Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 494, 2020 г.

И. Н. Буренев, А. Г. Пронько

КВАНТОВЫЕ ГАМИЛЬТОНИАНЫ ПОРОЖДАЕМЫЕ R-МАТРИЦЕЙ ПЯТИВЕРШИННОЙ МОДЕЛИ

§1. Введение

При построении квантовых интегрируемых моделей важную роль играет соотношение Янга–Бакстера и его решение – R-матрица. Эта матрица задаёт RLL-соотношение, которое описывает коммутационные соотношения между локальными квантовыми операторами входящими в т.н. L-оператор [1, 2]. Произведение L-операторов по всем узлам решетки задает квантовую матрицу монодромии, след которой является квантовым оператором, известным как "трансфер-матрица", порождающим семейство коммутирующих интегралов движения, и, в частности, гамильтониан.

Собственно задача построения квантовой интегрируемой системы для заданной R-матрицы состоит из двух этапов. Первый этап заключается в нахождении L-оператора как решения RLL-соотношения, а второй этап – в выводе явного выражения для гамильтониана или иных интегралов движения, которые могут играть роль такового. Для различных приложений интерес представляет возможность введения параметров в L-оператор, от которых не зависит R-матрица, и которые могут играть роль своего рода "внешних полей". Независимость R-матрицы от этих параметров позволяет строить неоднородные системы по этим параметрам. Не менее интересной может оказаться ситуация, при которой гамильтониан, и вообще весь спектр трансфер-матрицы, не зависят, или, точнее, зависят тривиальным образом, от параметра описывающего взаимодействие в R-матрице (при предположении о его конечности).

В настоящей работе, мы проводим детальный анализ для R-матрицы, тесно связанной со специальным вырождением шестивершинной модели, известной как пятивершинная модель [3,4]. Эта R-матрица была введена в работе [5] в связи с неэрмитовой фазовой моделью. Здесь

Ключевые слова: вершинные модели, квантовые интегралы движения, фазовая модель, анзац Бете.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 19-01-00311.

мы рассматриваем более общий случай указанной R-матрицы, которая зависит от дополнительного параметра Δ. Этот параметр описывает взаимодействие, аналогично шестивершинной модели, причем $\Delta = 0$ соответствует точке свободных фермионов. При $\Delta = 1$ рассматриваемая нами R-матрица сводится к таковой работы [5].

Мы рассматриваем решение RLL-соотношения используя "бозонный" анзац для L-оператора, недиагональные элементы которого ищутся в виде операторов рождения и уничтожения в пространстве Фока квантового осциллятора. При этом возникает два типа решений: бесконечномерное, связанное с фазовой моделью, и двумерное, связанное собственно с пятивершинной моделью.

Оказывается, что в случае фазовой модели, L-оператор допускает зависимость от *двух* внешних полей описывающих взаимодействие с вакуумом (а не одним, как рассматривалось в работе [5]), причем зависимость L-оператора от параметра Δ (при условии $\Delta \neq 0$) оказывается тривиальной – в виде общего множителя $\Delta^{\widehat{n}}$, где $\widehat{n}$ оператор числа частиц. В результате, все интегралы движения не зависят от Δ, но зависят нетривиальным образом от набора параметров, по два на узел решетки, описывающих неоднородное взаимодействие с вакуумом.

В случае двумерного квантового пространства ситуация кардинально иная. Существует два решения для L-оператора, каждый из которых описывает пятивершинную модель и зависит нетривиально от Δ и одного параметра, описывающим внешнее поле. Порождаемые этими L-операторами квантовые спиновые гамильтонианы зависят от всех полей тривиальным образом, а именно, зависимость от них может быть убрана подходящим выбором диагонального твиста. В пределе четырехвершинной модели эти два L-оператора совпадают.

Стоит также упомянуть, что фазовая модель является интересным частным случаем интегрируемой q-бозонной модели [5, 6] и имеет приложения в физике конденсированного состояния [7], а также тесные связи с комбинаторикой плоских разбиений (трёхмерных диаграмм Юнга) [8, 9]. Пятивершинная модель изначально возникла при изучении неравновесных процессов [10–12], тесно связана с полностью асимметричными процессами с исключением и с полиномами Гротендика [13], и может также рассматриваться как интегрируемое обобщение плоских разбиений [14–19].

§2. R-матрица пятивершинной модели

Начнем с того, что напомним основные элементы квантового метода обратной задачи [2]. Исходным объектом при построении квантовой интегрируемой модели является L-оператор, который действует в прямом произведении двух пространств: вспомогательном $\mathcal{V}$ и квантовом $\mathcal{H}$. Здесь мы будем рассматривать только случай двумерного вспомогательного пространства, $\mathcal{V} = \mathbb{C}^2$. Рассмотрим одномерную решетку из M узлов и сопоставим k-му узлу L-оператор $L_k(u) \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{H}_k)$, где u – параметр типа "быстроты". Произведение всех L-операторов по вспомогательному пространству задает квантовую матрицу монодромии

$$T(u) = L_M(u) \cdots L_2(u) L_1(u).$$

Элементы матрицы монодромии, записанной как матрица во вспомогательном пространстве,

$$T(u) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(u) & \mathcal{B}(u) \\ \mathcal{C}(u) & \mathcal{D}(u) \end{pmatrix},$$

– это операторы, действующие в квантовом пространстве всей одномерной решетки $\mathcal{H} \equiv \otimes_{k=1}^M \mathcal{H}_k$.

Квантовая интегрируемость основана на соотношении сплетения, или RLL-соотношении,

$$\check{R}(u,v)\big(L_k(u) \otimes L_k(v)\big) = \big(L_k(v) \otimes L_k(u)\big)\check{R}(u,v), \tag{2.1}$$

где прямое произведение выполняется по двум вспомогательным пространствам $\mathbb{C}^2$, а $\check{R}(u,v)$ – невырожденная матрица в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Из (2.1) следует аналогичное соотношение для матрицы монодромии

$$\check{R}(u,v)\big(T(u) \otimes T(v)\big) = \big(T(v) \otimes T(u)\big)\check{R}(u,v). \tag{2.2}$$

Пусть K – некоторая числовая матрица в вспомогательном пространстве, такая что

$$\big[\check{R}(u,v), K \otimes K\big] = 0. \tag{2.3}$$

Тогда оператор действующий в $\mathcal{H}$, определяемый формулой

$$\tau(u) = \mathrm{tr}\big(T(u)K\big),$$

где след берется по вспомогательному пространству, в силу (2.2), (2.3) и невырожденности R-матрицы, обладает свойством

$$[\tau(u), \tau(v)] = 0. \tag{2.4}$$

Оператор $\tau(u)$ называется квантовой трансфер-матрицей, и (2.4) означает, что этот оператор является производящей функцией семейства коммутирующих операторов в пространстве $\mathcal{H}$. Эти операторы суть интегралы движения квантовой системы, что и означает квантовую интегрируемость. Матрица K задает граничные условия и часто именуется "матрицей твиста"; случай единичной матрицы, $K = I$, соответствует периодическим граничным условиям.

