Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 494, 2020 г.

В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский

РЕАЛИЗАЦИЯ ОПЕРАТОРА УНИЧТОЖЕНИЯ ОБОБЩЁННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ЧЕБЫШЕВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Светлой памяти нашего друга В. Д. Ляховского

§1. Введение

Эта работа продолжает исследование обобщенных алгебр Гейзенберга [4], связанных с некоторыми системами ортогональных полиномов. В [3] была построена общая схема реализации операторов уничтожения для этих алгебр дифференциальными операторами. Заметим, что за исключением стандартного случая многочленов Эрмита дифференциальный оператор $\mathbf{A}$, появляющийся в таких реализациях, имеет бесконечный порядок.

В работе [3] был рассмотрен один важный частный случай систем ортогональных полиномов, для которых матрица оператора A в $l^2(\mathrm{Z}_+)$ имеет отличные от нуля элементы только на первой наддиагонали. Обобщенные многочлены Эрмита [5, 6] дают нам пример такой ортонормированной системы полиномов. В настоящей работе мы рассмотрим другой важный частный случай систем ортогональных полиномов, для которых матрица оператора уничтожения A в $l^2(\mathrm{Z}_+)$ имеет отличные от нуля элементы вне главной диагонали только на всех нечетных наддиагоналях Обобщенные многочлены Чебышева [2, 7] дают нам пример такой ортонормированной системы полиномов. Соответствующий обобщенный осциллятор Чебышева был введен и изучен в [1].

Ключевые слова: матрица Якоби, обобщенные многочлены Чебышева, обобщенный осциллятор Чебышева.

Авторы признательны И. К. Лицкевич за содействие при выполнении некоторых вычислений.

1.1. Обобщенные полиномы Чебышева. Обобщенные многочлены Чебышева $Ch_n(z;k;a)$, $k \geqslant 1$, определяются рекуррентными соотношениями:

$$
\begin{gathered}
b_n Ch_{n+1}(z;k;a) + b_{n-1} Ch_{n-1}(z;k;a) = z Ch_n(z;k;a), \quad n \geqslant 0, \\
Ch_0(z;k;a) = 1, \quad Ch_{-1}(z;k;a) = 0,
\end{gathered} \tag{1}
$$

где $b_{k-1} = a$, и $b_n = 1$, при $n \neq k-1$. Используя выражение, полученное в [3] для многочленов, связанных с сотношением (1) (и с соответствующей матрицей Якоби), мы имеем

$$
Ch_n(z;k;a) = \sum_{m=0}^{Ent(\frac{n}{2})} \frac{(-1)^m}{\sqrt{[n]!}} b_0^{2m-n} \beta_{2m-1,n-1} z^{n-m},
$$

где $\beta_{-1,n-1} = 1$, $n \geqslant 0$, и

$$
\beta_{2m-1,n-1} = \sum_{k_1=2m-1}^{n-1} [k_1]! \sum_{k_2=2m-3}^{k_1-2} [k_2]! \cdots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}-2} [k_m]!
$$

для всех $m \geqslant 1$. Здесь $[s] = \frac{b_{s-1}^2}{b_0^2}$, а $Ent(x)$ – целая часть x.

В качестве примера приведем последние формулы в случае $k=1$, обозначив

$$
\begin{aligned}
&\Psi_n(z) = Ch_n(z;1;a): \\
&\Psi_0(z) = 1, \quad \Psi_1(z) = \frac{z}{a}, \\
&\Psi_n(z) = \frac{z^n}{a} - \frac{n + (a^2-2)}{a} z^{n-2} \\
&\qquad + \sum_{m=2}^{Ent(\frac{n}{2})} (-1)^m \frac{(n-m-1)!(n+m(a^2-2))}{(n-2m)!m!a} z^{n-2m}, \quad n \geqslant 2.
\end{aligned} \tag{2}
$$

В данной работе мы рассмотрим только случай $k=1$.

