

С. Э. Деркачев, А. В. Иванов, Л. А. Шумилов

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЛЛИНА–БАРНСА ДЛЯ ДВУХПЕТЛЕВОЙ МАСТЕР-ДИАГРАММЫ

§1. ВВЕДЕНИЕ

В теории квантовых интегрируемых моделей (см. обзоры [1–3]) одним из эффективных методов исследования является метод разделения переменных Е. К. Склянина [3–5]. Этот подход основан на использовании унитарного преобразования для перехода из координатного представления в представление разделенных переменных, в котором задача исследования исходного Гамильтониана кардинально упрощается. Такое унитарное преобразование осуществляется интегральным оператором, ядром которого служат общие собственные функции специального семейства коммутирующих операторов. Двумя содержательными примерами квантовых интегрируемых моделей, где удалось полностью реализовать программу разделения переменных, являются квантовая цепочка Тоды [4, 6, 7] и двумерная модель некомпактной спиновой цепочки [11].

В работах Л. Н. Липатова [8, 9], Л. Д. Фаддеева и Г. П. Корчемского [10] было открыто, что двумерная модель некомпактной спиновой цепочки описывает высоко-энергетические процессы в квантовой хромодинамике. Оператор перехода в представление разделенных переменных для этой модели был построен явным образом в [11]. В самом простом случае получается либо двумерное преобразование Фурье, либо двумерное обобщение преобразования Меллина, так что общий случай является далеко идущим обобщением двух классических интегральных преобразований.

Переход к разделенным переменным оказался очень удобным инструментом для вычисления многопетлевых фейнмановских диаграмм в квантовой теории поля. В работе Бассо–Диксона “*Gluing Ladder*

Ключевые слова: преобразование Меллина–Барнса, цепное соотношение, двухпетлевая диаграмма, разделенные переменные.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект 19-11-00131). А. В. Иванов является победителем конкурса “Молодая математика России” и выражает благодарность спонсорам и жюри.

Feynman Diagrams into Fishnets” [14] в качестве гипотезы было предложено замечательное детерминантное представление для специального класса фейнмановских диаграмм, которые играют доминирующую роль в четырехмерной модели Fishnet CFT [12]. Затем в [15] с помощью интегрального преобразования к разделенным переменным был выведен аналог детерминантного представления Бассо–Диксона для диаграмм двумерной модели Fishnet CFT [13], а в [16] получено обобщение на четырехмерный случай. Тем самым гипотеза Бассо–Диксона была доказана и основным используемым инструментом оказалось преобразование к разделенным переменным. Необходимое для этого обобщение основных формул [11] с двумерного на четырехмерный случай было разработано в [16].

Важным открытым вопросом является обобщение на произвольное число измерений, однако в самом простом случае необходимые формулы достаточно очевидны и известны [13, 17]. По аналогии с двумерным случаем, мы будем называть самое простое интегральное преобразование преобразованием Меллина–Барнса. В данной работе преобразование Меллина–Барнса применяется для вычисления двухпетлевой мастер-диаграммы [32, 33].

Статья организована следующим образом. Во втором разделе формулируется общая схема вычислений. В третьем разделе изложенная схема применяется к вычислению двухпетлевой диаграммы в двумерном случае. Последний раздел посвящен случаю произвольного числа измерений. В приложении мы приводим доказательство унитарности преобразования Меллина–Барнса для произвольного числа измерений.

Двумерный случай выделен отдельно по двум причинам. Во-первых, в двумерии все вычисления можно провести для диаграммы с произвольными тензорными линиями, не ограничиваясь только скалярными пропагаторами. Во-вторых, в двумерии происходит замечательная факторизация: двукратная сумма факторизуется в произведение двух однократных.

§2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данном разделе мы попытаемся схематически сформулировать задачу и общие правила игры. Пусть \mathcal{N} – абстрактное множество индексов, элементы которого $\alpha \in \mathcal{N}$ могут иметь достаточно сложную

структуру, включая непрерывные и дискретные параметры. Далее введем пространство интегрирования \mathcal{V} , а также переменные z как функции $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$. Мету интегрирования мы будем обозначать $\mathcal{D}z$. Введем семейство функций

$$D^\alpha(z_1, z_2) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \quad \alpha \in \mathcal{N}. \quad (1)$$

Такие функции являются базовыми элементами диаграммной техники и будут обозначаться направленной линией из точки z_1 в точку z_2 с индексом α , как это показано на Рис. 1. В свою очередь, интегрирование по \mathcal{V} с мерой $\mathcal{D}z$ мы будем обозначать точкой.

$$D^\alpha(z_1, z_2) = z_1 \xrightarrow{\alpha} z_2$$

Рис. 1. Элемент диаграммной техники “линия”.

Сейчас мы готовы выписать основной объект, см. Рис. 2, изучению которого и посвящена эта работа. Сразу отметим, что как функция внешних параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ указанный интеграл понимается в смысле аналитического продолжения из выбранной области сходимости в комплексную плоскость.

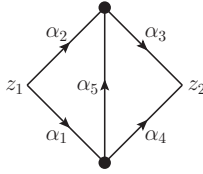


Рис. 2. Двухпетлевая диаграмма.

Как правило, в теории интегрируемых моделей функции D^α обладают дополнительными свойствами, которые упрощают задачу и позволяют выписать явный ответ. Мы отметим три основных:

(1) Пусть $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$, тогда

$$D^\alpha(z_1, z_2) D^\beta(z_1, z_2) = D^c(z_1, z_2), \quad (2)$$

где $c \in \mathcal{N}$ – функция параметров α и β ;

- (2) Пусть $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$, тогда цепное правило изображено на Рис. 3, где $\hat{c} \in \mathcal{N}$ – функция параметров α и β ;
- (3) Преобразование Меллина–Барнса, изображенное на Рис. 4, в котором $\tilde{\mathcal{D}}s$ является мерой на множестве \mathcal{N} , z_0 – свободный параметр, а $\tilde{c}_1 \in \mathcal{N}$ и $\tilde{c}_2 \in \mathcal{N}$ – функции параметров α и s .

$$z_1 \xrightarrow{\alpha} \bullet \xrightarrow{\beta} z_2 = B(\alpha, \beta) z_1 \xrightarrow{\hat{c}(\alpha, \beta)} z_2$$

Рис. 3. Цепное правило.

$$z_1 \xrightarrow{\alpha} z_2 = \int \tilde{\mathcal{D}}s C(\alpha, s) z_0 \begin{cases} \xrightarrow{\tilde{c}_2(\alpha, s)} z_2 \\ \xrightarrow{\tilde{c}_1(\alpha, s)} z_1 \end{cases}$$

Рис. 4. Преобразование Меллина–Барнса.

В дальнейшем мы будем предполагать, что эти свойства выполнены. Они позволяют с легкостью получить ответ для диаграммы. Действительно, применим преобразование Меллина–Барнса к диагонали с индексом α_5 на Рис. 2, выбрав свободный параметр z_0 равным z_1 (или z_2), а затем дважды применим свойство (2) и цепное правило. Тогда ответ выписывается в виде

$$D^b(z_1, z_2) = \int \tilde{\mathcal{D}}s C(\alpha_5, s) B(b_1(s), \alpha_4) B(b_2(s), \alpha_3), \quad (3)$$

где

$$b_1(s) = c(\alpha_1, \tilde{c}_1(\alpha_5, s)), b_2(s) = c(\alpha_2, \tilde{c}_2(\alpha_5, s))$$

и

$$b = c(\hat{c}(b_1, \alpha_4), \hat{c}(b_2, \alpha_3)).$$

В остальной части работы мы представим два частных случая (двумерный и многомерный). При этом в первом случае свойства 1)–3) уже известны и основным результатом является подсчет интеграла (3) и дальнейшая факторизация ответа. Второй же случай посвящен изучению вышеизложенных свойств 2) и 3), а также подсчету получившегося интеграла по вычетам.