Обратимся теперь к конкретному виду R-матрицы и сформулируем связанную с ней задачу. В настоящей работе обсуждаются некоторые квантовые одномерные модели, порождаемые т.н. R-матрицей пятивершинной модели

$$\check{R}(u,v) = \begin{pmatrix} f(v,u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(v,u) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g(v,u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(v,u) \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где

$$f(v,u) = \frac{\Delta v^2}{v^2 - u^2}, \qquad g(v,u) = \frac{\Delta v u}{v^2 - u^2},$$

а Δ – параметр. Матрица (2.5) действует в прямом произведении двух пространств $\mathbb{C}^2$, первое пространство отвечает 2×2 блокам, а второе – элементам в этих блоках. Эта матрица удовлетворяет соотношению Янга-Бакстера, которое является тождеством в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$,

$$\check{R}_{12}(u,v)\check{R}_{23}(w,v)\check{R}_{12}(w,u) = \check{R}_{23}(w,u)\check{R}_{12}(w,v)\check{R}_{23}(u,v), \tag{2.6}$$

где индексы указывают в каких пространствах каждый сомножитель действует нетривиально, $\check{R}_{12}(u,v) \equiv \check{R}(u,v) \otimes I$, $\check{R}_{23}(u,v) \equiv I \otimes \check{R}(u,v)$, I – единичная 2×2 матрица.

Одно из свойств R-матрицы (2.5) заключается в том, что она допускает, в отличие от таковой шестивершинной модели, только диагональный твист $K = \mathrm{diag}(\kappa_1, \kappa_2)$. Трансфер-матрица имеет вид

$$\tau(u) = \kappa_1 \mathcal{A}(u) + \kappa_2 \mathcal{D}(u).$$

Если $\kappa_1, \kappa_2 \neq 0$, то тогда, без ограничения общности можно положить $\kappa_1 = \kappa_2^{-1} = \gamma$, где γ – параметр твиста, $\gamma = 1$ соответствует периодическим граничным условиям. Случаи $\kappa_1 = 0$ и $\kappa_2 = 0$ соответствуют открытым граничным условиям.

Если положить $\Delta = 1$, то тогда R-матрица (2.5) совпадёт с таковой (с точностью до замены $u \mapsto u^{-1}, v \mapsto v^{-1}$), рассмотренной впервые в работе Боголюбова и Насара [5]. Стоит отметить, что зависимость от параметра Δ может быть введена в R-матрицу Боголюбова–Насара $\check{R}^{\mathrm{BN}}(u,v) \equiv \check{R}(u,v)\big|_{\Delta=1}$ при помощи отображения

$$\check{R}^{\mathrm{BN}}(u,v) \xrightarrow{\Omega} \check{R}(u,v),$$

которое задается преобразованием подобия

$$\Omega = \Delta^{\frac{1}{2}\sigma^z} \otimes I \otimes \Delta^{-\frac{1}{2}\sigma^z},$$

где σ^z – матрица Паули, примененного к соотношению Янга–Бакстера (2.6) для матрицы $\check{R}^{\mathrm{BN}}(u,v)$.

Зависимость R-матрицы от дополнительного параметра, хоть и имеет, на первый взгляд, простой вид, но ведет к нетривиальным следствиям. В частности, R-матрица (2.5) допускает предел $\Delta \to 0$, который осуществляется при помощи подстановки $u = e^{\Delta p}$, $v = e^{\Delta q}$, где p и q – новые переменные. Получающаяся в результате R-матрица

$$\check{R}^{\Delta=0}(p,q) \equiv \lim_{\Delta\to 0} \check{R}\left(e^{\Delta p}, e^{\Delta q}\right)$$

описывает пятивершинную модель в точке свободных фермионов. Это означает, что параметр Δ аналогичен таковому в шестивершинной модели и является параметром описывающим взаимодействие.

Задача, таким образом, состоит в том, чтобы исследовать зависимость от параметра Δ в L-операторе, и, в результате, в интегралах движения, которая порождается решениями RLL-соотношения (2.1) с R-матрицей (2.5). Интерес представляет также зависимость интегралов движения от дополнительных параметров входящих в L-оператор, допускающими интерпретацию “внешних полей”, причем поля могут быть неоднородными (зависеть от номера узла решетки).

§3. Построение решений RLL-соотношения

В этом разделе будем рассматривать L-оператор как одноузельную матрицу монодромии, опуская индекс номера узла в обозначениях,

$$L(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}.$$

Сплетающее соотношение (2.1) для R-матрицы определённой согласно (2.5) равносильно системе из 16 коммутационных соотношений на элементы матрицы $L(u)$.

$$[A(u), A(v)] = 0, \tag{3.1a}$$
$$[B(u), B(v)] = 0, \tag{3.1b}$$
$$[C(u), C(v)] = 0, \tag{3.1c}$$
$$[D(u), D(v)] = 0, \tag{3.1d}$$
$$C(u)A(v) = f(v,u)A(v)C(u) - g(v,u)A(u)C(v), \tag{3.1e}$$
$$C(v)D(u) = f(v,u)D(u)C(v) - g(v,u)D(v)C(u), \tag{3.1f}$$
$$A(v)B(u) = f(v,u)B(u)A(v) - g(v,u)B(v)A(u), \tag{3.1g}$$
$$D(u)B(v) = f(v,u)B(v)D(u) - g(v,u)B(u)D(v), \tag{3.1h}$$
$$C(u)B(v) = g(v,u)(A(v)D(u) - A(u)D(v)), \tag{3.1i}$$
$$C(v)B(u) = g(v,u)(D(u)A(v) - D(v)A(u)), \tag{3.1j}$$
$$[A(v), D(u)] = g(v,u)(B(u)C(v) - B(v)C(u)), \tag{3.1k}$$
$$f(v,u)C(v)A(u) = g(v,u)C(u)A(v), \tag{3.1l}$$
$$f(v,u)A(u)B(v) = g(v,u)A(v)B(u), \tag{3.1m}$$
$$f(v,u)C(u)D(v) = g(v,u)C(v)D(u), \tag{3.1n}$$
$$f(v,u)D(v)B(u) = g(v,u)D(u)B(v), \tag{3.1o}$$
$$C(u)B(v) = C(v)B(u). \tag{3.1p}$$

Таким образом, задача сводится к тому, чтобы найти операторы удовлетворяющие системе (3.1).

Будем считать, что $A(u)$, $B(u)$, $C(u)$, $D(u)$ – операторы в пространстве Фока для одной частицы. В базисе чисел заполнения $|n\rangle$, $n \geq 0$ все эти операторы имеют вид полубесконечных матриц.

Предположим, что, во-первых, B- и C-операторы являются операторами рождения и уничтожения

$$B(u) = \sum_{n\geq 0} b_n \left|n+1\right\rangle \left\langle n\right|, \qquad C(u) = \sum_{n\geq 0} c_n \left|n\right\rangle \left\langle n+1\right|.$$

Во-вторых, будем считать, что коэффициенты b_n и c_n не зависят от u. В результате, соотношения (3.1b), (3.1c), (3.1p) выполнятся автоматически.

