

П. А. Валиневич

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МЕЛЛИНА–БАРНСА ДЛЯ $SL(2, \mathbb{C})$ -МАГНЕТИКА

### §1. ВВЕДЕНИЕ

Магнетик с группой симметрии  $SL(2, \mathbb{C})$  изучался многими авторами [1–4] как по причине фундаментального интереса, так и в связи с работами Л. Н. Липатова [11] об амплитудах рассеяния в физике высоких энергий. Поскольку данная модель является интегрируемой, к ней может быть применен весь аппарат квантового метода обратной задачи рассеяния [9, 10]. Для нее были построены все основные объекты, которые представляют интерес:  $Q$ -оператор Бакстера, универсальная  $R$ -матрица и др.

В данной работе будут изучаться собственные функции отдельных элементов матрицы монодромии. Один из методов построения таких собственных функций [5] дает для них интегральные представления, которые мы будем называть представлением Гаусса–Гивенталья. Между тем для цепочки Тоды (более простой модели) в работах [6, 7] были получены другие представления для тех же собственных функций в виде интегралов Меллина–Барнса.

В данной работе мы обобщаем результаты [6, 7] на случай  $SL(2, \mathbb{C})$ -магнетика и доказываем, что они совпадают с ранее построенными функциями [5].

### §2. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОСНОВНОЙ УНИТАРНОЙ СЕРИИ И $SL(2, \mathbb{C})$ - МАГНЕТИК

Для группы  $SL(2, \mathbb{C})$  существует серия бесконечномерных представлений [8], реализуемых на пространстве функций комплексного переменного  $z$ . Для элемента группы

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

---

*Ключевые слова:* интегралы Меллина–Барнса.

Работа была поддержана грантом РФФИ No. 18-01-00271.

действие оператора представления  $T(g)$  на функцию  $f(z, \bar{z})$  дается формулой

$$T(g)f(z, \bar{z}) = (a - cz)^{-2l}(\bar{d} - \bar{b}\bar{z})^{-2\bar{l}}f\left(\frac{-c + az}{d - bz}, \frac{-\bar{c} + \bar{a}\bar{z}}{\bar{d} - \bar{b}\bar{z}}\right). \quad (1)$$

Оно определяется парой чисел  $(l, \bar{l})$  и будет унитарным относительно скалярного произведения  $(f, g) = \int d^2z f(z)\overline{g(z)}$  при условии

$$l = \frac{1+n}{2} + i\nu; \quad \bar{l} = \frac{1-n}{2} + i\nu; \quad 2n \in \mathbb{Z}, \quad \nu \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Генераторы соответствующей алгебры Ли  $sl_2(\mathbb{C})$  определяются стандартным образом как коэффициенты разложения элемента группы в окрестности единицы. Из (1) они имеют вид

$$S_+ = z^2\partial_z + 2lz; \quad S_3 = z\partial_z + l; \quad S_- = -\partial_z \quad (3)$$

$$\bar{S}_+ = \bar{z}^2\partial_{\bar{z}} + 2\bar{l}\bar{z}; \quad \bar{S}_3 = \bar{z}\partial_{\bar{z}} + \bar{l}; \quad \bar{S}_- = -\partial_{\bar{z}} \quad (4)$$

и подчиняются стандартным коммутационным соотношениям

$$[S_+, S_-] = 2S_3; \quad [S_3, S_{\pm}] = \pm S_{\pm}; \quad [\bar{S}_+, \bar{S}_-] = 2\bar{S}_3; \quad [\bar{S}_3, \bar{S}_{\pm}] = \pm \bar{S}_{\pm}.$$

Генераторы  $S_{\pm}, S_3$  будем называть голоморфными,  $\bar{S}_{\pm}, \bar{S}_3$  – антиголоморфными. Эти наборы генераторов коммутируют и связаны друг с другом с помощью сопряжения:  $(S_{\pm})^+ = -\bar{S}_{\pm}$ ;  $(S_3)^+ = -\bar{S}_3$ .

Рассмотрим спиновую цепочку (магнетик), состоящую из  $N$  узлов, с каждым из которых свяжем пространство представления основной унитарной серии  $SL(2, \mathbb{C})$ . Будем рассматривать случай, когда во всех узлах параметры  $l$  и  $\bar{l}$  одинаковы (т.е. будем иметь дело с однородной цепочкой), а граничные условия положим периодическими.

Гильбертовым пространством модели является  $L_2(\mathbb{C}^N)$ , элементы которого  $f(z_1, \dots, z_N, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N)$  в дальнейшем для краткости будем обозначать  $f(z)$ .

Для каждого узла определим локальные  $L$ -операторы: голоморфный  $L$  и антиголоморфный  $\bar{L}$ :

$$L(u) = \begin{pmatrix} u + S_3 & S_- \\ S_+ & u - S_3 \end{pmatrix}; \quad \bar{L}(\bar{u}) = \begin{pmatrix} \bar{u} + \bar{S}_3 & -\bar{S}_- \\ \bar{S}_+ & \bar{u} - \bar{S}_3 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

зависящие от дополнительной переменной – спектрального параметра  $u$ .

Матрицы монодромии для голоморфного и антиголоморфного секторов определяются следующим образом:

$$T_N(u) = L_1(u) \dots L_N(u) = \begin{pmatrix} A_N(u) & B_N(u) \\ C_N(u) & D_N(u) \end{pmatrix}; \quad (6)$$

$$\bar{T}_N(\bar{u}) = \bar{L}_1(\bar{u}) \dots \bar{L}_N(\bar{u}) = \begin{pmatrix} \bar{A}_N(\bar{u}) & \bar{B}_N(\bar{u}) \\ \bar{C}_N(\bar{u}) & \bar{D}_N(\bar{u}) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где  $L_k(u)$  означает  $L$ -оператор, принадлежащий  $k$ -му узлу. Как видно из сказанного, выражения для голоморфного и антиголоморфного секторов отличаются только заменой  $S$  на  $\bar{S}$ ,  $l$  на  $\bar{l}$ ,  $z$  на  $\bar{z}$  и т.п. Поэтому далее в тексте мы будем приводить формулы только для голоморфной части.

