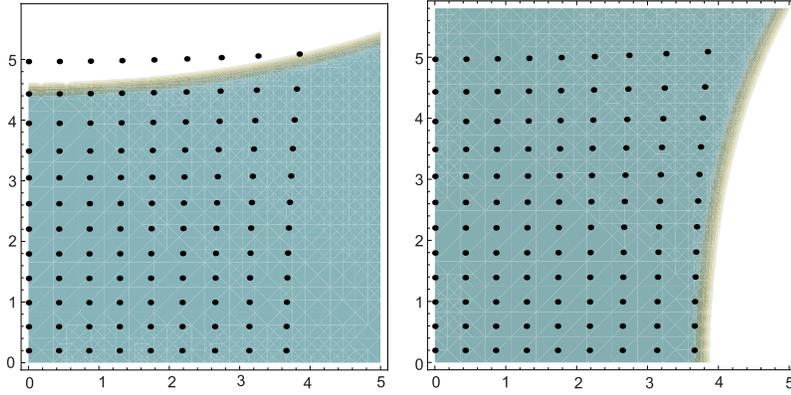


Рис. 3. Линии уровня функции $|D_{\nu-1}(z\sqrt{2})|$ (слева) и функции $|D_{-\nu-1}(iz\sqrt{2})|$ (справа) при $m = 17$, $n = 24$ и $\nu = 2m + n$ на фоне нулей $H_{m,n}(z)$ (черные точки).

В области, где отсутствуют полюсы, решение Y несингулярно. Рассмотрим линеаризацию уравнения (24)

$$Y(z) = Y_0(z) + \varepsilon(x), \quad x = z\sqrt{n}, \quad |\varepsilon| \ll 1,$$

где $Y_0(z)$ – решение (24) вне области полюсов. Тогда, отбрасывая квадратичный член ε'^2 , получим линейное уравнение

$$\frac{d^3\varepsilon}{dx^3} + 4\left(\frac{2m}{n} + 1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\frac{d\varepsilon}{dx} + \frac{12Y_0}{n}\frac{d\varepsilon}{dx} + \frac{4z\varepsilon}{n} = 0. \quad (25)$$

С точностью до младших членов порядка $O(n^{-1})$ уравнение (25) совпадает с уравнением для функций параболического цилиндра $y = D_\nu(x)$

$$y'' + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} \right) y = 0.$$

Тем самым, в главном порядке по n^{-1} общее решение ε имеет вид

$$\varepsilon'(z) = C_1 D_{\nu-1}(z\sqrt{2}) + C_2 D_{-\nu-1}(iz\sqrt{2}) + O(n^{-1}), \quad \nu = 2m + n. \quad (26)$$

Функции параболического цилиндра хорошо изучены при больших ν и z , $|z| < \sqrt{\nu}$ (см., например, [18]). В этой области имеет место асимптотика ([18], §4)

$$D_{2m+n-1}(z\sqrt{2}) = \frac{e^{-\xi}}{\sqrt[4]{2m+n-z^2}} (1 + O((2m+n)^{-1})), \quad (27)$$

$$|\arg z| < \frac{3\pi}{4},$$

$$\xi = -\frac{1}{2}z\sqrt{z^2 - 2m - n} - \frac{2m+n}{2} \ln \left(z + \sqrt{z^2 - 2m - n} \right) - \frac{2m+n}{2} \ln(2m+n).$$

Для второй функции $D_{-\nu-1}(iz\sqrt{2})$ имеет место аналогичная асимптотика. Отсюда можно определить область, где величина ε (26) ограничена. На Рис. 3 эта область является пересечением затемненных областей. Тот факт, что границы областей не совпадают с граничными линиями нулей объясняется погрешностью приближения точного линеаризованного уравнения (25) функцией (26).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г. Серё, *Ортогональные многочлены*. М., Физматгиз, 1962.
2. M. Bertola, T. Bothner, *Zeros of large degree Vorob'ev-Yablonski polynomials via a Hankel determinant identity*. — Int. Math. Research Notices. **19** (2015), 9330–9399.
3. R. J. Buckingham and P. D. Miller, *Large-degree asymptotics of rational Painlevé-II functions: noncritical behaviour*. — Nonlinearity. **27** (2014), 2498–2578.
4. Y. Chen, M. V. Feigin, *Painlevé IV and degenerate Gaussian unitary ensembles*. — J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006), 12381–12393.
5. P. A. Clarkson, *The fourth Painlevé equation and associated special polynomials*. — J. Math. Phys. **44** (2003), 5350–5374.
6. P. A. Clarkson, *Special Polynomials Associated with Rational Solutions of the Painlevé Equations and Applications to Soliton Equations*. — Comp. Methods and Function Theory. **6**, No. 2. (2006). 329–401.