Из (3.1m) и (3.1l) следует, что оператор $A(u)$ имеет вид

$$A(u) = uA_1 + \xi(u)\widehat{\pi},$$

где A_1 – некоторый оператор, не зависящий от u, $\widehat{\pi}$ – проектор на вакуум

$$\widehat{\pi} = |0\rangle \langle 0| ,$$

а $\xi(u)$ – произвольная функция от u, не содержащая линейного по u вклада. Чтобы выполнялось (3.1a), оператор A_1 должен иметь вид

$$A_1 = a_{00} |0\rangle \langle 0| + \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} |i\rangle \langle j| . \tag{3.2}$$

Соотношение (3.1g) сводится к двум условиям. Во-первых $\xi(u) \sim u^{-1}$, а во-вторых

$$A_1 B - \Delta B A_1 = 0.$$

Это уравнение задаёт коэффициенты a_{ij} в (3.2) с точностью до одного параметра, что приводит к следующему виду оператора A_1

$$A_1 = a_{00} \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^n |n\rangle \langle n| .$$

В итоге $A(u)$ зафиксирован с точностью до двух параметров

$$A(u) = \alpha_1 u \Delta^{\widehat{n}} + \frac{\alpha_2}{u} \widehat{\pi}, \tag{3.3}$$

где мы использовали оператор числа частиц

$$\widehat{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n |n\rangle \langle n| .$$

Нетрудно проверить, что оператор (3.3) удовлетворяет также и (3.1e).

Аналогичным образом соотношения (3.1d), (3.1f), (3.1h), (3.1n) и (3.1o) фиксируют оператор $D(u)$ в виде

$$D(u) = \frac{\delta_1}{u} \Delta^{\widehat{n}} + \delta_2 u \widehat{\pi}. \tag{3.4}$$

Таким образом, операторы $A(u)$ и $D(u)$ диагональные, откуда, с учётом того, что $B(u)$ и $C(u)$ не зависят от u, следует, что (3.1k) выполняется.

Оставшиеся уравнения (3.1i) и (3.1j) выполняются, если коэффициенты удовлетворяют системе уравнений

$$b_0 c_0 = \Delta(\alpha_1 \delta_1 - \alpha_2 \delta_2), \qquad b_n c_n = \Delta^{2n+1} \alpha_1 \delta_1, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{3.5}$$

Из (3.5) следует, что есть два вида решений. Первый вид решений соответствует $\alpha_1 \delta_1 \neq 0$, откуда следует, что коэффициенты b_n и c_n,

$n = 1, 2, \dots$ не равны нулю. Второй вид решений соответствует $\alpha_1\delta_1 = 0$, откуда $b_n c_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Дальше для этого вида решений мы ограничимся только случаем $b_n = c_n = 0$, причём $b_0 \neq 0$, $c_0 \neq 0$, что соответствует двумерному фоковскому пространству с базисными векторами $|0\rangle$ и $|1\rangle$.

§4. Фазовая модель

В этом разделе мы будем рассматривать первый вид решений (3.5), что соответствует бесконечномерному фоковскому пространству. Зафиксируем нормировку $L(u)$ так, чтобы

$$\alpha_1\delta_1 = 1.$$

Тогда с точностью до преобразования подобия, коэффициенты b_i и c_i имеют вид

$$\begin{aligned} c_0 &= \left(1 \pm \sqrt{\alpha_2\delta_2}\right), \qquad & b_0 &= \Delta\left(1 \mp \sqrt{\alpha_2\delta_2}\right), \\ c_j &= \Delta^j,\ j = 1, 2, \dots, & b_j &= \Delta^{j+1}\ j = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

Растяжением переменной u решение окончательно фиксируется в виде

$$\alpha_1 = 1, \quad \delta_1 = 1, \quad \alpha_2 = -\alpha, \quad \delta_2 = \delta, \quad \alpha\delta \neq -1.$$

Здесь α и δ – два независимых параметра решения. Требование $\alpha\delta \neq -1$ наложено, чтобы b_0 и c_0 не оказались равными нулю.

В итоге мы построили следующее бесконечномерное решение для L-оператора

$$L(u) = \begin{pmatrix} u\Delta^{\widehat{n}} - \dfrac{\alpha}{u}\widehat{\pi} & \Delta^{1/2}\widehat{\Phi}^\dagger\left(1 \pm \mathrm{i}\sqrt{\alpha\delta}\widehat{\pi}\right) \\ \Delta^{-1/2}\left(1 \mp \mathrm{i}\sqrt{\alpha\delta}\widehat{\pi}\right)\widehat{\Phi} & \dfrac{1}{u}\Delta^{\widehat{n}} + u\delta\widehat{\pi} \end{pmatrix},$$

где $\widehat{\Phi}$ и $\widehat{\Phi}^\dagger$ – бозонные операторы

$$\widehat{\Phi}^\dagger = \sum_{n\geq 0} \Delta^{n+1/2}\,|n+1\rangle\langle n|, \qquad \widehat{\Phi} = \sum_{n\geq 0} \Delta^{n+1/2}\,|n\rangle\langle n+1|, \tag{4.1}$$

которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^\dagger = \Delta^{2\widehat{n}+1}, \qquad \widehat{\Phi}^\dagger\widehat{\Phi} = \Delta^{2\widehat{n}-1} - \frac{1}{\Delta}\widehat{\pi}, \qquad \widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^\dagger - \Delta^2\widehat{\Phi}^\dagger\widehat{\Phi} = \Delta\widehat{\pi}.$$

При $\Delta = 1$ эти операторы превращаются в экспоненциальные фазовые операторы

$$\widehat{\phi} = \sum_{n\geq 0} |n\rangle\,\langle n+1|\,, \qquad \widehat{\phi}^{\dagger} = \sum_{n\geq 0} |n+1\rangle\,\langle n|$$

с коммутационными соотношениями

$$\widehat{\phi}\widehat{\phi}^{\dagger} = 1, \qquad \widehat{\phi}^{\dagger}\widehat{\phi} = 1 - \widehat{\pi}, \qquad \widehat{\phi}\widehat{\phi}^{\dagger} - \widehat{\phi}^{\dagger}\widehat{\phi} = \widehat{\pi}.$$

Несложно убедиться, что

$$\widehat{\Phi} = \Delta^{\widehat{n}+1/2}\widehat{\phi}, \qquad \widehat{\Phi}^{\dagger} = \Delta^{\widehat{n}-1/2}\widehat{\phi}^{\dagger}.$$