Матрицы монодромии задают набор интегралов движения модели. Для нахождения их общих собственных функций существует большое количество приемов в рамках квантового метода обратной задачи рассеяния [9, 10].

В данной же работе нас будут интересовать собственные функции операторов  $A_N$  и  $\bar{A}_N$ :

$$A_N(u)\psi_\lambda(z) = \prod_{k=1}^N (u - \lambda_k)\psi_\lambda(z); \quad \bar{A}_N(\bar{u})\psi_\lambda(z) = \prod_{k=1}^N (\bar{u} - \bar{\lambda}_k)\psi_\lambda(z), \quad (8)$$

где  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_N)$  – набор собственных значений функции. Задачи такого типа встречаются, например, в физике высоких энергий при изучении амплитуд рассеяния (см., например, [12]).

Из коммутационных соотношений  $A(u)$  и  $B(u)$  следует, что

$$B(\lambda_k)\psi_\lambda(z) \sim \psi_{\lambda+e_k}(z),$$

где  $\lambda + e_k = (\lambda_1, \dots, \lambda_k + 1, \dots, \lambda_N, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_N)$ . Коэффициент пропорциональности может быть выбран произвольно, и его выбор фиксирует нормировку функции  $\psi_\lambda(z)$ . Мы выберем её следующим образом:

$$B(\lambda_k)\psi_\lambda(z) = (-1)^N (\lambda_k + l)(\lambda_k - l + 1)\psi_{\lambda+e_k}(z). \quad (9)$$

Из (9) с помощью интерполяции получается формула для действия  $B(u)$  на  $\psi_\lambda(z)$  при произвольном значении спектрального параметра  $u$ :

$$B(u)\psi_\lambda(z) = (-1)^N \sum_{k=1}^N (\lambda_k + l)(\lambda_k - l + 1)\psi_{\lambda+e_k}(z) \prod_{m \neq k} \frac{u - \lambda_m}{\lambda_k - \lambda_m}. \quad (10)$$

Аналогичные формулы имеют место и для антиголоморфного сектора.

В следующих двух разделах будет приведено два различных метода построения этих собственных функций.

### §3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГАУССА–ГИВЕНТАЛЯ

Представление Гаусса–Гивенталья для собственных функций матричных элементов  $T(u)$  описано в работе [5].

Введем более удобные обозначения для локальных  $L$  операторов (см. (5)):

$$L_k(u) = \begin{pmatrix} u_1 + 1 + z_k \partial_k & -\partial_k \\ z_k(z_k \partial_k + u_1 - u_2 + 1) & u_2 - z_k \partial_k \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Здесь введены обозначения  $u_1 = u + l - 1$ ,  $u_2 = u - l$ , где  $l$  – спин представления. Спин и спектральный параметр входят в  $L$ -оператор только в таких комбинациях, поэтому мы будем писать  $L = L(u_1, u_2)$ .

Матрица монодромии в этих обозначениях записывается как

$$\begin{aligned} T_N(u_1, u_2) &= L_1(u_1, u_2) L_2(u_1, u_2) \dots L_N(u_1, u_2) \\ &= \begin{pmatrix} A(u_1, u_2) & B(u_1, u_2) \\ C(u_1, u_2) & D(u_1, u_2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для  $SL(2, \mathbb{C})$ -магнетика существует универсальная  $R$ -матрица, удовлетворяющая уравнению Янга–Бакстера [13]

$$\mathcal{R}_{12}(u - v) L_1(u_1, u_2) L_2(v_1, v_2) = L_2(v_1, v_2) L_1(u_1, u_2) \mathcal{R}_{12}(u - v), \quad (13)$$

где  $L$  – операторы действуют в разных пространствах представления  $SL(2, \mathbb{C})$  и в общем вспомогательном пространстве, т. е. перемножаются как матрицы. Оператор  $\mathcal{R}(u - v)$  действует в тензорном произведении произвольных представлений и зависит от разностей  $u_i - v_j$ . Если  $L_1$  действует по переменной  $z_1$ , а  $L_2$  – по переменной  $z_2$ , то  $\mathcal{R}(u - v)$  будет оператором, действующим по переменным  $z_1, z_2$ .

Оказывается, его можно искать в виде

$$\mathcal{R}_{12}(u - v) = P_{12} R_{12}^{(1)}(u_1 - v_1, u_1 - u_2) R_{12}^{(2)}(u_1 - v_2, u_2 - v_2), \quad (14)$$

где  $P_{12}$  – оператор перестановки (заменяет  $z_1$  на  $z_2$  и наоборот), а

$$\begin{aligned} &R_{12}^{(1)}(u_1 - v_1, u_1 - v_2) L_1(u_1, u_2) L_2(v_1, v_2) \\ &= L_1(v_1, u_2) L_2(u_1, v_2) R_{12}^{(1)}(u_1 - v_1, u_1 - v_2), \end{aligned} \quad (15)$$

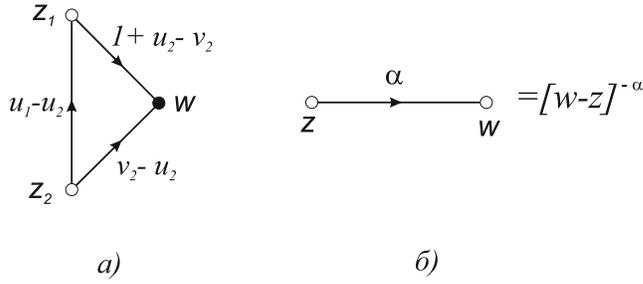


Рис. 1. а) Диаграммное представление оператора  $R_{12}^{(2)}$ , уравнение (17); б) Обозначение линии на диаграмме.

$$\begin{aligned}
 &R_{12}^{(2)}(u_1 - v_2, u_2 - v_2)L_1(u_1, u_2)L_2(v_1, v_2) \\
 &= L_1(u_1, v_2)L_2(v_1, u_2)R_{12}^{(2)}(u_1 - v_2, u_2 - v_2). \tag{16}
 \end{aligned}$$

Для операторов  $R^{(1,2)}$  существуют удобные интегральные представления [5, 13], из которых нам понадобится следующее:

$$\begin{aligned}
 &\left[ R_{12}^{(2)}(u_1 - v_2, u_2 - v_2)\Phi \right](z_1, z_2) \\
 &= \int d^2w \frac{[z_1 - z_2]^{u_2 - u_1}}{[w - z_1]^{1+u_2 - v_2} [w - z_2]^{v_2 - u_1}} \Phi(w, z_2). \tag{17}
 \end{aligned}$$

Здесь введено сокращенное обозначение, которое будет использоваться повсеместно:  $[z]^\alpha = z^\alpha \bar{z}^{\bar{\alpha}}$ , где подразумевается, что  $\alpha - \bar{\alpha} \in \mathbb{Z}$ , чтобы функция  $[z]^\alpha$  была однозначной.