§3. ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Множеством индексов \mathcal{N} в этом случае является \mathbb{C} . При этом для каждого индекса $\alpha \in \mathbb{C}$ удобно определить «сопряженный» $\bar{\alpha}$ по правилу $\alpha - \bar{\alpha} = n_\alpha \in \mathbb{Z}$. Введем для удобства вспомогательные функции

$$a(\alpha) = \frac{\Gamma(1 - \bar{\alpha})}{\Gamma(\alpha)} \quad \text{и} \quad a(\bar{\alpha}) = \frac{\Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(\bar{\alpha})}, \quad (4)$$

где Γ – стандартная Гамма-функция Эйлера. Для краткости произведение таких объектов будем обозначать $a(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = a(\alpha_1) \cdots a(\alpha_n)$. Нетрудно проверить, что такие коэффициенты обладают свойствами

$$a(\alpha)a(1 - \bar{\alpha}) = 1, \quad a(\alpha)a(1 - \alpha) = (-1)^{n_\alpha},$$

а также содержат простые полюса, распределенные согласно следующей Лемме.

Лемма 3.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{C}$, $s = \frac{n}{2} + i\nu$, $\bar{s} = -\frac{n}{2} + i\nu$, $\bar{\alpha} = x + iy$ и $\alpha = x + m + iy$, тогда функция $a(1 - \alpha \pm s)$ имеет простые полюса по переменной ν в точках

$$\nu = \mp i \left(\bar{\alpha} + \frac{m + |n \mp m|}{2} + k \right), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай со знаком плюс. Введем вспомогательные переменные

$$n = n' + m, \quad \nu = ip + y, \quad b = x + \frac{m}{2},$$

тогда функцию можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} a(1 - \alpha + s) &= \frac{\Gamma(\bar{\alpha} - \bar{s})}{\Gamma(1 - \alpha + s)} = \frac{\Gamma(x + iy + \frac{n}{2} - i\nu)}{\Gamma(1 - m - x - iy + \frac{n}{2} + i\nu)} \\ &= \frac{\Gamma(b + \frac{n'}{2} + p)}{\Gamma(1 - b + \frac{n'}{2} - p)}. \end{aligned}$$

Учитывая полюса верхней Гамма-функции и нули нижней, можно сделать вывод, что особенности имеются в точках $p = -b - \frac{|n'|}{2} - k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ по переменной p . Тогда утверждение следует из обратной замены переменной. \square

Пространство интегрирования \mathcal{V} совпадает с \mathbb{C} , переменные являются комплексными числами и мера интегрирования имеет вид $\mathcal{D}z = d\operatorname{Re}(z)d\operatorname{Im}(z)$.

Пусть $\nu \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, $s = \frac{n}{2} + i\nu$ и $\bar{s} = -\frac{n}{2} + i\nu$, тогда, с учетом определений

$$\int \tilde{\mathcal{D}}s = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} d\nu \quad \text{и} \quad D^\alpha(z_1, z_2) = (z_2 - z_1)^\alpha (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^{\bar{\alpha}},$$

оставшиеся коэффициенты и функции выписываются в виде:

$$c(\alpha, \beta) = \alpha + \beta, \quad (5)$$

$$B(\alpha, \beta) = (-1)^{n_\alpha + n_\beta} \pi a(\alpha, \beta, 2 - \alpha - \beta), \quad \tilde{c}(\alpha, \beta) = \alpha + \beta - 1, \quad (6)$$

$$C(\alpha, s) = \frac{(-1)^{n_\alpha + n_s}}{2\pi} a(\alpha, 1 - s, 1 + s - \alpha),$$

$$\tilde{c}_1(\alpha, s) = s, \quad \tilde{c}_2(\alpha, s) = \alpha - s. \quad (7)$$

Тогда формула (3) принимает вид

$$\frac{\pi}{2} D^{\alpha_{12345} - 2}(z_1, z_2) a(\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) (-1)^{n_{\alpha_{1234}}} \int_{\gamma} \tilde{\mathcal{D}}s a(1 - s, \alpha_{25} - s, 2 - \alpha_{14} - s)$$

$$a(1 + s - \alpha_5, \alpha_1 + s, 2 - \alpha_{235} + s) (-1)^n, \quad (8)$$

где контур γ совпадает с \mathbb{R} за исключением точки $\nu = 0$, которую он обходит снизу. Для упрощения формул мы будем использовать следующие сокращенные обозначения для сумм $\alpha_{ik} = \alpha_i + \alpha_k$, $n_{\alpha_{ik}} = n_{\alpha_i} + n_{\alpha_k}$, $\alpha_{ikj} = \alpha_i + \alpha_k + \alpha_j$, $n_{\alpha_{ikj}} = n_{\alpha_i} + n_{\alpha_k} + n_{\alpha_j}$ и т.д.

Очевидно, что интегранд имеет на комплексной плоскости шесть серий полюсов, три из которых (с аргументом $-s$) уходят на бесконечность в верхнюю полуплоскость, а остальные – в нижнюю.

Для удобства введем набор вспомогательных обозначений:

$$\beta_2 = 1 - \alpha_{25}, \quad \beta_3 = -1 + \alpha_{14},$$

$$\beta_4 = \alpha_5, \quad \beta_5 = 1 - \alpha_1, \quad \beta_6 = -1 + \alpha_{235},$$

тогда условия, при которых контур \mathbb{R} отделяет «верхние» серии от «нижних», с учетом Леммы 3.1, можно сформулировать так:

$$\operatorname{Re}(\bar{\beta}_i) + n_{\beta_i}/2 > 0, \quad i = 2, 3, \quad \text{и} \quad \operatorname{Re}(\bar{\beta}_j) + n_{\beta_j}/2 > 0, \quad j = 4, 5, 6. \quad (9)$$

Замечание. Мы будем предполагать, что условия (9) выполнены и контур вдоль вещественной оси разделяет серии полюсов. Все остальные случаи понимаются в смысле аналитического продолжения.

Теорема 3.2. *С учетом вышеизложенных предположений и условий (9) интеграл (8) равен*

$$\pi^2 D^{\alpha_{12345}-2}(z_2, z_1)(I_1 + I_2 + I_3),$$

где I_i , $i = 1, 2, 3$, диктуются равенствами после формулы (12).

Доказательство. Используя определение (4), представим интегранд в виде произведения Гамма-функций. Далее обозначим произведение множителей, содержащих переменную s , через $g(s)$, а произведение с переменной \bar{s} – через $f(\bar{s})$.