В результате L-оператор в терминах $\widehat{\phi}$ и $\widehat{\phi}^{\dagger}$ переписывается в следующем виде

$$L(u) = \begin{pmatrix} u\Delta^{\widehat{n}} - \dfrac{\alpha}{u}\widehat{\pi} & \Delta^{\widehat{n}}\widehat{\phi}^{\dagger}\left(1 \pm \mathrm{i}\sqrt{\alpha\delta}\widehat{\pi}\right) \\ \left(1 \mp \mathrm{i}\sqrt{\alpha\delta}\widehat{\pi}\right)\Delta^{\widehat{n}}\widehat{\phi} & \dfrac{1}{u}\Delta^{\widehat{n}} + u\delta\widehat{\pi} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\widehat{\pi}_j\widehat{n}_j = \widehat{n}_j\widehat{\pi}_j = \widehat{\pi}_j$, поэтому из L-оператора можно вынести общий множитель $\Delta^{\widehat{n}}$,

$$L(u) = \Delta^{\widehat{n}} \begin{pmatrix} u - \frac{1}{u}\alpha\widehat{\pi} & \widehat{\phi}^{\dagger}\left(1 \pm \mathrm{i}\sqrt{\alpha\delta}\widehat{\pi}\right) \\ \left(1 \mp \mathrm{i}\sqrt{\alpha\delta}\widehat{\pi}\right)\widehat{\phi} & \frac{1}{u} + u\delta\widehat{\pi} \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

При $\Delta = 1$ и $\delta = 0$ (4.2) воспроизводит L-оператор (с точностью до замены $u \mapsto u^{-1}$), который рассматривался в [5] в контексте фазовой модели.

Теперь перейдём к построению интегралов движения, причём мы будем полагать, что параметры α и δ зависят от номера узла. Исходя из (4.2) можно сделать вывод, что матрица монодромии будет иметь вид

$$T(u) = \Delta^{\widehat{N}}\widetilde{T}(u) \equiv \Delta^{\widehat{N}} \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{A}}(u) & \widetilde{\mathcal{B}}(u) \\ \widetilde{\mathcal{C}}(u) & \widetilde{\mathcal{D}}(u) \end{pmatrix}, \qquad \widehat{N} = \sum_{i=1}^{M}\widehat{n}_i,$$

где операторы $\widetilde{A}(u), \ldots, \widetilde{D}(u)$ не зависят от Δ.

Прямым вычислением получим выражения для диагональных элементов

$$\widetilde{\mathcal{A}}(u) = u^M - u^{M-2}\sum_{k=1}^{M}\alpha_k\widehat{\pi}_k + u^{M-2}\sum_{j<k}C_jB_k\prod_{l=j+1}^{k-1}\delta_l\widehat{\pi}_l + \ldots + (-u)^{-M}\prod_{j=1}^{M}\alpha_j\widehat{\pi}_j \tag{4.3}$$

и, аналогично,

$$\widetilde{\mathcal{D}}(u) = u^M\prod_{j=1}^{M}\delta_j\widehat{\pi}_j + u^{M-2}\sum_{k=1}^{M}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{M}\delta_j\widehat{\pi}_j + u^{M-2}\sum_{j<k}\prod_{l=k+1}^{M}\delta_l\widehat{\pi}_lC_kB_j\prod_{l=1}^{j-1}\delta_l\widehat{\pi}_l + \ldots + u^{-M}, \tag{4.4}$$

где операторы B_k и C_k в соответствии с (4.2) задаются формулами

$$B_k = \widehat{\phi}_k^{\dagger}(1 \pm \mathrm{i}\sqrt{\alpha_k\delta_k}\widehat{\pi}_k), \qquad C_k = (1 \mp \mathrm{i}\sqrt{\alpha_k\delta_k}\widehat{\pi}_k)\widehat{\phi}_k.$$

Рассмотрим интеграл движения, который является коэффициентом при u^{M-2}, будем обозначать его H^+. Для этого интеграла с учётом (4.3) и (4.4) справедлива формула

$$\begin{aligned} H^+ &= \frac{\partial}{\partial u^2}u^M\left(\widetilde{\mathcal{A}}\left(u^{-1}\right) + \widetilde{\mathcal{D}}\left(u^{-1}\right)\right)\Big|_{u=0} \\ &= \sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{M-1}C_k\prod_{l=1}^{j-1}\delta_{k+l}\widehat{\pi}_{k+l}B_{j+k} - \sum_{k=1}^{M}\alpha_k\widehat{\pi}_k + \sum_{k=1}^{M}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{M}\delta_j\widehat{\pi}_j. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Здесь воспользовались тем, что операторы из разных пространств коммутируют. Граничные условия подразумеваются периодическими, то есть для любого оператора $\widehat{O}_i = \widehat{O}_{i+M}$.

Внесем в сумму по j в (4.5) дополнительное слагаемое, которое соответствует $j = M$, и заметим, что при $j > M$ будет формально присутствовать множитель вида $\widehat{\pi}_k\widehat{\phi}_k^{\dagger} = 0$, и следовательно суммирование можно продлить до бесконечности

$$H^+ = \sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{\infty}C_k\prod_{l=1}^{j-1}\delta_{k+l}\widehat{\pi}_{k+l}B_{j+k} - \sum_{k=1}^{M}\alpha_k\widehat{\pi}_k - \sum_{k=1}^{M}\alpha_k\prod_{j=1}^{M}\delta_j\widehat{\pi}_j.$$

Полученное выражение можно переписать, если ввести оператор сдвига

$$\widehat{\mathfrak{D}}:\ \widehat{\mathfrak{D}}\widehat{O}_k=\widehat{O}_{k+1}.$$

Тогда

$$H^+=\sum_{k=1}^{M}C_k\left[\frac{1}{1-\widehat{\mathfrak{D}}\delta_k\widehat{\pi}_k}\right]B_{k+1}-\sum_{k=1}^{M}\alpha_k\widehat{\pi}_k-\sum_{k=1}^{M}\alpha_k\prod_{j=1}^{M}\delta_j\widehat{\pi}_j. \qquad (4.6)$$

Выражение в квадратных скобках понимается в смысле ряда

$$\frac{1}{1-\widehat{\mathfrak{D}}\delta_k\widehat{\pi}_k}=1+(\widehat{\mathfrak{D}}\delta_k\widehat{\pi}_k)+(\widehat{\mathfrak{D}}\delta_k\widehat{\pi}_k)(\widehat{\mathfrak{D}}\delta_k\widehat{\pi}_k)+\ldots$$

При $\delta_k=0$ интеграл движения (4.6) совпадает с гамильтонианом фазовой модели, рассмотренным в [5]. Подчеркнём, что хотя параметр Δ входит в R-матрицу, оператор (4.6) от него не зависит.

Рассмотрим теперь интеграл движения H^-, который является коэффициентом при u^{-M+2}

$$\begin{aligned}H^-&=\frac{\partial}{\partial u^2}u^M(\widetilde{\mathcal{A}}(u)+\widetilde{\mathcal{D}}(u))\bigg|_{u=0}\\&=\sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{M-1}(-1)^{j-1}B_k\prod_{l=1}^{j-1}\alpha_{k+l}\widehat{\pi}_{k+l}C_{k+j}\\&+\sum_{k=1}^{M}\delta_k\widehat{\pi}_k+(-1)^{M-1}\sum_{k=1}^{M}\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{M}\alpha_j\widehat{\pi}_j\end{aligned}$$

или через оператор сдвига

$$\begin{aligned}H^-=\sum_{k=1}^{M}C_k\left[\frac{1}{1+\widehat{\mathfrak{D}}^{-1}\alpha_k\widehat{\pi}_k}\right]B_{k-1}&\\+\sum_{k=1}^{M}\delta_k\widehat{\pi}_k+(-1)^M\sum_{k=1}^{M}\delta_k\prod_{j=1}^{M}\alpha_j\widehat{\pi}_j.&\qquad (4.7)\end{aligned}$$

Интегралы движения (4.6) и (4.7) можно трактовать как гамильтонианы, описывающие направленные перескоки частиц вдоль решётки.