Для ядра этого оператора будем использовать графическое представление, приведенное на рис 1а, где линия обозначает функцию, изображенную на рис 1б. Полые кружки обозначают внешние переменные, закрашенные – переменные, по которым ведется интегрирование (на рис 1а это переменная  $w$ ).

Такое графическое представление удобно тем, что для интегралов, содержащих функции вида  $[w - z]^\alpha$  существует целое семейство соотношений [13], которые имеют компактное диаграммное представление. На рис. 2 приведены основные соотношения, которые понадобятся в дальнейших вычислениях. На них в правой части написан множитель, который возникает перед диаграммой. Функция  $a(\alpha)$  является

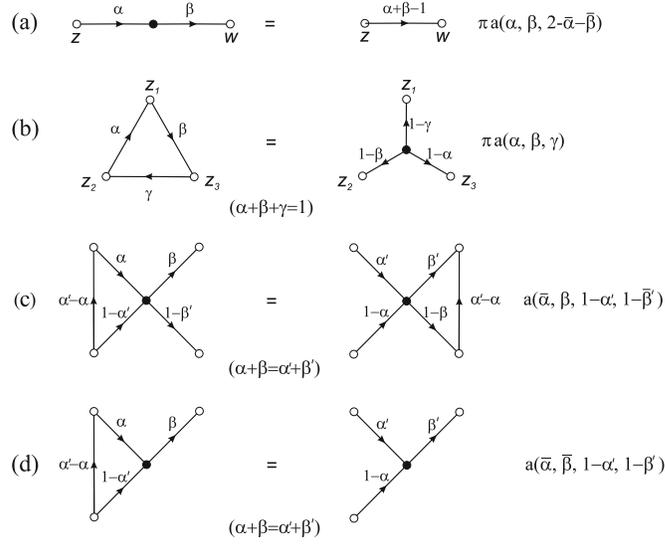


Рис. 2. Правила диаграммной техники.

гамма-функцией на поле комплексных чисел [14, 15]:

$$a(\alpha) = \frac{\Gamma(1-\bar{\alpha})}{\Gamma(\alpha)}; \quad a(\bar{\alpha}) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\bar{\alpha}}, \quad (18)$$

где аргументом функции является пара чисел  $\alpha, \bar{\alpha}$ , удовлетворяющих условию  $\alpha - \bar{\alpha} \in \mathbb{Z}$ , но для краткости мы будем писать только “голоморфный” аргумент. Кроме того,  $a(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = a(\alpha)a(\beta)a(\gamma)\dots$ .

Вернемся к вопросу построения собственных функций  $A(u_1, u_2) = T_{11}(u_1, u_2)$ . Для этого нам понадобится матрица монодромии с измененным параметром в первом узле:

$$\begin{aligned} T_N(u_1, u_2|v) &= L_1(u_1, v)L_2(u_1, u_2) \dots L_N(u_1, u_2) \\ &= \begin{pmatrix} A(u_1, u_2) & B(u_1, u_2) \\ * & * \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (19)$$

Второе равенство означает, что при изменении параметра  $u_2$  в первом узле элементы в первой строке матрицы монодромии не меняются. Элементы же во второй строке меняются и они обозначены звездочками, так как нам не понадобятся.

Рассмотрим также оператор

$$\begin{aligned} & \mathbf{\Lambda}_N(u_1, u_2|v) \\ &= R_{12}^{(2)}(u_1 - v, u_2 - v)R_{23}^{(2)}(u_1 - v, u_2 - v) \dots R_{N-1, N}^{(2)}(u_1 - v, u_2 - v). \end{aligned} \quad (20)$$

С помощью (15) можно получить следующее коммутационное соотношение

$$T_N(u_1, u_2|v)\mathbf{\Lambda}_N(u_1, u_2|v) = T_{N-1}(u_1, u_2)L_N(u_1, v)\mathbf{\Lambda}_N(u_1, u_2|v). \quad (21)$$

Его матричные элементы “11” и “12” будут иметь вид

$$\begin{aligned} A_N(u_1, u_2)\mathbf{\Lambda}_N(u_1, u_2|v) &= \mathbf{\Lambda}_N(u_1, u_2|v)(A_{N-1}(u_1, u_2)(u + l + z_N\partial_N) \\ &+ B_{N-1}(u_1, u_2)z_N(z_N\partial_N + u_1 - v + 1)) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} B_N(u_1, u_2)\mathbf{\Lambda}_N(u_1, u_2|v) &= \mathbf{\Lambda}_N(u_1, u_2|v)(A_{N-1}(u_1, u_2)(-\partial_N) \\ &+ B_{N-1}(u_1, u_2)(v - z_N\partial_N)). \end{aligned} \quad (23)$$

Подействуем правой и левой частью (22) на функцию  $\tilde{\Psi}(z_1, \dots, z_N)$  со специальной зависимостью от последней переменной:

$$\tilde{\Psi}(z_1, \dots, z_N) = \Psi(z_1, \dots, z_{N-1})[z_N]^{v-u_1-1} \quad (24)$$

и получим следующее соотношение

$$\begin{aligned} & A_N(u_1, u_2)\mathbf{\Lambda}_N(u_1, u_2|v)\tilde{\Psi}(z_1, \dots, z_N) \\ &= v\mathbf{\Lambda}_N(u_1, u_2|v)[z_N]^{v-u_1-1}A_{N-1}(u_1, u_2)\Psi(z_1, \dots, z_{N-1}). \end{aligned} \quad (25)$$

Из него видно, что если  $\Psi(z_1, \dots, z_{N-1})$  – собственная функция  $A_{N-1}(u_1, u_2)$ , то  $\mathbf{\Lambda}_N(u_1, u_2|v)[z_N]^{v-u_1-1} \cdot \Psi(z_1, \dots, z_{N-1})$  будет собственной функцией  $A_N(u_1, u_2)$ .