Сразу отметим, что мы замкнем контур в верхней полуплоскости. Следовательно, удобно отделить функции с особенностями, то есть представить $f(\bar{s})$ в виде

$$f(\bar{s}) = \Gamma(\bar{s})f_1(\bar{s}) = \Gamma(\bar{\beta}_2 + \bar{s})f_2(\bar{s}) = \Gamma(\bar{\beta}_3 + \bar{s})f_3(\bar{s}). \quad (10)$$

Тогда подынтегральное выражение представимо тремя способами

$$(-1)^n \frac{\Gamma(\bar{s})f_1(\bar{s})}{g(s)} = (-1)^n \frac{\Gamma(\bar{\beta}_2 + \bar{s})f_2(\bar{s})}{g(s)} = (-1)^n \frac{\Gamma(\bar{\beta}_3 + \bar{s})f_3(\bar{s})}{g(s)}. \quad (11)$$

Далее, используя Лемму 3.1, выпишем серии полюсов по переменной ν :

$$\left\{ i \left(\frac{|n_s|}{2} + k \right), k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\},$$

$$\left\{ i \left(\bar{\beta}_2 + \frac{n_{\beta_2} + |n_s + n_{\beta_2}|}{2} + k \right), k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\},$$

$$\left\{ i \left(\bar{\beta}_3 + \frac{n_{\beta_3} + |n_s + n_{\beta_3}|}{2} + k \right), k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

□

После подсчета вычетов мы получим три слагаемых, каждый из которых содержит двойную сумму по множеству $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Оказывается, что ответ можно преобразовать при помощи следующего утверждения

Лемма 3.3. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, и $h_1, h_2 \in C(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ – достаточно быстро убывающие на бесконечности функции, тогда верно соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n h_1 \left(\frac{m+n+|n+m|}{2} + k \right) h_2 \left(\frac{n-m-|n+m|}{2} - k \right) \\ = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k h_1(k) \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} h_2(-m-n) \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Разделим суммирование по переменной $n \in \mathbb{Z}$ на две части: $n+m \geq 0$ и $n+m < 0$.

Сделаем в первой сумме замену $n \rightarrow -m-k-n$, а затем используем дискретную теорему Тонелли-Фубини

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n.$$

Во второй части суммы также сделаем замену $n \rightarrow -m-k+n$, затем переобозначим переменные $n \leftrightarrow k$, после чего получим сумму вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty}.$$

С учетом того, что в обоих случаях суммируемая функция имеет один и тот же вид, два выражения можно объединить в одно, откуда и следует утверждение леммы.

Преобразуем при помощи Леммы 3.3 ответы для каждой серии полюсов:

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{n_s \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\left(\frac{n_s+|n_s|}{2}+k+n_s\right)} f_1 \left(-\frac{n_s+|n_s|}{2} - k \right)}{\left(\frac{n_s+|n_s|}{2} + k \right)! g \left(\frac{n_s-|n_s|}{2} - k \right)} \\ = 2\pi \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_1(-k)}{k!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{g(-n)} \right). \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем ответы для двух оставшихся серий:

$$2\pi \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_2(-k - \bar{\beta}_2)}{k!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+n\beta_2}}{g(-n - \beta_2)} \right),$$

$$2\pi \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_3(-k - \bar{\beta}_3)}{k!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+n\beta_3}}{g(-n - \beta_3)} \right).$$

Последние суммы можно преобразовать к гипергеометрическим функциям, пользуясь разложениями

$$\begin{aligned} & {}_3F_2(a_1, a_2, a_3; 1 - a_4, 1 - a_5; x) \prod_{i=1}^5 \Gamma(a_i) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} \Gamma(a_1+k) \Gamma(a_2+k) \Gamma(a_3+k) \Gamma(a_4-k) \Gamma(a_5-k), \\ & {}_3F_2(1 - a_1, 1 - a_2, 1 - a_3; a_4, a_5; x) \\ &= \prod_{i=1}^5 \Gamma(a_i) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{\Gamma(k+1) \Gamma(a_1-k) \Gamma(a_2-k) \Gamma(a_3-k) \Gamma(a_4+k) \Gamma(a_5+k)}. \end{aligned}$$

Тогда, с учетом коэффициента перед интегралом (3) и свойства $D^\alpha(z_1, z_2) = (-1)^{n_\alpha} D^\alpha(z_2, z_1)$, окончательный ответ выписывается в виде трех слагаемых:

$$\pi^2 D^{\alpha_{12345}-2}(z_2, z_1)(I_1 + I_2 + I_3), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= a(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, 2 - \alpha_{14}, \alpha_{25}, 2 - \alpha_{235}) \\ & {}_3F_2(\alpha_5, 1 - \alpha_1, -1 + \alpha_{235}, 2 - \alpha_{14}, \alpha_{25}; 1) \\ & {}_3F_2(\bar{\alpha}_5, 1 - \bar{\alpha}_1, -1 + \bar{\alpha}_{235}, 2 - \bar{\alpha}_{14}, \bar{\alpha}_{25}; 1), \\ I_2 &= a(\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, -1 + \alpha_{125}, 2 - \alpha_{25}, 3 - \alpha_{1245})(-1)^{n_{\alpha_{23}}} \\ & {}_3F_2(\alpha_3, 2 - \alpha_{125}, 1 - \alpha_2, 2 - \alpha_{25}, 3 - \alpha_{1245}; 1) \\ & {}_3F_2(\bar{\alpha}_3, 2 - \bar{\alpha}_{125}, 1 - \bar{\alpha}_2, 2 - \bar{\alpha}_{25}, 3 - \bar{\alpha}_{1245}; 1), \\ I_3 &= a(\alpha_3, \alpha_5, 3 - \alpha_{12345}, 2 - \alpha_{145}, \alpha_{14}, -1 + \alpha_{1245})(-1)^{n_{\alpha_{15}}} \\ & {}_3F_2(\alpha_4, -2 + \alpha_{12345}, -1 + \alpha_{145}, \alpha_{14}, -1 + \alpha_{1245}; 1) \\ & {}_3F_2(\bar{\alpha}_4, -2 + \bar{\alpha}_{12345}, -1 + \bar{\alpha}_{145}, \bar{\alpha}_{14}, -1 + \bar{\alpha}_{1245}; 1), \end{aligned}$$

что завершает доказательство Теоремы 3.2. \square

§4. МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

В этом случае семейство функций (1) имеет следующий вид

$$D^\alpha(z_1, z_2) = \frac{(z_1 - z_2)^{\mu_1 \dots \mu_n}}{(z_1 - z_2)^{2(d/4+n/2+i\nu)}}, \quad (13)$$

где $\nu \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ и z_1, z_2 – векторы в d -мерном пространстве ($z_1, z_2 \in \mathbb{R}^d$). Символ $(z_1 - z_2)^{\mu_1 \dots \mu_n}$ означает бесследовую часть тензора $(z_1 - z_2)^{\mu_1} \dots (z_1 - z_2)^{\mu_n}$, например

$$(z_1 - z_2)^{\mu_1 \mu_2} = (z_1 - z_2)^{\mu_1} (z_1 - z_2)^{\mu_2} - \frac{1}{d} \delta^{\mu_1 \mu_2} (z_1 - z_2)^2.$$

Явное выражение в общем случае дается формулами (20) и (21). Таким образом, индекс α , как и в двумерном случае, содержит дискретные параметры и один непрерывный вещественный параметр ν . К дискретным параметрам относится число n , задающее ранг тензора $(z_1 - z_2)^{\mu_1 \dots \mu_n}$ и число, нумерующее независимые компоненты симметричного бесследового тензора ранге n . В двумерном случае независимых компонент всего две, так что остается только n . Пространство интегрирования \mathcal{V} совпадает с \mathbb{R}^d , и мера интегрирования имеет стандартный вид $\mathcal{D}z = d^d z$. При этом, как правило, мы будем опускать запись \mathbb{R}^d .

Цепное правило, или правило интегрирования цепочки, изображенное на Рис. 3, дает ответ для интеграла

$$\int d^d x \frac{x^{\mu_1 \dots \mu_n}}{x^{2\alpha}} \frac{(y-x)^{\mu_{n+1} \dots \mu_{n+m}}}{(y-x)^{2\beta}}, \quad (14)$$

где $n, m \in \mathbb{N}$. Однако для анализа рассматриваемой диаграммы общая формула не нужна, поэтому мы будем использовать лишь специальные случаи.