Поскольку интегралы движения (4.6) и (4.7) были построены как коэффициенты в разложении одной и той же трансфер матрицы, они коммутируют. Поэтому оператор

$$H = H^{+} + H^{-} \tag{4.8}$$

может быть выбран как гамильтониан системы, который описывает перескоки частиц в произвольном направлении; при $\alpha_k = -\delta_k$ гамильтониан (4.8) эрмитов.

Рассмотрим построение собственных состояний трансфер-матрицы. Будем искать N-частичные состояния в виде

$$|\Psi(u_1,\dots,u_N)\rangle = \prod_{j=1}^{N} \widetilde{\mathcal{B}}(u_j)\,|\Omega\rangle\,, \qquad |\Omega\rangle = |0\rangle^{\otimes M}\,.$$

Такое состояние будет собственным для $\tau(v)$ если $\{u_k\}$ удовлетворяют уравнениям Бете

$$\prod_{l=1}^{M} \frac{\delta_l u_k^2 + 1}{u_k^2 - \alpha_l} = (-1)^{N-1} \prod_{j=1}^{N} \frac{u_k^2}{u_j^2}, \quad k = 1,\dots,N. \tag{4.9}$$

Собственные значения $\Theta_N(v)$ трансфер-матрицы,

$$\tau(v)\,|\Psi(u_1,\dots,u_N)\rangle = \Theta_N(v)\,|\Psi(u_1,\dots,u_N)\rangle\,,$$

имеют вид

$$\Theta_N(v) = \prod_{l=1}^{M}\left(v - \frac{\alpha_l}{v}\right)\prod_{j=1}^{N}\frac{v^2\Delta}{v^2-u_j^2} + \prod_{l=1}^{M}\left(\frac{1}{v} + v\delta_l\right)\prod_{j=1}^{N}\frac{u_j^2\Delta}{u_j^2-v^2}.$$

Собственные значения $E_N^{\pm}$ операторов $H^{\pm}$ на N-частичных состояниях,

$$E_N^{+} = \Delta^{-N}\left(\frac{\partial}{\partial v^2}\right) v^M \Theta_N\left(v^{-1}\right)\Big|_{v=0},$$
$$E_N^{-} = \Delta^{-N}\left(\frac{\partial}{\partial v^2}\right) v^M \Theta_N(v)\Big|_{v=0},$$

даются формулами

$$E_N^{+} = \sum_{j=1}^{N} u_j^2 - \sum_{j=1}^{M}\alpha_j + u_1^2\delta_{N,1}\prod_{j=1}^{M}\delta_j,$$
$$E_N^{-} = \sum_{j=1}^{N} u_j^{-2} + \sum_{j=1}^{M}\delta_j - (-1)^M u_1^{-2}\delta_{N,1}\prod_{j=1}^{M}\alpha_j.$$

Здесь $\delta_{N,1}$ – символ Кронекера. Подчеркнём, что решения $\{u_j\}$ уравнений Бете (4.9) зависят от наборов $\{\alpha_j\}$ и $\{\delta_j\}$.

§5. Пятивершинная модель

Обратимся теперь ко второму виду решений (3.5), который соответствует $b_n c_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, причём $b_0 \neq 0$, $c_0 \neq 0$. Будем здесь полагать, что $b_n = c_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, тогда в фоковском пространстве есть только два состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$, которые мы определим как

$$|0\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

а система (3.5) перейдёт в

$$b_0 c_0 = -\Delta \alpha_2 \delta_2, \quad \alpha_1 \delta_1 = 0. \tag{5.2}$$

Выберем общую нормировку так, чтобы $b_0 c_0 = 1$. С точностью до преобразования подобия

$$B(u) = |1\rangle \langle 0| = \sigma^-, \quad C(u) = |0\rangle \langle 1| = \sigma^+.$$

Из общего вида операторов $A(u)$ и $D(u)$, который даётся (3.3) и (3.4) соответственно, и из второго уравнения в (5.2) следует, что существует два решения для L-оператора в зависимости от того, либо $\alpha_1 = 0$ и $\delta_1 \neq 0$, либо $\alpha_1 \neq 0$ и $\delta_1 = 0$. Специальный случай $\alpha_1 = \delta_1 = 0$ будет рассмотрен в следующем разделе.

Рассмотрим случай $\delta_1 = 0$ и $\alpha_1 \neq 0$. Операторы $A(u)$ и $D(u)$ даются формулами

$$A(u) = \alpha_1 u\, (\widehat{\pi} + \Delta \widehat{n}) - \frac{1}{u \Delta \delta_2} \widehat{\pi}, \qquad D(u) = \delta_2 u\, \widehat{\pi},$$

где $\widehat{\pi} = \frac{1}{2}\,(1 + \sigma^z)$, $\widehat{n} = \frac{1}{2}\,(1 - \sigma^z)$. С точностью до растяжения u можно считать, что $\Delta \alpha_1 = {\delta_2}^{-1} \equiv \alpha$. Таким образом, первое решение для L-оператора имеет вид

$$L^{\mathrm{I}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha u\, \widehat{n} + \dfrac{\alpha}{\Delta} \left(u - \dfrac{1}{u} \right) \widehat{\pi} & \sigma^- \\ \sigma^+ & \dfrac{u}{\alpha} \widehat{\pi} \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

В случае $\alpha_1 = 0$ и $\delta_1 \neq 0$ операторы $A(u)$ и $D(u)$ даются формулами

$$A(u) = \frac{\alpha_2}{u} \widehat{\pi}, \qquad D(u) = \frac{\delta_1}{u}\, (\widehat{\pi} + \Delta \widehat{n}) - \frac{u}{\alpha_2 \Delta} \widehat{\pi}.$$

Растяжением u можно добиться того, чтобы $\delta = \alpha_2^{-1} = \delta_1\Delta$. В результате, второе решение для L-оператора имеет вид

$$L^{\mathrm{II}}(u) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\delta u}\widehat{\pi} & \sigma^- \\ \sigma^+ & \dfrac{\delta}{\Delta}\left(\dfrac{1}{u} - u\right)\widehat{\pi} + \dfrac{\delta}{u}\widehat{n} \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Рассмотрим матрицу монодромии с L-оператором (5.3) и определим гамильтониан формулой

$$\begin{aligned} H^{\mathrm{I}} &= -\frac{\Delta}{2}\left(\tau^{-1}(u)\frac{\partial}{\partial u}\tau(u)\right)\Big|_{u=1} - \frac{M\Delta}{2} \\ &= \sum_{k=1}^{M}\left[(\alpha_k\alpha_{k+1})\sigma_k^-\sigma_{k+1}^+ + \frac{\Delta}{4}\left(\sigma_k^z\sigma_{k+1}^z - 1\right)\right]. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Здесь мы воспользовались тем, что L-оператор (5.3) в точке $u = 1$ выражается через оператор перестановки P,

$$L^{\mathrm{I}}(u)\big|_{u=1} = \left(I \otimes \alpha^{-\frac{1}{2}\sigma^z}\sigma^x\right) P^{\mathsf{T}\otimes\mathrm{id}} \left(I \otimes \sigma^x\alpha^{-\frac{1}{2}\sigma^z}\right),$$

где $\mathsf{T}\otimes\mathrm{id}$ обозначает транспозицию в первом пространстве.