Если теперь представим  $v$  в виде  $v = u - \lambda$ , то получим, что

$$\begin{aligned} & A_N(u_1, u_2)\Lambda_N(\lambda)\Psi(z_1, \dots, z_{N-1}) \\ &= (u - \lambda)\Lambda_N(\lambda)A_{N-1}(u_1, u_2)\Psi(z_1, \dots, z_{N-1}), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\Lambda_N(\lambda) = r(\lambda) [z_N]^{v-u_1-1} \mathbf{\Lambda}(u_1, u_2|v) \Big|_{v=u-\lambda}. \quad (27)$$

В последней формуле правая часть не зависит от  $u$  благодаря специальной зависимости  $R^{(2)}$  от своих параметров, см. (20) и (17).

Нормировочный множитель  $r(\lambda)$  имеет вид

$$r_k(\lambda_k) = (a(l - \lambda_k)a(\bar{l} + \bar{\lambda}_k))^k \quad (28)$$

и нужен для того, чтобы было выполнено перестановочное соотношение

$$\Lambda_k(\lambda_k)\Lambda_{k-1}(\lambda_{k-1}) = \Lambda_k(\lambda_{k-1})\Lambda_{k-1}(\lambda_k), \quad (29)$$

которое обеспечивает симметричность функций  $\Psi_\lambda(z)$  относительно перестановки параметров  $\lambda$ .

Таким образом, собственная функция  $\Psi_{\lambda_1 \dots \lambda_N}(z)$  оператора  $A(u)$  имеет вид

$$\Psi_{\lambda_1 \dots \lambda_N}(z) = \Lambda_N(\lambda_N)\Lambda_{N-1}(\lambda_{N-1}) \dots \Lambda_1(\lambda_1). \quad (30)$$

Последний оператор в предыдущей формуле – это просто  $[z_1]^{-l-\lambda_1}$ . Графическое представление  $\Lambda_N(\lambda)$  для  $N = 4$  приведено на рис. 3а, а на рис. 3б изображена собственная функция  $\Psi_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(z_1, z_2, z_3, z_4)$ . На рисунке переменные, по которым производится интегрирование, обозначены закрашенными кружками. Параметры линий  $\alpha = 1 - l + \lambda$ ,  $\beta = 1 - l - \lambda$ ,  $\gamma = 2l - 1$ .

#### §4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МЕЛЛИНА–БАРНСА

**4.1. Общий вид собственной функции.** Рассмотрим теперь другой метод построения собственных функций  $A(u)$ , который приведет к интегральным представлениям другого типа – представлениям в виде интегралов Меллина–Барнса. Такого типа формулы были получены для цепочки Тоды в работах Харчева и Лебедева [6, 7]. Наши вычисления для  $SL(2, \mathbb{C})$  магнетика во многом аналогичны.

Пусть нам известна собственная функция  $\phi_\gamma(z')$  для  $N - 1$  узла. Для кратности мы ввели обозначение для аргумента

$$z' = (z_1, \dots, z_{N-1}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{N-1}),$$

а набор параметров  $\gamma$

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}, \bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_{N-1}).$$

Эта функция удовлетворяет условиям

$$A_{N-1}(u)\phi_\gamma(z') = \prod_{k=1}^{N-1} (u - \gamma_k)\phi_\gamma(z'); \quad (31)$$

$$B_{N-1}(\gamma_k)\phi_\gamma(z') = (-1)^{N-1}(\gamma_k + l)(\gamma_k - l + 1)\phi_{\gamma+e_k}(z') \quad (32)$$

и аналогичным уравнениям для антиголоморфного сектора (про который в дальнейшем будем упоминать редко, т.к. для него все вычисления практически не отличаются).

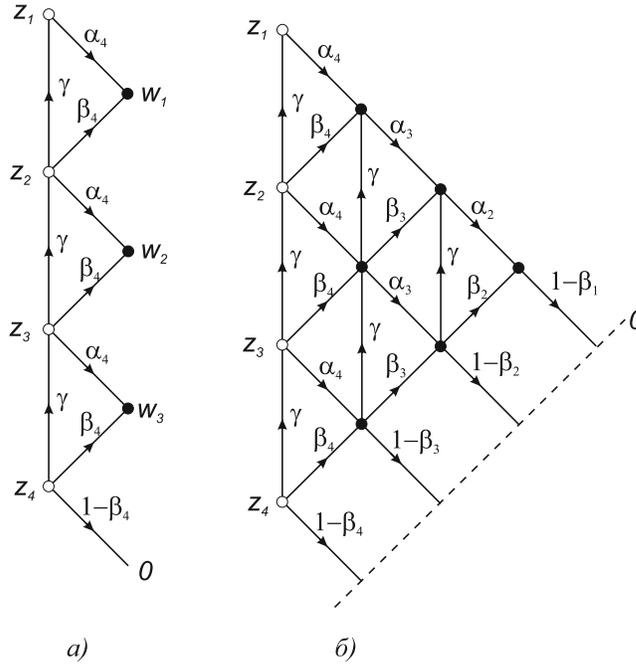


Рис. 3. а) Ядро оператора  $\Lambda_k(\lambda_k)$  для  $k = 4$ ; б) Функция  $\Psi_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(z)$  ( $N = 4$ ).

Собственную функцию  $\psi_\lambda(z)$  для  $N$  узлов, удовлетворяющую (8) и (9) будем искать в виде

$$\psi_\lambda(z) = \int D^{N-1}\gamma \mu_\gamma D_\gamma \phi_\gamma(z') [z_N]^{t-s-l}. \quad (33)$$

В этой формуле использовано много новых обозначений; определим их.