В частности, если положить $m = 0$ в формуле (14), то можно получить следующее цепное соотношение [30, 37]

$$\int d^d x \frac{x^{\mu_1 \dots \mu_n}}{x^{2\alpha}} \frac{1}{(y-x)^{2\beta}} = \pi^{d/2} \frac{a_n(\alpha) a_0(\beta)}{a_n(\alpha + \beta - d/2)} \frac{y^{\mu_1 \dots \mu_n}}{y^{2(\alpha + \beta - d/2)}}, \quad (15)$$

где

$$a_n(\alpha) = \frac{\Gamma(d/2 - \alpha + n)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Кроме этого нам понадобится еще только одно дополнительное соотношение. Положим $m = n$ в формуле (14), и свернем индекс μ_i с

индексом μ_{n+i} для $i \in \{1, \dots, n\}$. Получившийся интеграл вычисляется и ответ имеет вид

$$\begin{aligned} & \int d^d x \frac{x^{\mu_1 \dots \mu_n} (y-x)^{\mu_1 \dots \mu_n}}{x^{2\alpha} (y-x)^{2\beta}} \\ &= \frac{\pi^{d/2} a_n(\alpha) a_n(\beta)}{a_0(\alpha + \beta - d/2 - n)} \frac{\Gamma(n+d-2) \Gamma(d/2-1)}{2^n \Gamma(d-2) \Gamma(n+d/2-1)} \frac{1}{y^{2(\alpha+\beta-d/2-n)}}, \end{aligned} \quad (16)$$

где использовано стандартное правило суммирования по повторяющимся тензорным индексам. Сразу отметим, что по построению в левой части формулы (16) стоит сумма интегралов вида (14), так что коэффициент в правой части дается такой же суммой B -коэффициентов, изображенных на рис. 3. Таким образом, для вычисления рассматриваемой диаграммы нужны не отдельные B -коэффициенты, а их сумма, которая вычисляется в замкнутом виде.

Перейдем к выводу преобразования Меллина–Барнса, изображенного на Рис. 4. Функции (13) являются собственными функциями семейства коммутирующих операторов $Q(u)$ и образуют полную ортогональную систему (см. Приложение). Соотношения ортогональности и полноты имеют следующий явный вид

$$\int d^d x \frac{x^{\mu_1 \dots \mu_n}}{x^{2(d/4+n/2+i\nu)}} \frac{x^{\nu_1 \dots \nu_n}}{x^{2(d/4+m/2-i\lambda)}} = c_n \delta_{nm} \delta(\nu - \lambda) P_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n}, \quad (17)$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{c_n} \int_{\mathbb{R}} d\nu \frac{x^{\mu_1 \dots \mu_n}}{x^{2(d/4+n/2+i\nu)}} \frac{y^{\mu_1 \dots \mu_n}}{y^{2(d/4+n/2-i\nu)}} = \delta^{(d)}(x-y), \quad (18)$$

где константа c_n дается выражением

$$c_n = \frac{\pi^{d/2+1} n!}{2^{n-1} \Gamma(d/2+n)}, \quad (19)$$

и в (18) вновь подразумевается правило суммирования по повторяющимся тензорным индексам.

Оператор $P_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n}$ является проектором на бесследовые симметричные тензоры

$$x^{\mu_1 \dots \mu_n} = P_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} x^{\nu_1} \dots x^{\nu_n} \quad (20)$$

и определяется формулой [36, 37]

$$\begin{aligned} P_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} &= \sum_{p \geq 0} \frac{n! (-1)^p \Gamma(n-p+d/2-1)}{2^{2p} p! (n-2p)! \Gamma(n+d/2-1)} \\ &\times \widehat{S} \left(\delta^{\mu_1 \mu_2} \delta_{\nu_1 \nu_2} \dots \delta^{\mu_{2p-1} \mu_{2p}} \delta_{\nu_{2p-1} \nu_{2p}} \delta_{\nu_{2p+1} \dots \nu_n}^{\mu_{2p+1} \dots \mu_n} \right), \end{aligned} \quad (21)$$

где \widehat{S} – оператор симметризации по всем тензорным индексам. Используя полноту, можно получить представление Меллина–Барнса для скалярного пропагатора. Самый простой путь состоит в использовании разложения δ -функции (18) в формуле

$$\frac{1}{(x-y)^{2\alpha}} = \int d^d z \frac{1}{(x-z)^{2\alpha}} \delta^{(d)}(z-y),$$

что дает

$$\frac{1}{(x-y)^{2\alpha}} = \sum_{n \geq 0} \int_{\mathbb{R}} d\nu \frac{1}{c_n} \frac{y^{\mu_1 \dots \mu_n}}{y^{2(d/4+n/2-i\nu)}} \int d^d z \frac{1}{(z-y)^{2\alpha}} \frac{z^{\mu_1 \dots \mu_n}}{z^{2(d/4+n/2+i\nu)}}.$$

Далее, для вычисления интеграла по z используем правило интегрирования цепочки (15) и, таким образом, получим представление для пропагатора

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x-y)^{2\alpha}} \\ &= \sum_{n \geq 0} \int_{\mathbb{R}} d\nu \frac{\pi^{d/2}}{c_n} \frac{a_n(d/4+n/2+i\nu)}{a_n(\alpha-d/4+n/2+i\nu)} \frac{x^{\mu_1 \dots \mu_n}}{x^{2(\alpha-d/4+n/2+i\nu)}} \frac{y^{\mu_1 \dots \mu_n}}{y^{2(d/4+n/2-i\nu)}}. \end{aligned}$$

Последнее выражение инвариантно относительно трансляции на произвольный вектор, так что общая формула для преобразования Меллина–Барнса имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-y)^{2\alpha}} &= \sum_{n \geq 0} \int_{\mathbb{R}} d\nu \frac{\pi^{d/2}}{c_n} \frac{a_n(d/4+n/2+i\nu)}{a_n(\alpha-d/4+n/2+i\nu)} \\ &\times \frac{(x-z)^{\mu_1 \dots \mu_n}}{(x-z)^{2(\alpha-d/4+n/2+i\nu)}} \frac{(y-z)^{\mu_1 \dots \mu_n}}{(y-z)^{2(d/4+n/2-i\nu)}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Во избежание путаницы следует также отметить, что мера Меллина–Барнса содержит суммирование не только по параметру n , но и по тензорным значкам μ_i , $i \in \{1, \dots, n\}$.

Перейдем к вычислению диаграммы на рис. 2. Из-за отсутствия формулы для произвольной комбинации (14) мы не имеем возможности вычислить диаграмму в общем виде. По этой причине мы будем рассматривать функции (13) только скалярного вида, то есть когда $n = 0$. Оказывается, что в таком случае именно благодаря наличию соотношения (16) появляется возможность вычислить последний интеграл (3).