7. H. Guggenheimer, *On a note by Q. G. Mohammad.* — Amer. Math. Monthly. **71** (1964), 54–55.
8. P. Deift, *Orthogonal polynomials and random matrices: A Riemann-Hilbert approach.* — Courant Lecture Notes, New York Univ., 1999.
9. P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, S. Venakides, X. Zhou, *Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory.* — Comm. Pure Appl. Math. **52**, No. 11 (1999), 1335–1425.
10. P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, S. Venakides, X. Zhou *Strong asymptotics of orthogonal polynomials with respect to exponential weights.* — Comm. Pure Appl. Math. **52**, No. 12 (1999) 1491–1552.
11. A. S. Fokas, A. R. Its, A. A. Kapaev, V. Yu. Novokshenov, *Painlevé Transcendents. The Riemann-Hilbert Approach.* Amer. Math. Soc. [Math. Surveys and Monographs], V. 128 Providence, RI, 2006.
12. A. A. Kapaev, *Scaling limits in the fourth Painlevé transcendent.* — POMI Preprint 15/1996, May 1996.
13. A. P. Magnus, *Painleve-type differential equations for the recurrence coefficients of semi-classical orthogonal polynomials.* — J. Comput. Appl. Math. **57** (1995), 215–237.
14. D. Masoero and P. Roffelsen, *Poles of Painlevé IV rationals and their distribution.* — SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 14:002, (2018).
15. D. Masoero, P. Roffelsen, *Roots of generalised Hermite polynomials when both parameters are large.* [arXiv:1907.08552v1](https://arxiv.org/abs/1907.08552v1)
16. M. Noumi, Y. Yamada, *Symmetries in the fourth Painlevé equation and Okamoto polynomials.* — Nagoya Math. J. **153** (1999), 53–86.
17. M. Plancherel, W. Rotach, *Sur les valeurs asymptotiques des polynomes d’Hermite.* — Commentarii Math. Helvetici. **1** (1929), 227–254.
18. F. W. J. Olver, *Uniform asymptotic expansions for Weber parabolic cylinder functions of large orders.* — J. Research Nat. Bureau of Standards, Section B Math. and Math. Phys., **63B**, No. 2 (1959), 131–173.
19. A. P. Vorobiev, *On rational solutions of the second Painlevé equation.* — Diff. Eqns. **1** (1965), 58–59.; A. I. Yablonskii, *On rational solutions of the second Painlevé equation.* — Vesti Akad. Navuk. BSSR Ser. Fiz. Tekh. Nauk. **3** (1959), 30–35.

Novokshenov V. Yu. Approximation for the zeros of generalized Hermite polynomials via modulated elliptic function.

Distribution of zeros of polynomials constitute a classic analytic problem. In the paper, a distribution of zeroes to generalized Hermite polynomials $H_{m,n}(z)$ is approximated as $m, n \rightarrow \infty, m/n = O(1)$. These polynomials defined as Wronskians of classic Hermite polynomials appear in a number of mathematical physics problems as well as in the theory of random matrices. The calculation is based on scaling reduction of Painlevé IV equation which has solutions $u(z) = -2z + \partial_z \ln H_{m,n+1}(z)/H_{m+1,n}(z)$.

For large m, n the logarithmic derivative of $H_{m,n}$ satisfies equation for elliptic Weierstrass function with slowly varying coefficients. In this scaling limit the zeros coincide with poles of such modulated Weierstrass function, and a stability in linear limit gives estimates for the set of zeros. This construction is relatively simple and avoids bulky calculations by isomonodromic deformation method.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского 112,
450008 г. Уфа, Россия
E-mail: novik53@mail.ru

Поступило 22 сентября 2020 г.