Мера интегрирования  $D^{N-1}\gamma$  понимается следующим образом: если, согласно (2),  $\gamma_j = \frac{n_j}{2} + i\nu_j$ ;  $\tilde{\gamma}_j = -\frac{n_j}{2} + i\nu_j$ , то

$$D^{N-1}\gamma = D\gamma_1 \dots D\gamma_{N-1},$$

$$D\gamma_j = \sum_{n_j=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_j, \quad (34)$$

и суммирование по  $n_j$  ведется либо по всем целым числам (для целого  $n_j$ ), либо по всем полуцелым (для полуцелого  $n_j$ ).

Мера интегрирования  $\mu_\gamma$  имеет вид

$$\mu_\gamma = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{N-1} a(\gamma_i - \gamma_j) a(\gamma_j - \gamma_i), \quad (35)$$

где функция  $a(\gamma)$  дается формулой (18). Из определения (35) легко доказать, что

$$\mu_{\gamma - e_k} = (-1)^{N-2} \prod_{m \neq k} \frac{\gamma_k - \gamma_m - 1}{\gamma_k - \gamma_m} \mu_\gamma. \quad (36)$$

Степенная функция  $[z]^\gamma$  в (33) определяется как  $z^\gamma \bar{z}^{\bar{\gamma}}$ , а  $s$  и  $t$  обозначают суммы параметров:

$$s = \sum_{k=1}^N \lambda_k; \quad t = \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_k.$$

И, наконец, в (33) присутствует функция  $D_\gamma$ , которую мы найдем в процессе вычислений. (Она также зависит и от  $\lambda$ , но эту зависимость мы будем указывать только когда это будет необходимо).

**4.2. Действие  $A(u)$  и  $B(u)$  на собственные функции.** Из (6) следуют формулы, которые связывают элементы матрицы  $T_N$  с элементами  $T_{N-1}$ :

$$A_N(u) = A_{N-1}(u)(u + l + z_N \partial_N) + B_{N-1}(u) z_N (z_N \partial_N + 2l); \quad (37)$$

$$B_N(u) = A_{N-1}(u)(-\partial_N) + B_{N-1}(u - l - z_N \partial_N). \quad (38)$$

Подействуем  $A(u)$  на (33), пользуясь (31)-(32):

$$\begin{aligned} A(u) \psi_\lambda(z) &= \int D^{N-1} \gamma \mu_\gamma D_\gamma \left\{ \prod_{k=1}^{N-1} (u - \gamma_k)(u + t - s) \phi_\gamma(z') [z_N]^{t-s-l} \right. \\ &+ (-1)^{N-1} (t - s + l) \sum_{k=1}^{N-1} (\gamma_k + l)(\gamma_k - l + 1) \\ &\left. \times \prod_{m \neq k} \frac{u - \gamma_m}{\gamma_k - \gamma_m} \phi_{\gamma + e_k}(z') [z_N]^{t-s-l+1} \right\}. \end{aligned}$$

Во каждом слагаемом из второй строки сделаем замену переменной интегрирования  $\gamma_k \rightarrow \gamma_k - 1$ . Тогда весь интеграл превратится в

$$\int D^{N-1} \gamma \phi_\gamma(z') [z_N]^{t-s-l} \left\{ \prod_{k=1}^{N-1} (u - \gamma_k)(u + t - s) \mu_\gamma D_\gamma \right. \\ \left. + (-1)^{N-1} (t - s + l - 1) \sum_{k=1}^{N-1} (\gamma_k + l - 1)(\gamma_k - l) \mu_{\gamma - e_k} D_{\gamma - e_k} \right. \\ \left. \times \prod_{m \neq k} \frac{u - \gamma_m}{\gamma_k - \gamma_m - 1} \right\}.$$

Мы хотим подобрать  $D_\gamma$  так, чтобы выполнялось (8). Пользуясь свойством меры (36), получаем уравнение на  $D_\gamma$ :

$$\prod_{m=1}^N (u - \lambda_m) D_\gamma = \prod_{k=1}^{N-1} (u - \gamma_k)(u + t - s) D_\gamma \\ - (t - s + l - 1) \sum_{k=1}^{N-1} (\gamma_k + l - 1)(\gamma_k - l) \\ \times \prod_{m \neq k} \frac{u - \gamma_m}{\gamma_k - \gamma_m} D_{\gamma - e_k}. \quad (39)$$

В правой и левой части этого уравнения стоят полиномы степени  $N$  по спектральному параметру  $u$ . Коэффициенты при  $u^N$  и  $u^{N-1}$  у них одинаковы. Следовательно, для того, чтобы они совпадали, они должны давать одинаковые значения в  $N - 1$  точке. В качестве таких точек выберем  $u = \gamma_k$ ,  $k = 1, \dots, N - 1$ . Это даст нам более простые уравнения на  $D_\gamma$ :

$$D_{\gamma - e_k} = - \frac{\prod_{m=1}^N (\gamma_k - \lambda_m)}{(\gamma_k + l - 1)(\gamma_k - 1)(t - s + l - 1)} D_\gamma. \quad (40)$$

Аналогичные уравнения имеют место при сдвигах антиголоморфных параметров  $D_{\gamma - \bar{e}_k}$ . Решение всего этого набора уравнений имеет вид

$$D_\gamma = \prod_{m=1}^N \prod_{k=1}^{N-1} a(\gamma_k - \lambda_m + 1) \prod_{k=1}^{N-1} \frac{a(l - \gamma_k)}{a(l + \gamma_k)} \cdot \frac{1}{a(t - s + l)}. \quad (41)$$

Теперь докажем, что  $\psi_\lambda(z)$  с выбранным таким образом  $D_\gamma$  будет удовлетворять (9). По формуле (38) имеем

$$\begin{aligned} B_N(\lambda_k)\psi_\lambda(z) &= \int D^{N-1}\gamma\mu_\gamma D_\gamma \left\{ (s-t+l) \prod_{m=1}^{N-1} (\lambda_k - \gamma_m) \phi_{\gamma(z')} [z_N]^{t-s-l-1} \right. \\ &\quad + (-1)^{N-1} (\lambda_k - t + s) \sum_{n=1}^{N-1} (\gamma_n + l)(\gamma_n - l + 1) \\ &\quad \left. \times \prod_{m \neq n} \frac{\lambda_k - \gamma_m}{\gamma_n - \gamma_m} \phi_{\gamma+e_n}(z') [z_N]^{t-s-l} \right\}. \end{aligned}$$