Вычисление двухпетлевого интеграла

$$I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \int \frac{d^d x d^d y}{x^{2\alpha_1} y^{2\alpha_2} (z-x)^{2\alpha_3} (z-y)^{2\alpha_4} (x-y)^{2\alpha_5}} \quad (23)$$

производится по общей схеме, изложенной во втором разделе. На первом шаге используем формулу (22) для пропагатора между вершинами x и z , дополнительно сместив обе вершины на вектор y . Интеграл принимает вид

$$I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \sum_{n \geq 0} \int_{\mathbb{R}} d\nu \frac{\pi^{d/2}}{c_n} \frac{a_n(d/4 + n/2 + i\nu)}{a_n(\alpha_3 + n/2 - d/4 + i\nu)} \int d^d x d^d y \frac{(x-y)^{\mu_1 \dots \mu_n} (z-y)^{\mu_1 \dots \mu_n}}{x^{2\alpha_1} y^{2\alpha_2} (x-y)^{2(\alpha_3 + n/2 - d/4 + i\nu)} (z-y)^{2(\alpha_4 + d/4 + n/2 - i\nu)}, \quad (24)$$

так что теперь оставшиеся интегралы по x и y можно сосчитать, используя правило цепочки.

Действительно, воспользуемся соотношением (15) и вычислим интеграл по переменной x . Тогда вторая строка формулы (24) переписывается в виде

$$(-1)^n \pi^{d/2} \frac{a_n(\alpha_{35} + n/2 - d/4 + i\nu) a_0(\alpha_1)}{a_n(\alpha_{135} + n/2 - 3d/4 + i\nu)} \int d^d y \frac{y^{\mu_1 \dots \mu_n}}{y^{\alpha_{1235} + n/2 - 3d/4 + i\nu}} \frac{(z-y)^{\mu_1 \dots \mu_n}}{(z-y)^{2(\alpha_4 + d/4 + n/2 - i\nu)}}.$$

Далее, согласно схеме из раздела 2, нужно вновь применить к каждому слагаемому из суммы по тензорным значкам цепное соотношение. Однако, из-за отсутствия последнего, мы добавим суммирование по тензорным индексам к интегрированию по переменной y , а затем воспользуемся соотношением (16). Тогда мы получим равенство

$$\begin{aligned} & \int d^d y \frac{y^{\mu_1 \dots \mu_n}}{y^{\alpha_{1235} + n/2 - 3d/4 + i\nu}} \frac{(z-y)^{\mu_1 \dots \mu_n}}{(z-y)^{2(\alpha_4 + d/4 + n/2 - i\nu)}} \\ &= \pi^{d/2} \frac{\Gamma(n+d-2) \Gamma(d/2-1)}{2^n \Gamma(d-2) \Gamma(n+d/2-1)} \\ & \times \frac{a_n(\alpha_{1235} + n/2 - 3d/4 + i\nu) a_n(\alpha_4 + d/4 + n/2 - i\nu)}{a_0(\alpha_{12345} - d)} \frac{1}{z^{2(\alpha_{12345} - d)}}. \end{aligned}$$

Таким образом, общий ответ для диаграммы имеет стандартный вид

$$I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \frac{C}{z^{2(\alpha_{12345}-d)}},$$

где

$$\begin{aligned} C &= \frac{\pi^{d-1}}{2} \frac{\Gamma(d/2-1)}{\Gamma(d-2)} \frac{a_0(\alpha_1) a_0(\alpha_3)}{a_0(\alpha_{12345}-d)} \\ &\times \sum_n \int_{\mathbb{R}} d\nu (-1)^n M_n \frac{a_n(d/4+n/2+i\nu)}{a_n(\alpha_3+n/2-d/4+i\nu)} \\ &\times \frac{a_n(\alpha_3+\alpha_5+n/2-d/4+i\nu)}{a_n(\alpha_{135}+n/2-3d/4+i\nu)} \\ &\times a_n(\alpha_{1235}+n/2-3d/4+i\nu) a_n(\alpha_4+d/4+n/2-i\nu), \end{aligned} \quad (25)$$

и для удобства введено дополнительное обозначение

$$M_n = \frac{1}{n!} (n+d/2-1) \Gamma(n+d-2). \quad (26)$$

По аналогии с двумерией будем вычислять интеграл по ν при помощи теории вычетов. Для того, чтобы разобраться со структурой полюсов, перепишем подынтегральное выражение в терминах гамма-функций

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(d/4+n/2-i\nu)}{\Gamma(d/4+n/2+i\nu)} \frac{\Gamma(\alpha_3+n/2-d/4+i\nu)}{\Gamma(3d/4+n/2-\alpha_3-i\nu)} \\ &\times \frac{\Gamma(3d/4+n/2-\alpha_{35}-i\nu)}{\Gamma(\alpha_{35}+n/2-d/4+i\nu)} \frac{\Gamma(\alpha_{135}+n/2-3d/4+i\nu)}{\Gamma(5d/4+n/2-\alpha_{135}-i\nu)} \\ &\times \frac{\Gamma(5d/4+n/2-\alpha_{1235}-i\nu)}{\Gamma(\alpha_{1235}+n/2-3d/4+i\nu)} \frac{\Gamma(d/4+n/2-\alpha_4+i\nu)}{\Gamma(\alpha_4+d/4+n/2-i\nu)}. \end{aligned}$$

Данное выражение имеет 6 бесконечных серий полюсов, три из них уходят в верхнюю полуплоскость, а три – в нижнюю. По аналогии с двумерией будем замыкать контур в верхней полуплоскости, так что переходим к перечислению соответствующих полюсов. Гамма функция имеет простой полюс в целых отрицательных числах

$$\Gamma(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{x+n} + \dots,$$

так что полюса в верхней полуплоскости возникают в трех случаях

$$\begin{cases} \nu = i(k_1 + \alpha_3 + n/2 - d/4); \\ \nu = i(k_2 + \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + n/2 - 3d/4); \\ \nu = i(k_3 + d/4 - \alpha_4 + n/2). \end{cases}$$

Вычисляя суммы вычетов, получаем окончательный ответ

$$C = \pi^d \frac{\Gamma(d/2 - 1)}{\Gamma(d - 2)} \frac{a_0(\alpha_1) a_0(\alpha_3)}{a_0(\alpha_{12345} - d)} (I_1 + I_2 + I_3), \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n M_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\alpha_3 + n + k)}{\Gamma(d/2 - \alpha_3 - k)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(d/2 + n - \alpha_5 + k)}{\Gamma(\alpha_5 - k)} \frac{\Gamma(\alpha_{15} - d/2 - k)}{\Gamma(d + n - \alpha_{15} + k)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(d + n - \alpha_{125} + k)}{\Gamma(\alpha_{125} - d/2 - k)} \frac{\Gamma(d/2 - \alpha_{34} - k)}{\Gamma(n + \alpha_{34} + k)} \frac{1}{\Gamma(d/2 + n + k)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n M_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(n - d/2 + \alpha_{135} + k)}{\Gamma(d - \alpha_{135} - k)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(d/2 - \alpha_{15} - k)}{\Gamma(n + \alpha_{15} + k)} \frac{\Gamma(n + \alpha_1 + k)}{\Gamma(d/2 - \alpha_1 - k)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(d/2 + n - \alpha_2 + k)}{\Gamma(\alpha_2 - k)} \frac{\Gamma(d - \alpha_{1345} - k)}{\Gamma(n - d + \alpha_{1345} + k)} \frac{1}{\Gamma(d/2 + n + k)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n M_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(d/2 + n - \alpha_4 + k)}{\Gamma(\alpha_4 - k)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(\alpha_{34} - d/2 - k)}{\Gamma(d + n - \alpha_{34} + k)} \frac{\Gamma(d + n - \alpha_{345} + k)}{\Gamma(\alpha_{345} - k)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(\alpha_{1345} - d - k)}{\Gamma(3d/2 + n - \alpha_{1345} + k)} \frac{\Gamma(3d/2 + n - \alpha_{12345} + k)}{\Gamma(\alpha_{12345} - d - k)} \frac{1}{\Gamma(d/2 + n + k)}. \end{aligned}$$

§5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы подробно рассмотрели применение самого простого интегрального преобразования к представлению разделенных переменных для вычисления двухпетлевой мастер-диаграммы. По всей видимости,

предложенный подход эквивалентен методу полиномов Гегенбауэра [35–38], так что наша работа носит скорее методический характер.