Для L-оператора (5.4) определим гамильтониан формулой

$$\begin{aligned} H^{\mathrm{II}} &= \frac{\Delta}{2}\left(\tau^{-1}(u)\frac{\partial}{\partial u}\tau(u)\right)\Big|_{u=1} - \frac{M\Delta}{2} \\ &= \sum_{k=1}^{M}\left[(\delta_k\delta_{k+1})\sigma_k^+\sigma_{k+1}^- + \frac{\Delta}{4}\left(\sigma_k^z\sigma_{k+1}^z - 1\right)\right]. \end{aligned} \tag{5.6}$$

В этом случае L-оператор в точке $u = 1$ пропорционален оператору перестановки

$$L^{\mathrm{II}}(u)\big|_{u=1} = \left(I \otimes \delta^{-\frac{1}{2}\sigma^z}\right) P \left(I \otimes \delta^{-\frac{1}{2}\sigma^z}\right).$$

Состояния вида

$$|\Psi(u_1,\dots,u_N)\rangle = \prod_{j=1}^{N}\mathcal{B}(u_j)\,|\Omega\rangle\,, \quad |\Omega\rangle = |0\rangle^{\otimes M}$$

будут собственными для трансфер-матрицы $\tau^{\mathrm{I}}(v)$, построенной из L-оператора (5.3), если $\{u_k\}$ удовлетворяют уравнениям Бете

$$\left(1-\frac{1}{u_k^2}\right)^{-M}\prod_{l=1}^{M}\frac{\Delta}{\alpha_l^2}=(-1)^{N-1}\prod_{j=1}^{N}\frac{u_k^2}{u_j^2},\quad k=1,\ldots,N.$$

Для трансфер-матрицы $\tau^{\mathrm{II}}(v)$, построенной из L-оператора (5.4),

$$\left(1-u_k^2\right)^{M}\prod_{l=1}^{M}\frac{\delta_l^2}{\Delta}=(-1)^{N-1}\prod_{j=1}^{N}\frac{u_k^2}{u_j^2},\quad k=1,\ldots,N.$$

Собственные значения $\Theta^{\mathrm{I,II}}(v)$ трансфер-матриц $\tau^{\mathrm{I,II}}(v)$ равны

$$\Theta_N^{\mathrm{I}}(v)=\left(v-\frac{1}{v}\right)^{M}\prod_{l=1}^{M}\frac{\alpha_l}{\Delta}\prod_{j=1}^{N}\frac{v^2\Delta}{v^2-u_j^2}+\prod_{l=1}^{M}\frac{v}{\alpha_l}\prod_{j=1}^{N}\frac{u_j^2\Delta}{u_j^2-v^2},$$

$$\Theta_N^{\mathrm{II}}(v)=\prod_{l=1}^{M}\frac{1}{v\delta_l}\prod_{j=1}^{N}\frac{v^2\Delta}{v^2-u_j^2}+\left(\frac{1}{v}-v\right)^{M}\prod_{l=1}^{M}\frac{\delta_l}{\Delta}\prod_{j=1}^{N}\frac{u_j^2\Delta}{u_j^2-v^2},$$

и, следовательно, спектры гамильтонианов $H^{\mathrm{I,II}}$ даются формулами

$$E_N^{\mathrm{I}}=-\frac{\Delta}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\ln\Theta_N^{\mathrm{I}}(v)\right)\bigg|_{v=1}-\frac{M\Delta}{2}=-M\Delta+\sum_{j=1}^{N}\frac{\Delta}{1-u_j^2},$$

$$E_N^{\mathrm{II}}=\frac{\Delta}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\ln\Theta_N^{\mathrm{II}}(v)\right)\bigg|_{v=1}-\frac{M\Delta}{2}=\Delta(N-M)-\sum_{j=1}^{N}\frac{\Delta}{1-u_j^2}.$$

Отметим, что в отличие от бесконечномерного случая, в котором из одной трансфер-матрицы были построены два гамильтониана, в случае пятивершинной модели гамильтонианы H^{I} и H^{II} построены из разных трансфер-матриц, и поэтому не коммутируют друг с другом.

Сделаем калибровочное преобразование

$$\widetilde{H}^{\mathrm{I,II}}=\Omega^{-1}H^{\mathrm{I,II}}\Omega,\qquad \Omega=\prod_{k=1}^{M}\gamma_k^{\frac{1}{2}\sigma_k^z},$$

где $\{\gamma_k\}$ – некоторые произвольные параметры. В результате, гамильтонианы (5.5) и (5.6) преобразуются к виду

$$\widetilde{H}^{\mathrm{I}} = \sum_{k=1}^{M} \left[\frac{\alpha_k \alpha_{k+1} \gamma_{k+1}}{\gamma_k} \sigma_k^- \sigma_{k+1}^+ + \frac{\Delta}{4} \left(\sigma_k^z \sigma_{k+1}^z - 1 \right) \right], \tag{5.7}$$

$$\widetilde{H}^{\mathrm{II}} = \sum_{k=1}^{M} \left[\frac{\delta_k \delta_{k+1} \gamma_k}{\gamma_{k+1}} \sigma_k^+ \sigma_{k+1}^- + \frac{\Delta}{4} \left(\sigma_k^z \sigma_{k+1}^z - 1 \right) \right]. \tag{5.8}$$

Выбором параметров $\{\gamma_k\}$ можно добиться например того, что зависимость от $\{\alpha_k\}$ в (5.7) и от $\{\delta_k\}$ в (5.8) сведётся к граничному члену, а именно

$$\widetilde{H}^{\mathrm{I}} = \sum_{k=1}^{M-1} \left(\sigma_k^- \sigma_{k+1}^+ + \frac{\Delta}{4} \left(\sigma_k^z \sigma_{k+1}^z - 1 \right) \right) + \sigma_M^- \sigma_1^+ \prod_{j=1}^{M} \alpha_j^2,$$

$$\widetilde{H}^{\mathrm{II}} = \sum_{k=1}^{M-1} \left(\sigma_k^+ \sigma_{k+1}^- + \frac{\Delta}{4} \left(\sigma_k^z \sigma_{k+1}^z - 1 \right) \right) + \sigma_M^+ \sigma_1^- \prod_{j=1}^{M} \delta_j^2.$$

В пределе $\Delta \to 0$, слагаемое, отвечающее за взаимодействие обратится в нуль, что соответствует пределу свободных фермионов. В отличие от случая фазовой модели, вся зависимость от зависимость от внешних полей свелась к изменению граничных условий. Вообще говоря, калибровочное преобразование может быть выбрано таким образом, что зависимость от Δ сведётся к граничному члену. Эквивалентно, заданный исходно твист может быть обратным калибровочным преобразованием удален переопределением параметра Δ.