В каждом слагаемом второй строки сделаем замену переменной  $\gamma_n \rightarrow \gamma_n - 1$ . Тогда правая часть превратится в

$$\begin{aligned} &\int D^{N-1}\gamma \phi_\gamma(z') [z_N]^{t-s-l-1} \cdot \left[ (s-t+l) \prod_{m=1}^{n-1} (\lambda_k - \gamma_m) \mu_\gamma D_\gamma \right. \\ &\quad + (-1)^{N-1} (\lambda_k - t + s + 1) \sum_{n=1}^{N-1} (\gamma_n + l - 1)(\gamma_n - l) \\ &\quad \left. \times \prod_{m \neq n} \frac{\lambda_k - \gamma_m}{\gamma_n - \gamma_m - 1} \mu_{\gamma-e_n} D_{\gamma-e_n} \right]. \end{aligned}$$

Согласно (9), это должно быть равно

$$C_\lambda \int D^{N-1}\gamma \phi_\gamma(z') [z_N]^{t-s-l-1} \mu_\gamma D_\gamma(\lambda + e_k), \quad (42)$$

где  $C_\lambda$  – числовой коэффициент. Докажем, что он равен  $(-1)^N (\lambda_k + l)(\lambda_k - l + 1)$ .

Для  $D_\gamma(\lambda + e_k)$  из явного вида  $D_\gamma$  имеем

$$D_\gamma(\lambda + e_k) = \frac{\prod_{s=1}^{N-1} (\gamma_s - \lambda_k)}{t - s + l - 1} D_\gamma \quad (43)$$

Из предыдущих выражений пользуясь свойством меры (36), а также (43) и (40), получаем следующее соотношение

$$C_\lambda \frac{\prod_{s=1}^{N-1} (\gamma_s - \lambda_k)}{(t - s + l - 1)} = (s - t + l) \prod_{m=1}^{N-1} (\lambda_k - \gamma_m) + \frac{(\lambda_k - t + s + 1)}{(t - s + l - 1)} \sum_{n=1}^{N-1} \prod_{s=1}^N (\gamma_n - \lambda_s) \prod_{m \neq n} \frac{\lambda_k - \gamma_m}{\gamma_n - \gamma_m}. \quad (44)$$

Отсюда после сокращений получаем, что

$$C_\lambda = (-1)^{N-1} (s - t + l) (t - s + l - 1) + (-1)^N (\lambda_k - t + s + 1) \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^N (\gamma_n - \lambda_m)}{\prod_{m \neq n} (\gamma_n - \gamma_m)}. \quad (45)$$

Далее воспользуемся формулой

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{\prod_{m \neq k} (\gamma_n - \lambda_m)}{\prod_{m \neq n} (\gamma_n - \gamma_m)} = t - s + \lambda_k, \quad (46)$$

которая легко доказывается, если записать левую часть в виде определителя. Тогда (45) превращается в

$$C_\lambda = (-1)^{N-1} \{(s - t + l)(t - s + l - 1) - (t - s + \lambda_k)(\lambda_k - t + s + 1)\}.$$

и после некоторых алгебраических преобразований получаем

$$C_\lambda = (-1)^N (\lambda_k + l)(\lambda_k - l + 1),$$

что соответствует (9).

Таким образом, функция (33) с  $D_\gamma$  определяемой (41) удовлетворяет (8) и (9).

### §5. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДВУХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Докажем теперь, что два разных представления для собственных функций  $A(u)$  ( $\Psi_\lambda(z)$  – представление Гаусса–Гивенталья (30), и  $\psi_\lambda(z)$  – представление Меллина–Барнса (33)) совпадают.

Однако у этих функций разные нормировки; найдем множитель, который бы обеспечивал выполнение условия (9) для функции в представлении Гаусса-Гивентала.

**5.1. Нормировка.** Как было доказано в [5], функции  $\Psi_\lambda$  нормированы условием

$$\int Dz \Psi_\lambda(z) \overline{\Psi_{\lambda'}(z)} = \mu_\lambda^{-1} \delta(\lambda - \lambda'), \quad (47)$$

где интегрирование ведется по всем переменным  $z : Dz \equiv d^2 z_1 \dots d^2 z_N$ , а функция  $\mu_\lambda$  в правой части дается формулой (35). Формула (47) следует из локальных перестановочных соотношений для операторов  $\Lambda$

$$\Lambda_k^\dagger(\lambda'_k) \Lambda_k(\lambda_k) = \frac{\pi^2}{(\lambda_k - \lambda'_k)(\bar{\lambda}_k - \bar{\lambda}'_k)} \Lambda_{k-1}(\lambda'_k) \Lambda_{k-1}^\dagger(\lambda_k). \quad (48)$$

Найдем множитель, который бы обеспечивал  $\Psi_\lambda(z)$  такую же нормировку (9), как и у функций  $\psi_\lambda(z)$  в представлении Меллина-Барнса. Для этого воспользуемся рекуррентной формулой (38)

$$B_k(u) \Lambda_k(\lambda_k) = \Lambda_k(\lambda_k) [B_{k-1}(u - \lambda_k - z_k \partial_k) - A_{N-1}(u) \partial_N]. \quad (49)$$

Применим правую и левую часть к  $\Psi_{N-1}(z)$  и воспользуемся формулой

$$\Psi_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}, \lambda_N)}(z) = \Lambda_N(\lambda_N) \Psi_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})}(z') \quad (50)$$

которая напрямую следует из (30). Тогда при  $u = \lambda_1$  второе слагаемое исчезает, и мы приходим к

$$B_N(\lambda_1) \Psi_{(\lambda_1, \dots, \lambda_N)}(z) = (\lambda_1 + l) B_{N-1}(\lambda_1) \Psi_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})}(z'). \quad (51)$$