Следующий этап работы – сравнение полученных формул с уже имеющимися многочисленными результатами [30, 32, 33, 37] и, в частности, важной задачей является вычисление специальной мастер-диаграммы, возникающей в $1/N$ -разложении [30, 31, 34].

Предложенный метод может быть применен к вычислению лестничных диаграмм [27–29]. В многомерном случае все вычисления шаг в шаг повторяют вычисления, проведенные в двумерном [15] и четырехмерном [13] случаях. Соответствующие формулы приведены в Приложении.

Отметим интересные связи с другими исследованиями. Двумерное преобразование к разделенным переменным оказалось удобным инструментом при изучении операторов Рака в теории представлений группы $SL(2, \mathbb{C})$, которым посвящены работы Р.С.Исмагилова [19, 20] и [21]. Интегралам Барнса–Исмагилова и их обобщениям посвящены работы Ю.А.Неретина [22, 23], а в работе Неретина–Молчанова [24] по существу детально исследовано второе преобразование из иерархии преобразований к разделенным переменным.

Работа [18] посвящена применению преобразования к разделенным переменным для вывода двумерной версии интегралов Густафсона и интересным открытым вопросом является исследование связи метода разделения переменных с интегральными тождествами Доценко–Фатеева и Фатеева–Литвинова в конформной теории поля [25, 26].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Проектор. Введем проектор на пространство симметричных бесследовых тензоров

$$\psi'_{\mu_1 \dots \mu_n} = P_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} \psi_{\nu_1 \dots \nu_n}.$$

Исходный тензор $\psi_{\nu_1 \dots \nu_n}$ – симметричный, а после применения проектора получаем симметричный бесследовый тензор $\psi'_{\mu_1 \dots \mu_n}$. Определим полином вида

$$P(u, v) = \frac{1}{n!} P_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} u^{\mu_1} \dots u^{\mu_n} v^{\nu_1} \dots v^{\nu_n}$$

и перепишем предыдущее равенство в эквивалентном виде

$$\psi'(u) = P(u, \partial_v) \psi(v)$$

с помощью производящих функций

$$\psi'(u) = \psi'_{\mu_1 \dots \mu_n} u^{\mu_1} \dots u^{\mu_n}, \quad \psi(v) = \psi_{\mu_1 \dots \mu_n} v^{\mu_1} \dots v^{\mu_n}.$$

Требование бесследовости тензора $\psi'_{\mu_1 \dots \mu_n}$ эквивалентно соотношению $\Delta_u P(u, v) = 0$. Подстановка в уравнение $\Delta_u P(u, v) = 0$ общего разложения

$$P(u, v) = (uv)^n + a_1 (uv)^{n-2} u^2 v^2 + a_2 (uv)^{n-4} u^4 v^4 + \dots,$$

приводит к рекуррентным соотношениям на коэффициенты

$$a_p = -a_{p-1} \frac{(n-2p+2)(n-2p+1)}{2p(d+2n-2-2p)}. \quad (.28)$$

Решение, удовлетворяющее начальному условию $a_0 = 1$, имеет вид

$$a_p = \frac{n! (-1)^p \Gamma(n-p+d/2-1)}{2^{2p} p! (n-2p)! \Gamma(n+d/2-1)}, \quad (.29)$$

так что в итоге получаем формулу (21), где оператор \widehat{S} – оператор симметризации

$$\widehat{S} \psi_{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{1}{n!} \sum_{p \in S_n} \psi_{\mu_{p(1)} \dots \mu_{p(n)}}. \quad (.30)$$

Ортогональность. Перейдем к доказательству соотношения ортогональности

$$\int d^d x \frac{x^{\mu_1 \dots \mu_n}}{x^{2(d/4+n/2+i\nu)}} \frac{x^{\nu_1 \dots \nu_m}}{x^{2(d/4+m/2-i\lambda)}} = c_n \delta_{nm} \delta(\nu - \lambda) P_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n}. \quad (.31)$$

Дельта-функция $\delta(\nu - \lambda)$ возникает при интегрировании по радиальной переменной, поэтому удобно сразу отделить эту часть, перейдя к сферическим координатам

$$\int d^d x \frac{x^{\mu_1 \dots \mu_n} x^{\nu_1 \dots \nu_m}}{x^{2(d/2+(n+m)/2+i(\nu-\lambda))}} = \pi \delta(\lambda - \nu) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\Omega \widehat{x}^{\mu_1 \dots \mu_n} \widehat{x}^{\nu_1 \dots \nu_m},$$

где $d\Omega$ – стандартная мера на сфере, \widehat{x}^μ – вектор единичной длины, а интеграл по радиусу вычислен с помощью замены $r = e^p$

$$\int_0^\infty \frac{dr}{r} r^{2i(\lambda-\nu)} = \pi \delta(\lambda - \nu).$$

Таким образом, задача свелась к доказательству тождества

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\Omega \widehat{x}^{\mu_1 \dots \mu_n} \widehat{x}^{\nu_1 \dots \nu_m} = \frac{c_n}{\pi} \delta_{nm} P_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n}.$$

Перейдем к эквивалентному соотношению, свернув левую и правую части с комплексными векторами u и v , удовлетворяющими условию $u^2 = v^2 = 0$,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\Omega (\hat{x}u)^n (\hat{x}v)^m = \frac{c_n}{\pi} \delta_{nm} (uv)^n.$$

и докажем это соотношение с помощью формулы для гауссова интеграла

$$\int d^d x e^{-x^2 + xa} = \pi^{d/2} e^{\frac{a^2}{4}}.$$

Подставив $a = tu + sv$ и продифференцировав нужное число раз по t и s , получим

$$\int d^d x e^{-x^2} (xu)^n (xv)^m = \pi^{d/2} n! 2^{-n} \delta_{nm} (uv)^n.$$

Последний интеграл отличается от искомого числовым множителем. Его легко вычислить переходом в сферические координаты

$$\int d^d x e^{-x^2} (xu)^n (xv)^m = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d+n+m}{2}\right) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\Omega (\hat{x}u)^n (\hat{x}v)^m,$$

откуда следует, что коэффициент c_n имеет вид (19).

Полнота. Соотношение полноты для функций в d -мерном пространстве имеет вид ($x, y \in \mathbb{R}^d$)

$$\sum_{n \geq 0} \int_{\mathbb{R}} d\nu \frac{1}{c_n} \frac{x^{\mu_1 \dots \mu_n}}{x^{2(d/4+n/2-i\nu)}} \frac{y^{\mu_1 \dots \mu_n}}{y^{2(d/4+n/2+i\nu)}} = \delta^{(d)}(x-y). \quad (.32)$$

Дельта-функцию в правой части можно разложить в произведение радиальной и угловой частей

$$\delta^d(x-y) = \frac{1}{x^{2(d/2-1/2)}} \delta(|x|-|y|) \frac{1}{J} \delta(\hat{x}-\hat{y}), \quad (.33)$$

где $|x|$ — длина вектора x , $\hat{x} = x/|x|$ — единичный вектор, а J — якобиан перехода к d -мерным сферическим координатам.