Гамильтонианы (5.7) и (5.8) описывают направленное движение частиц. При $\Delta = 1$ они совпадают с марковскими матрицами для TASEP [20] с твистованными граничными условиями.

§6. Четырёхвершинная модель

Вернёмся к системе (5.2) и рассмотрим специальный случай, в котором $\alpha_1 = \delta_1 = 0$. Состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ определим так же, как и в случае пятивершинной модели (5.1). Операторы $A(u)$ и $D(u)$ будут равны

$$A(u) = \frac{\alpha_2}{u} \widehat{\pi}, \qquad D(u) = \delta_2 u \widehat{\pi}.$$

Тогда с точностью до растяжения u и преобразования подобия, L-оператор будет иметь вид

$$L(u) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{u\Delta}\widehat{\pi} & \sigma^- \\ \sigma^+ & u\widehat{\pi} \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

где $\widehat{\pi} = \frac{1}{2}(1+\sigma^z)$, $\widehat{n} = \frac{1}{2}(1-\sigma^z)$. Полученный L-оператор описывает четырёхвершинную модель, причём все веса положительны при $\Delta < 0$ и $u < 0$. Впервые L-оператор (6.1) был рассмотрен в [21] в случае $\Delta = 1$.

Существенная трудность при построении локальных гамильтонианов в случае четырехвершинной модели заключается в том, что L-оператор (6.1) не выражается через оператор перестановки ни при каком значении u. В то же время метод, который используется в случае фазовой модели также не позволяет построить локальные гамильтонианы в случае четырёхвершинной модели. По этой причине рассмотрим следующую процедуру.

Введём операторы

$$\rho^+(u,\Delta) = (-u)^M \tau(u\Delta^{-1}), \qquad \rho^-(u,\Delta) = u^M \tau(u^{-1}). \tag{6.2}$$

Из (2.4) и (6.2) очевидно, что

$$\left[\rho^\pm(u,\Delta), \rho^\pm(v,\Delta)\right] = \left[\rho^+(u,\Delta), \rho^-(v,\Delta)\right] = 0. \tag{6.3}$$

Операторы $\rho^\pm(u,\Delta)$ – полиномы по Δ^{-1}, поэтому их можно представить в виде

$$\rho^\pm(u,\Delta) = \sum_{k=0}^{M} \Delta^{-k} \rho_k^\pm(u).$$

Из (6.3) следует, что

$$\left[\rho_0^+(u), \rho_0^-(v)\right] = 0. \tag{6.4}$$

Непосредственное вычисление позволяет показать, что $\rho_0^\pm(u)$ имеет вид

$$\rho_0^\pm(u) = \sum_{0\le n\le M/2} u^{2n} \sum_{\lambda_n} \prod_{k\in\lambda_n} \sigma_k^\pm \sigma_{k+1}^\mp \prod_{k,k+1\notin\lambda_n} \pi_k \tag{6.5}$$

где второе суммирование происходит по всем наборам $\lambda_n = \{i_1,\ldots,i_n\}$, таким что

$$1 \le i_k \le M, \quad k = 1,\ldots,n, \qquad i_k \le i_{k-1} + 2, \quad k = 2,\ldots,n.$$

Отметим, что коэффициент при u^{2n} в (6.5) соответствует действию $\rho_0^{\pm}(u)$ в подпространстве n-частичных состояний.

Выберем в качестве гамильтонианов $H^{\pm}$ значения $\rho_0^{\pm}(u)$ в точке $u = 1$. Нетрудно убедиться, что $H^{\pm}$ можно записать при помощи проектора $\widehat{\Pi}$, который запрещает частицам находиться в соседних узлах

$$\widehat{\Pi} = \prod_{j=1}^{M}(1 - \widehat{n}_i\widehat{n}_{i+1}),$$

а именно

$$H^{\pm} \equiv \rho_0^{\pm}(1) = \widehat{\Pi}\left(\sum_{k=1}^{M}\sigma_k^{\pm}\sigma_{k+1}^{\mp}\right)\widehat{\Pi}.$$

Гамильтонианы $H^{\pm}$ описывают направленные перескоки частиц вдоль решётки. Причём из (6.4) следует, что они коммутируют, и значит, можно рассмотреть эрмитов гамильтониан

$$H = H^{+} + H^{-} = \widehat{\Pi}\left(\sum_{k=1}^{M}\sigma_k^{+}\sigma_{k+1}^{-} + \sigma_k^{-}\sigma_{k+1}^{+}\right)\widehat{\Pi}. \tag{6.6}$$

Состояния вида

$$|\Psi\,(u_1,\ldots,u_N)\rangle = \prod_{j=1}^{M}\mathcal{B}(u_j)\,|\Omega\rangle\,, \quad |\Omega\rangle = |0\rangle^{\otimes M}$$

будут собственными для трансфер-матрицы, если выполняются уравнения Бете

$$(-\Delta u_k^2)^M = (-1)^{N-1}\prod_{j=1}^{N}\frac{u_k^2}{u_j^2}.$$

Собственные числа $\Theta_N(v)$ трансфер-матрицы равны

$$\Theta_N(v) = \left(-\frac{1}{v\Delta}\right)^M\prod_{j=1}^{N}\frac{v^2\Delta}{v^2-u_j^2} + v^M\prod_{j=1}^{N}\frac{u_j^2\Delta}{u_j^2-v^2}.$$

Энергии N-частичных состояний $H^{\pm}$ можно определить как формальный предел $\Delta \to \infty$. А именно

$$E_N^+ = \frac{1}{N!}\left(\frac{\partial}{\partial u^2}\right)^N \lim_{\Delta\to\infty} (-u)^M \Theta_N(u\Delta^{-1})\Big|_{u=0}$$
$$E_N^- = \frac{1}{N!}\left(\frac{\partial}{\partial u^2}\right)^N \lim_{\Delta\to\infty} u^M \Theta_N(u^{-1})\Big|_{u=0}.$$

В явном виде

$$E_+ = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{v_k^2}, \qquad E_- = \prod_{k=1}^{N} v_k^2,$$

где $\{v_k\}$ параметры, которые удовлетворяют системе уравнений

$$v_k^{2M} = (-1)^{N-1} \prod_{j=1}^{N} \frac{v_k^2}{v_j^2}.$$

Гамильтониан (6.6) описывает магнетик Гейзенберга, в котором запрещены состояния с двумя соседними спинами направленными вверх. Подобные модели рассматривались в работе [22] (в обозначениях этой работы соответствует случаю $\Delta = 0$, $t = 1$). С другой стороны, можно интерпретировать выражение (6.6) как эффективный гамильтониан XXZ-магнетика в пределе бесконечной анизотропии [23, 24].