Применяя такое же разложение к  $B_{N-1}(\lambda_1)$  в конечном счете приходим к  $B_1(\lambda_1) \Lambda_1(\lambda_1)$ . Последнее легко вычисляется и равно  $(\lambda_1 + l) \Lambda_1(\lambda_1 + 1)$ . Таким образом,

$$B_N(\lambda_1) \Psi_\lambda(z) = (\lambda_1 + l)^N \Psi_{\lambda+e_1}(z)$$

В силу симметрии функции  $\Psi_\lambda(z)$  по параметрам  $\lambda_k$ , такие же формулы можно написать для  $u = \lambda_k$ , т. е.

$$B_N(\lambda_k) \Psi_\lambda(z) = (\lambda_k + l)^N \Psi_{\lambda+e_k}(z), \quad k = 1, \dots, N. \quad (52)$$

Зная это, можно подобрать такой множитель  $C_\lambda$ , чтобы  $C_\lambda \Psi_\lambda(z)$  удовлетворяло (9). Тогда утверждение, которое мы доказываем будет

иметь вид  $\psi_\lambda(z) = C_\lambda \Psi_\lambda(z)$ . Подставляя сюда явный вид  $C_\lambda$ , имеем

$$\psi_\lambda(z) = \prod_{k=1}^N \frac{a(\lambda_k - l + 1)}{[a(\lambda_k + l)]^{N-1}} \Psi_\lambda(z). \quad (53)$$

Идея доказательства (53) изложена в следующем параграфе.

**5.2. Идея доказательства.** Предположим, что система функций  $\Psi_\lambda(z)$  в представлении Гаусса–Гивентала является полной. Тогда функцию  $\Psi_\lambda^{(N)}(z)$  для цепочки из  $N$  узлов можно разложить по полному набору функций  $\Psi_\gamma^{(N-1)}(z')\Psi_\xi^{(1)}(z_N)$ , где функции в одном узле  $\Psi_1(z_N) = [z_N]^{-\xi-l}$ . Условие однородности функций  $\Psi$  приводит к тому, что параметр  $\xi$  должен быть равен  $s - t$ . Таким образом, разложение будет иметь вид

$$\Psi_\lambda^{(N)}(z) = \int D\gamma \mu_\gamma \tilde{D}_\gamma(\lambda) \Psi_\gamma^{(N-1)}(z') [z_N]^{t-s-l}. \quad (54)$$

Здесь для удобства мы явно выделили меру  $\mu_\gamma$ , чтобы сделать формулу (54) похожей на (33). Умножим правую и левую часть (54) на  $\overline{\Psi_\lambda^{(N-1)}(z')}$  и проинтегрируем по  $z'$ . Тогда, пользуясь ортогональностью (47) получим

$$\tilde{D}_\gamma(\lambda) = [z_N]^{s-t+l} \int Dz' \Psi_\lambda^{(N)}(z) \overline{\Psi_\gamma^{(N-1)}(z')}. \quad (55)$$

Пусть (53) верно для  $N - 1$ . Тогда оно будет верно для  $N$ , если будет доказано, что

$$\tilde{D}_\gamma(\lambda) = D_\gamma(\lambda) \prod_{m=1}^{N-1} \frac{a(l - \gamma_m)}{[a(1 - l - \gamma_m)]^{N-2}} \prod_{k=1}^N \frac{a(\lambda_k - l + 1)}{[a(\lambda_k + l)]^{N-1}}, \quad (56)$$

где  $D_\gamma(\lambda)$  – коэффициенты, возникающие в (33), для которых было получено выражение (41). Для этого нужно вычислить скалярное произведение в правой части (55).

**5.3. Вычисление скалярного произведения.** Первым шагом к вычислению скалярного произведения является упрощение вида функции  $\Psi_\lambda^{(N)}(z)$ . Это удобно делать на языке диаграмм, используя представление 3б. С помощью многократного применения правил (с) и (d) преобразования диаграмм с рис. 2 к вертикальным линиям рис. 3б, диаграмма для функции  $\Psi_\lambda^{(N)}(z)$  станет такой как на рис. 4. В результате такого преобразования возникнет множитель.

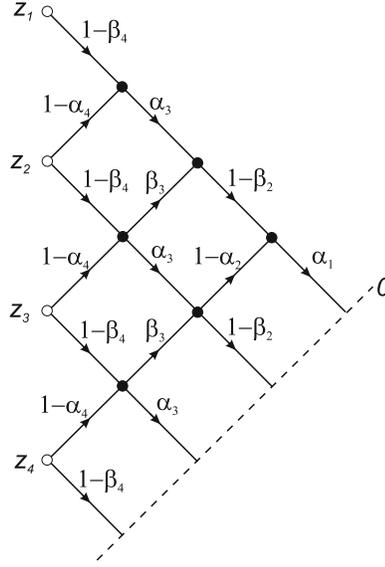


Рис. 4. Преобразованная диаграмма собственной функции ( $N = 4$ ).

Поскольку  $\gamma_k, \lambda_k$  имеют вид

$$\gamma_k = \frac{1}{2}n_k + i\nu_k; \quad \bar{\gamma}_k = -\frac{1}{2}n_k + i\nu_k; \quad n \in \mathbb{Z}, \nu \in \mathbb{R}.$$

а  $l, \bar{l}$  даются формулой (2), то при сопряжении степени меняются следующим образом:  $\alpha_i \rightarrow 1 - \alpha_i$ ,  $\beta_i \rightarrow 1 - \beta_i$ .

Скалярное произведение  $\int Dz' \Psi_\lambda^{(N)}(z) \Psi_{\bar{\gamma}}^{(N-1)}(z')$  тогда изобразится в виде диаграммы на рис 5. На ней штрихованные переменные соответствуют параметрам  $\gamma$ :  $\alpha'_k = 1 - l + \gamma_k$ ,  $\beta'_k = 1 - l - \gamma_k$ . Единственной внешней переменной будет  $z_N$ .