Выражение в левой части равенства (.32) имеет похожую структуру. Интеграл по ν зависит только от длин векторов, а сумма по n связана с угловой частью. Интеграл по ν может быть вычислен с помощью замены $|x| = e^u$, $|y| = e^v$

$$\int_{\mathbb{R}} d\nu \frac{1}{|x|^{-2i\nu}} \frac{1}{|y|^{2i\nu}} = \pi \delta(u-v), \quad (.34)$$

так что остается доказать равенство для угловой части

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\pi}{c_n} \widehat{x}^{\mu_1 \dots \mu_n} \widehat{y}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{1}{J} \delta(\widehat{x} - \widehat{y}), \quad (.35)$$

которое при помощи формулы связи между полиномами Гегенбауэра и бесследовыми симметричными тензорами [36]

$$\widehat{x}^{\mu_1 \dots \mu_n} \widehat{y}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{n! \Gamma(d/2 - 1)}{2^n \Gamma(n + d/2 - 1)} C_n^{(d/2-1)}(\widehat{x} \cdot \widehat{y}), \quad (.36)$$

переписывается как соотношение полноты для полиномов Гегенбауэра

$$\sum_{n \geq 0} (2n + d - 2) C_n^{(d/2-1)}(\widehat{x} \cdot \widehat{y}) = (d - 2) S_{d-1} \frac{1}{J} \delta(\widehat{x} - \widehat{y}), \quad (.37)$$

где $S_{d-1} = 2\pi^{d/2} \Gamma^{-1}(d/2)$ – площадь сферы единичного радиуса в d -мерном пространстве.

Функция

$$G(x, y) = \frac{1}{(x - y)^{2(d/2-1)}}$$

является фундаментальным решением d -мерного уравнения Лапласа

$$-\Delta_x G(x, y) = (d - 2) S_{d-1} \delta^{(d)}(x - y), \quad (.38)$$

и производящей функцией для полиномов Гегенбауэра [36] (мультипольное разложение)

$$G(x, y) = \begin{cases} \sum_{n \geq 0} \frac{|x|^n}{|y|^{n+d-2}} C_n^{(d/2-1)}(\widehat{x} \cdot \widehat{y}), & |x| < |y|; \\ \sum_{n \geq 0} \frac{|y|^n}{|x|^{n+d-2}} C_n^{(d/2-1)}(\widehat{x} \cdot \widehat{y}), & |y| < |x|. \end{cases} \quad (.39)$$

После интегрирования равенства (.38) по $r = |x|$ в окрестности точки $|y|$, получим

$$-r^{d-1} \frac{\partial}{\partial r} G(x, y) \Big|_{|y|^{-0}}^{|y|^{+0}} = (d - 2) \frac{S_{d-1}}{J} \delta(\widehat{x} - \widehat{y}).$$

Подстановка в левую часть последнего равенства разложения (.39) немедленно приводит к тождеству (.37).

Оператор $Q(u)$ и лестничные диаграммы. Рассмотрим интегральный оператор $Q(u)$

$$[Q(u)\Phi](x) = \int d^d y \frac{1}{(x-y)^{2(d/2-u)} y^{2u}} \Phi(y).$$

Операторы $Q(u)$ образуют коммутативное семейство и для проверки коммутативности $Q(u)Q(v) = Q(v)Q(u)$ легче всего вычислить ядро интегрального оператора $Q(u)Q(v)$ при помощи соотношения звезда-треугольник [29, 30] и убедиться в том, что оно симметрично относительно перестановки $u \rightleftharpoons v$. Проверка того, что функции

$$\Psi^{\mu_1 \dots \mu_n}(x) = \frac{x^{\mu_1 \dots \mu_n}}{x^{2(d/4+n/2+i\nu)}}$$

являются собственными функциями, осуществляется прямым вычислением с использованием формулы интегрирования цепочки (15)

$$\begin{aligned} [Q(u)\Psi^{\mu_1 \dots \mu_n}](x) &= \tau(u, \nu, n) \Psi^{\mu_1 \dots \mu_n}(x), \\ \tau(u, \nu, n) &= \pi^{d/2} \frac{a_n(d/4 + n/2 + u + i\nu) a_0(d/2 - u)}{a_n(d/4 + n/2 + i\nu)}. \end{aligned}$$

Функции $\Psi^{\mu_1 \dots \mu_n}(x)$ образуют полную ортонормированную систему, так что можно выписать спектральное разложение для ядра интегрального оператора $Q(u)$ в виде

$$\begin{aligned} Q_u(x, y) &= \frac{1}{(x-y)^{2(d/2-u)} y^{2u}} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{c_n} \int_{\mathbb{R}} d\nu \tau(u, \nu, n) \frac{x^{\mu_1 \dots \mu_n}}{x^{2(d/4+n/2+i\nu)}} \frac{y^{\mu_1 \dots \mu_n}}{y^{2(d/4+n/2-i\nu)}}. \end{aligned}$$

В силу того, что операторы $Q(u)$ образуют коммутативное семейство и имеют общий набор собственных функций, предыдущая формула легко распространяется на произведение $Q(u_1) \dots Q(u_L)$

$$\begin{aligned} Q_{u_1 \dots u_L}(x, y) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{c_n} \int_{\mathbb{R}} d\nu \frac{x^{\mu_1 \dots \mu_n}}{x^{2(d/4+n/2+i\nu)}} \frac{y^{\mu_1 \dots \mu_n}}{y^{2(d/4+n/2-i\nu)}} \prod_{k=1}^L \tau(u_k, \nu, n). \quad (.40) \end{aligned}$$

С другой стороны, ядро произведения $Q(u_1) \cdots Q(u_L)$ является сверткой ядер соответствующих операторов и представляется интегралом

$$Q_{u_1 \dots u_L}(x, y) = \prod_{k=1}^{L-1} \int d^d x_k \frac{1}{(x_{k-1} - x_k)^{2(d/2 - u_k)}} \frac{1}{x_k^{2u_k}} \\ \times \frac{1}{(x_L - y)^{2(d/2 - u_L)}} \frac{1}{y^{2u_L}},$$

где $x_0 = x$. Данный интеграл соответствует так называемой лестничной Фейнмановской диаграмме. Формула (.40) дает для него замкнутое выражение в виде суммы по n и интеграла по ν . С помощью соотношения (.36) получаем эквивалентное представление через полиномы Гегенбауэра

$$Q_{u_1 \dots u_L}(x, y) = \frac{\Gamma(d/2 - 1)}{2\pi^{d/2 - 1}} \sum_{n \geq 0} (d/2 - 1 + n) \\ \times \int_{\mathbb{R}} d\nu \frac{C_n^{(d/2 - 1)}(\hat{x} \cdot \hat{y})}{x^{2(d/4 + i\nu)} y^{2(d/4 - i\nu)}} \prod_{k=1}^L \tau(u_k, \nu, n).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L. D. Faddeev, *How algebraic Bethe ansatz works for integrable model*, Quantum symmetries/Symmetries Quantiques, Proc. Les-Houches symmer school, LXIV, Eds. A. Connes, K. Kawedzki, J. Zinn-Justin. North Holland, 1998, 149–211.
2. P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, *Quantum spectral transform method. Recent developments*. — Lect. Notes Phys. **151** (1982), 61.
3. E. K. Sklyanin, *Quantum inverse scattering method. Selected topics*, in: Quantum Group and Quantum Integrable Systems: Nankai Lectures on Mathematical Physics: Nankai Institute of Mathematics, China 2-18 April 1991 (World Scientific 1992), pp. 63-97 [hep-th/9211111].
4. E. K. Sklyanin, *The quantum Toda chain*. — Lect. Notes in Phys. **226** (1985), 196–233.
5. E. K. Sklyanin, *Separation of variables – new trends*. — Prog. Theor. Phys. Suppl. **118** (1995), 35.
6. S. Kharchev, D. Lebedev, *Eigenfunctions of $GL(N, R)$ Toda chain: The MellinBarnes representation*. — Pis'ma v ZhETF **71** (2000), 338–343.
7. A. Gerasimov, S. Kharchev, D. Lebedev, *Representation theory and quantum inverse scattering method: the open Toda chain and the hyperbolic Sutherland model*. — IMRN 2004.17 (2004), pp. 823–854.