Отметим, что предложенная процедура построения локальных гамильтонианов не вполне стандартна и её применение для других систем может быть предметом для дальнейшего изучения.

Приложение §A

Проясним вкратце роль параметра Δ в контексте предела из шестивершинной модели. Для этого рассмотрим матрицу весов шестивершинной модели во внешнем поле

$$L = \begin{pmatrix} a_+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_+ & c_+ & 0 \\ 0 & c_- & b_- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_- \end{pmatrix}.$$

Для существования R-матрицы, удовлетворяющей RLL-соотношению необходимо и достаточно, чтобы для двух L-операторов совпадали параметры заданные

$$\Delta_+ = \frac{a_+a_- + b_+b_- - c_+c_-}{a_+b_+}, \qquad \Delta_- = \frac{a_+a_- + b_+b_- - c_+c_-}{a_-b_-}.$$

В отсутствии внешних полей $\Delta_+ = \Delta_-$, что воспроизводит результат Бакстера [25]. Однако, для ненулевых внешних полей соответствующие параметры в R-матрице $\Delta^R_\pm$ не обязательно совпадает с $\Delta_\pm$. Более подробное обсуждение вопросов интегрируемости шестивершинной модели во внешнем поле есть, например, в [26].

Матрица (5.3) соответствует пределу, при котором

$$\Delta^R_+ \to \Delta, \qquad \Delta^R_- \to \infty, \qquad \Delta_+ \to \frac{\Delta}{\alpha^2}, \qquad \Delta_- \to \infty,$$

а матрица (5.4) пределу, такому что

$$\Delta^R_+ \to \Delta, \qquad \Delta^R_- \to \infty, \qquad \Delta_+ \to \infty, \qquad \Delta_- \to \frac{\Delta}{\delta^2}.$$

Этот результат можно получить, если рассмотреть шестивершинную модель во внешних полях, а затем устремить спектральный параметр и поля на бесконечность согласованным образом. Пример такого вычисления приведён в [14].

Список литературы

1. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга.* — УМН **34**, No. 5 (1979), 13–63.
2. V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum inverse scattering method and correlation functions.* — Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
3. M. Gulácsi, H. van Beijeren, A. C. Levi, *Phase diagram of the five-vertex model.* — Phys. Rev. E **47** (1993), 2473–2483.
4. H. Y. Huang, F. Y. Wu, H. Kunz, D. Kim, *Interacting dimers on the honeycomb lattice: an exact solution of the five-vertex model.* — Physica A **228** (1996), 1–32.
5. N. M. Bogoliubov T. Nasar, *On the spectrum of the non-Hermitian phase-difference model.* — Phys. Lett. A **234** (1997), 345–350.
6. N. M. Bogoliubov, R. K. Bullough, G. D. Pang, *Exact solution of a q-boson hopping model.* — Phys. Rev. B **47** (1993), 11945–11498.
7. N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, N. A. Kitanine, A. G. Pronko, J. Timonen, *Quantum dynamics of strongly interacting boson systems: atomic beam splitters and coupled Bose-Einstein condensates.* — Phys. Rev. Lett. **86** (2001), 4439–4442.
8. N. M. Bogoliubov, *Boxed plane partitions as an exactly solvable boson model.* — J. Phys. A **38** (2005), 9415–9430.

9. Н. М. Боголюбов, К. Л. Малышев, *Интегрируемые модели и комбинаторика.* — УМН **70**, No. 5(425) (2015), 3–74.
10. C. Garrod, *Stochastic models of crystal growth in two dimensions.* — Phys. Rev. A **41** (1990), 4184–4194.
11. C. Garrod, A. C. Levi, M. Touzani, *Mapping of crystal growth onto the 6-vertex model.* — Solid State Comm. **75** (1990), 375–382.
12. L.-H. Gwa, H. Spohn, *Six-vertex model, roughened surfaces, and an asymmetric spin Hamiltonian.* — Phys. Rev. Lett. **68** (1992), 725–728.
13. K. Motegi K. Sakai, *Vertex models, TASEP and Grothendieck polynomials.* — J. Phys. A. **46** (2013), 355201.
14. Н. М. Боголюбов, *Пятивершинная модель с фиксированными граничными условиями.* — Алгебра и анализ **21** (2009), No. 3, 58–78.
15. Н. М. Боголюбов, *Четырехвершинная модель и случайные укладки.*— ТМФ **155** (2008), No. 1, 25–38.
16. В. С. Капитонов, А. Г. Пронько, *Пятивершинная модель и плоские разбиения в ящике.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **360** (2008), 162–179.
17. В. С. Капитонов, А. Г. Пронько, *Взвешенные перечисления плоских разбиений в ящике и неоднородная пятивершинная модель.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **398** (2012), 125–144.
18. А. Г. Пронько, *Пятивершинная модель и перечисления плоских разбиений.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **433** (2015), 204–223.
19. I. N. Burenev, A. G. Pronko, *Determinant formulas for the five-vertex model.* — [arXiv:2011.01972].
20. O. Golinelli, K. Mallick, *The asymmetric simple exclusion process: An integrable model for non-equilibrium statistical mechanics.* — J. Phys. A. **39** (2006), 12679–12705
21. Н. М. Боголюбов, *Четырехвершинная модель.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **347** (2007), 34–55.
22. F. Alcaraz, R. Bariev, *An Exactly Solvable Constrained XXZ Chain.* — Stat. Phys. on the Eve of the 21st Century (Ser. Adv. Statist. Mech.) **14** (1999), [arXiv:cond-mat/9904042].
23. Н. И. Абаренкова, А. Г. Пронько, *Температурный коррелятор в абсолютно анизотропном XXZ-магнетике Гейзенберга.* — ТМФ **131** (2002), No. 2, 288–303.
24. Н. И. Абаренкова, А. Г. Пронько, *Температурные корреляторы XXZ-магнетика Гейзенберга при* $\Delta = -\infty$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **269** (2000), 43–61.
25. R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics.* — Academic Press, San Diego, CA, 1982.
26. B. Brubaker, D. Bump, S. Friedberg, *Schur Polynomials and The Yang-Baxter Equation.* — Commun. Math. Phys. **308** (2011), 281–301

Burenev I. N., Pronko A. G. Quantum Hamiltonians generated by the R-matrix of the five-vertex model.

We consider solutions of the RLL-relation with the R-matrix related to the five-vertex model. We show that in the case where the quantum space of the L-operator is infinite-dimensional and described the Fock space of quantum oscillator, the solution of the RLL-relation gives the phase model with two external fields. In the case of a two-dimensional quantum space, there exist two solutions each corresponding to the five-vertex model, and their special case, corresponding to the four-vertex model. We also derive explicit expressions for quantum Hamiltonians for inhomogeneous in the external fields systems, both in the finite-dimensional and infinite-dimensional cases.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН,
191023 С.-Петербург, Россия
наб. Фонтанки, д. 27

E-mail: `inburenev@gmail.com`

E-mail: `agp@pdmi.ras.ru`

Поступило 9 ноября 2020 г.