Она вычисляется с помощью преобразования (с) с рис. 2 и правила интегрирования цепочки (а). Сначала (а) применяется к двум верхним линиям, затем образовавшаяся линия переносится в низ диаграммы многократным использованием (с). В результате сверху образуется две цепочки, к которым снова применяется (а) и т. д. Результатом вычисления такой диаграммы, с учетом множителей  $r_k$  в определении

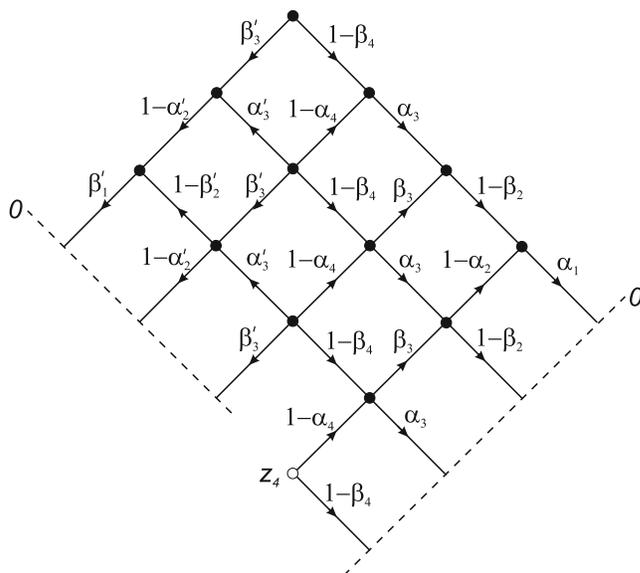


Рис. 5. Скалярное произведение  $\int Dz' \Psi_\lambda^{(N)}(z) \overline{\Psi_\gamma^{(N-1)}(z')}$  для  $N = 4$ .

оператора  $\Lambda_k(\lambda_k)$ , будет

$$\tilde{D}_\gamma(\lambda) = \prod_{k=1}^N a(\alpha_k) [a(1 - \beta_k)]^{N-1} \prod_{m=1}^{N-1} [a(\beta'_m)]^{N-1} \quad (57)$$

Подставляя только что полученное выражение и (41) в (56) нетрудно убедиться, что оно выполняется. Следовательно, функция  $\Psi_\lambda(z)$  в представлении Гаусса-Гивентали и функция  $\psi_\lambda(z)$  совпадают с точностью до нормировочного множителя, который дается формулой (53).

**Благодарности.** Автор благодарен С. Э. Деркачеву за ценные советы и обсуждения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. E. Derkachov, G. P. Korchemsky, A. N. Manashov, *Noncompact Heisenberg spin magnets from high-energy QCD: 1. Baxter Q operator and separation of variables*. — Nucl. Phys. **B 617** (2001), 375.
2. S. E. Derkachov, G. P. Korchemsky, J. Kotanski, A. N. Manashov, *Noncompact Heisenberg spin magnets from high-energy QCD. 2. Quantization conditions and energy spectrum*. — Nucl. Phys. **B 645** (2002) 237.
3. A. G. Bytsko, J. Teschner, *Quantization of models with non-compact quantum group symmetry: Modular XXZ magnet and lattice sinh-Gordon model*. — J. Phys. **A 39** (2006) 12927.
4. H. J. De Vega, L. N. Lipatov, *Interaction of reggeized gluons in the Baxter-Sklyanin representation*, Phys. Rev. **D 64** (2001) 114019.
5. S. E. Derkachov, A. N. Manashov, *Iterative construction of eigenfunctions of the monodromy matrix for  $SL(2, \mathbb{C})$  magnet*. — J. Phys. **A47** (2014) 305204.
6. S. Kharchev, D. Lebedev, *Integral representation for the eigenfunctions of quantum open and periodic Toda chain from QISM formalism*. — J. Phys. **A34** (2001), 2247–2258.
7. S. Kharchev, D. Lebedev, *Eigenfunctions of  $GL(N, \mathbb{R})$  Toda chain: The Mellin-Barnes representation*. — JETP Lett. **71** (2000), 235–238.
8. I. M. Gel'fand, M. A. Naimark, *Unitary representations of classical group*. — Trudy Mat. Inst. Steklov, Acad. Sci. USSR, Moscow–Leningrad **36** (1950), 3–288.
9. L. D. Faddeev, *How algebraic Bethe ansatz works for integrable model*. — Quantum symmetries/Symmetries Quantiques, Proc. Les-Houches symmer school, LXIV, Eds. A. Connes, K. Kawedzki, J. Zinn-Justin. North Holland, 1998, 149–211.
10. E. K. Sklyanin, *Quantum Inverse Scattering Method. Selected Topics*, in “Quantum Group and Quantum Integrable Systems” (Nankai Lectures in Mathematical Physics), ed. Mo-Lin Ge, Singapore: World Scientific, 1992, pp. 63–97; hep-th/9211111.
11. L. N. Lipatov, *Small x physics in perturbative QCD*. — Phys. Rept. **286** (1997), 131.
12. L. N. Lipatov, *Integrability of scattering amplitudes in  $N=4$  SUSY*. — J. Phys. **A 42** (2009), 304020.
13. S. E. Derkachov, A. N. Manashov, *Factorization of R-matrix and Baxter Q-operators for generic  $sl(N)$  spin chains*. — J. Phys. **A42**, 075204, 2009; arXiv:0809.2050.
14. Y. A. Neretin, *Barnes–Ismagilov Integrals and Hypergeometric Functions of the Complex Field*. — SIGMA **16** (2020), 072.
15. I. M. Gel'fand, M. I. Graev, V. S. Retakh, *Hypergeometric functions over an arbitrary field*. — Russian Math. Surveys **59** (2004), 831–905.

Valinevich P. A. Mellin–Barnes representation for  $SL(2, \mathbb{C})$  magnet.

We consider  $SL(2, \mathbb{C})$  spin magnet and construct eigenfunctions for the element  $A(u)$  of the monodromy matrix. We use recursive procedure which gives representations of these functions in the form of Mellin-Barnes

---

type integrals. We compare these functions to those constructed earlier by S. Derkachov and A. Manashov (Gauss–Givental representation) and prove that they coincide up to normalization factor.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН  
Санкт-Петербург, Россия  
*E-mail:* valinevich@pdmi.ras.ru

Поступило 15 октября 2020 г.