8. L. N. Lipatov, *High-energy asymptotics of multicolor QCD and two-dimensional conformal field theories*. — Phys. Lett. **B 309** (1993), 394–396.
9. L. N. Lipatov, *High-energy asymptotics of multicolor QCD and exactly solvable lattice models*. — Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **59** (1994), 571–574 (JETP Lett. **59** (1994), 596–599).
10. L. D. Faddeev, G. P. Korchemsky, *High-energy QCD as a completely integrable model*. — Phys. Lett. **B 342** (1995), 311–322.
11. S. E. Derkachov, G. P. Korchemsky, A. N. Manashov, *Noncompact Heisenberg spin magnets from high-energy QCD: 1. Baxter Q operator and separation of variables*. — Nucl. Phys. **B 617** (2001), 375.
12. O. Gurdogan, V. Kazakov, *New Integrable 4D Quantum Field Theories from Strongly Deformed Planar $N = 4$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*. — Phys. Rev. Lett. **117**, 201602 (2016), arXiv:1512.06704.
13. V. Kazakov, E. Olivucci, *Bi-scalar integrable CFT at any dimension*. — Phys.Rev.Lett. **121** (2018) 13, 131601, e-Print: 1801.09844.
14. B. Basso, L. J. Dixon, *Gluing Ladder Feynman Diagrams into Fishnets*. — Phys. Rev. Lett. **119**, 071601 (2017), arXiv:1705.03545
15. S. Derkachov, V. Kazakov, E. Olivucci, *Basso-Dixon Correlators in Two-Dimensional Fishnet CFT*, J. High Energy Physics, 2019.
16. S. Derkachov, E. Olivucci, *Exactly solvable single-trace four point correlators in χ CFT₄*, e-Print: 2007.15049.
17. B. Basso, G. Ferrando, V. Kazakov, D. Zhong, *Thermodynamic Bethe Ansatz for Fishnet CFT*. — Phys.Rev.Lett. **125** (2020) 9, 091601, e-Print: 1911.10213.
18. S. E. Derkachov, A. N. Manashov, P. A. Valinevich, *$SL(2, C)$ Gustafson integrals*. — SIGMA **14** (2018), 030, arXiv:1711.07822.
19. R. S. Ismagilov, *On Racah operators*. — Funct. Anal. Appl. **40** (2006), 222–224.
20. R. S. Ismagilov, *Racah operators for principal series of representations of the group $SL(2, C)$* . — Sb. Math. **198** (2007), 369–381.
21. S. E. Derkachov, V. P. Spiridonov, *The $6j$ -symbols for the $SL(2, C)$ group*. — Theoret. and Math. Phys. **198** (2019), 29–47, arXiv:1711.07073.
22. Y. A. Neretin, *An analog of the Dougall formula and of the de Branges–Wilson integral*. — Ramanujan J., to appear, arXiv:1812.07341.

23. Y. A. Neretin, *Barnes-Ismagilov integrals and hypergeometric functions of the complex field*. — SIGMA **16** (2020), 072, arXiv:1910.10686
24. V. F. Molchanov, Yu. A. Neretin, *A pair of commuting hypergeometric operators on the complex plane and bispectrality*, J. Spectr. Theory, to appear, arXiv:1812.06766.
25. V. S. Dotsenko, V. A. Fateev, *Four-point correlation functions and the operator algebra in 2D conformal invariant theories with central charge $C = 1$* . — Nuclear Phys. **B 251** (1985), 691–734.
26. V. A. Fateev, A. V. Litvinov, *Multipoint correlation functions in Liouville field theory and minimal Liouville gravity*. — Theoret. and Math. Phys. **154** (2008), 454–472, arXiv:0707.1664.
27. N. Usyukina, A. I. Davydychev, *Exact results for three and four point ladder diagrams with an arbitrary number of rungs*. — Phys. Lett. **B 305** (1993), 136.
28. D. J. Broadhurst, *Summation of an infinite series of ladder diagrams*. — Phys. Lett. **B 307** (1993), 132.
29. A. P. Isaev, *Multi-loop Feynman integrals and conformal quantum mechanics*. — Nucl. Phys. **B 662** (2003), 461 [arXiv:hep-th/0303056]. A. P. Isaev, *Operator approach to analytical evaluation of Feynman diagrams*. — Phys.Atom.Nucl. **71** (2008), 914–924. arXiv:0709.0419.
30. А. Н. Васильев, *Квантовополовая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике 774 с.*, Изд.ПИЯФ, Санкт-Петербург, 1998.
31. A. N. Vasiliev, Y. M. Pismak, J. R. Honkonen, *1/N Expansion: Calculation of the Exponents η and ν in the Order $1/N^2$ for Arbitrary Number of Dimensions*. — Theor. Math. Phys. **47** (1981), 465 [Teor. Mat. Fiz. **47** (1981) 291].
32. A. G. Grozin, *Massless two-loop self-energy diagram: Historical review*. — Int. J. Mod.Phys. **A 27** (2012) 1230018, arXiv:1206.2572.
33. I. Bierenbaum, S. Weinzierl, *The Massless two loop two point function*. — Eur. Phys. J. **C 32** (2003) 67, arXiv:hep-ph/0308311.
34. D. J. Broadhurst, A. V. Kotikov, *Compact analytical form for nonzeta terms in critical exponents at order $1/N^3$* . — Phys. Lett. **B 441** (1998) 345, arXiv:hep-th/9612013.
35. K. G. Chetyrkin, A. L. Kataev, F. V. Tkachov, *New Approach to Evaluation of Multiloop Feynman Integrals: The Gegenbauer Polynomial x Space Technique*. — Nucl.Phys. **B 174** (1980) 345.
36. A. V. Kotikov, *The Gegenbauer polynomial technique: The Evaluation of a class of Feynman diagrams*. — Phys. Lett. **B 375** (1996) 240, arXiv:hep-ph/9512270.
37. A. V. Kotikov, S. Teber, *Multi-loop techniques for massless Feynman diagram calculations*. — Phys.Part.Nucl. **50** (2019) 1, 1–41, e-Print: 1805.05109.
38. Oliver Schnetz, *Quantum periods: A Census of ϕ^4 -transcendentals*. — Commun.Num.Theor.Phys. **4** (2010) 1–48, e-Print: 0801.2856.

Derkachev S. E., Ivanov A. V., Shumilov L. A. Mellin–Barnes transformation for two-loop master-diagrams.

In the paper, we obtain an expression for a two-loop master-diagram by using the Mellin–Barnes transformation. In the two-dimensional case we

managed to factorize the answer and write it as a bilinear combination of hypergeometric functions ${}_3F_2$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
наб. р. Фонтанки 27, Санкт-Петербург, 191023
E-mail: derkach@pdmi.ras.ru
E-mail: regul1@mail.ru

Поступило 16 октября 2020 г.

Академический университет им. Ж. И. Алферова
ул. Хлопина 8, Санкт-Петербург, 194021
E-mail: la_shum@mail.ru