1.2. Обобщенный осциллятор Чебышева (в случае $\mathbf{k=1}$). Пусть $a>0$ и $\mathcal{H}_a = L^2(\mathbb{R};\mu_a)$ – фиксированное гильбертово пространство, а $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ система многочленов, ортонормированных относительно меры μ_a, где

$$
d\mu_a(x) = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \frac{a^2\sqrt{4-x^2}}{a^4-(a^2-1)x^2} dx, & \text{if} \quad |x| \leqslant 2, \\ 0, & \text{if} \quad |x| > 2. \end{cases}
$$

Тогда, как следует из [2] (см. также [7]), многочлены $\varphi_n(x)$ есть обобщенные многочлены Чебышева $\Psi_n(x)$ (для случая $k=1$) и рекуррентные соотношения (1) принимают вид:

$$a\Psi_1(x) = z\Psi_0(z), \quad \Psi_2(x) + a\Psi_0(x) = x\Psi_1(x),$$
$$\Psi_{n+1}(x) + \Psi_{n-1}(x) = x\Psi_n(x), \quad n \geqslant 2,$$
$$\Psi_0(x) = 1, \quad \Psi_{-1}(x) = 0,$$

В работе [4] было показано, что можно построить осциллятороподобную алгебру $\mathfrak{A}_\psi$ соответствующую этой системе полиномов. Многочлены $\{\Psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ образуют базис Фока для этой алгебры $\mathfrak{A}_\Psi$ в пространстве Фока $\mathcal{H}_a$. Генераторы $a^+_{\mu_a}$, $a^-_{\mu_a}$, N_Ψ алгебры $\mathcal{A}_\Psi$ в этом представлении Фока действует следующим образом

$$a^+_{\mu_a}\Psi_n = \sqrt{2}b_n\Psi_{n+1}, \quad a^-_{\mu_a}\Psi_n = \sqrt{2}b_{n-1}\Psi_{n-1}, \quad N_\Psi\Psi_n = n\Psi_n, \tag{3}$$

где

$$b_{-1} = 0, \quad b_0 = a, \quad b_n = 1, \quad n \geqslant 1.$$

Пусть I – единичный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_a$. Определим $B_\Psi(N_\Psi)$ как операторо-значную функцию, задаваемую равенствами

$$B_\Psi(N_\Psi)\Psi_n = b^2_{n-1}\Psi_n, \quad B_\Psi(N_\Psi + I)\Psi_n = b^2_n\Psi_n, \quad n \geqslant 0.$$

Тогда алгебра обобщенного осциллятора Чебышева $\mathfrak{A}_\Psi$ порождается операторами $a^\pm_\Psi$, N_Ψ и I удовлетворяющими соотношениям

$$a^-_{\mu_a}a^+_{\mu_a}\Psi_n = 2B_\Psi(N_\Psi + I), \quad a^+_{\mu_a}a^-_{\mu_a}\Psi_n = 2B_\Psi(N_\Psi),$$
$$[N_\Psi, a^\pm_{\mu_a}] = \pm a^\pm_{\mu_a},$$

и коммутаторами этих операторов.

1.3. Постановка задачи. Основной целью настоящей работы является нахождение коэффициентов a_{ls}, при которых оператор $\mathbf{A}$, определяемый соотношением $a^-_{\mu_a} = \sqrt{2}\mathbf{A}$, принимает вид

$$\mathbf{A} = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{s-1} a_{ls}z^l\frac{d^s}{dz^s}. \tag{4}$$

Обозначим $A = \{a_{ls}\}$ $(1 \leqslant s < \infty, \quad 0 \leqslant l \leqslant (s-1))$ матрицу оператора $\mathbf{A}$. Используя определение оператора $\mathbf{A}$ и (3), мы получаем

$$\mathbf{A}\Psi_n = b_{n-1}\Psi_{n-1}, \quad n \geqslant 1, \quad \mathbf{A}\Psi_0 = 0. \tag{5}$$

Подставляя соотношения (2) и (4) в (5), получаем основное соотношение для нахождения элементов a_{ls} матрицы A:

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=0}^{s-1} a_{ls}\Big(\frac{n!}{(n-s)!}z^{n+l-s} - (n-2+a^2)\frac{(n-2)!}{(n-2-s)!}z^{n+l-s-2} \\
&\quad + \sum_{m=2}^{Ent(\frac{n}{2})}(-1)^m\frac{(n-m-1)!(n+m(a^2-2))}{(n-2m-s)!m!}z^{n+l-2m-s}\Big) \\
&\quad = z^{n-1} - (n-3+a^2)z^{n-3} \\
&\quad + \sum_{m=2}^{Ent(\frac{n}{2})}(-1)^m\frac{(n-m-2)!(n-1+m(a^2-2))}{(n-2m-1)!m!}z^{n-1-2m}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Приравнивая коэффициенты при z^{n-2k} в левой и правой частях тождества (6), мы получаем уравнения для нахождения коэффициентов $a_{s-2t,s}$ при условии $s \geqslant 2t \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{k}(-1)^{m-1}\frac{n+(m-1)(a^2-2)}{(m-1)!} \\
&\times \sum_{s=2(k-m+1)}^{n-2(m-1)} a_{s-2(k-m+1),s}\frac{(n-m)!}{(n-s-2(m-1))!} = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Аналогично, используя коэффициенты при степенях z^{n-2k-1}, мы получаем уравнения для определения коэффициентов $a_{s-2t-1,s}$, при условии $s \geqslant 1$, $t \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{k+1}(-1)^{m-1}\frac{n+(m-1)(a^2-2)}{(m-1)!} \\
&\quad \times \sum_{s=2(k-m+1)+1}^{n-2(m-1)} a_{s-2(k-m+1)-1,s}\frac{(n-m)!}{(n-s-2(m-1))!} \\
&\quad = (-1)^k\frac{(n-k-2)!(n-1-2k+ka^2)}{(n-1-2k)!k!}.
\end{aligned} \tag{8}$$

§2. Вычисление элементов матрицы A оператора уничтожения

2.1. Вычисление элементов стоящих на четных наддиагоналях матрицы A. В этом параграфе мы докажем, что элементы $a_{n-2k,n}$ стоящие на четных наддиагоналях матрицы $\mathbf{A}$ оператора уничтожения равны нулю:

$$a_{n-2k,n} = 0, \quad k \geqslant 1, \quad n \geqslant 2k. \tag{9}$$

Сперва покажем, что

$$a_{0,2q} = 0, \quad q \geqslant 1. \tag{10}$$

С этой целью мы воспользуемся (7) при $n = 2p$, $k = p$

$$a_{0,2p}\frac{2p!}{0!} - a_{0,2p-2}(2p-2+a^2)\frac{(2p-2)!}{1!} + a_{0,2p-4}(2p-4+2a^2)\frac{(2p-4)!}{2!} + ... + (-1)^{p-1}a_{0,2}a^2 = 0.$$

Последовательно используя последнее равенство для всех $p = 1, 2, ..., q$, получаем (10).

Далее мы докажем равенство

$$a_{1,1+2q} = 0, \quad q \geqslant 1. \tag{11}$$

Мы будем использовать (7) при $n = 2p+1$, $k = p$:

$$\begin{aligned}
&a_{0,2p}\frac{(2p+1)!}{1!} + a_{1,2p+1}\frac{(2p+1)!}{0!} \\
&- (2p-1+a^2)(a_{0,2p-2}\frac{(2p-1)!}{1!1!} + a_{1,2p-1}\frac{(2p-1)!}{0!1!}) \\
&+ (2p-3+2a^2)(a_{0,2p-4}\frac{(2p-2)!}{1!2!} + a_{1,2p-3}\frac{(2p-2)!}{0!2!}) \\
&+ ... + (-1)^{p-1}(1+pa^2)(a_{0,2}\frac{p!}{1!(p-1)!} + a_{1,3}\frac{p!}{0!(p-1)!}) = 0.
\end{aligned}$$

Последовательно используя это равенство для всех $p = 1, 2, ..., q$, получаем (11).

Рассмотрим теперь общий случай

$$a_{t,t+2q} = 0, \quad q \geqslant 1, \quad t \geqslant 0. \tag{12}$$

Очевидно, что $a_{t,t+2q}$ переходит в $a_{n-2k,n}$ при $q = k$, $t = n-2k$. Из формулы (7) следует, что все коэффициенты $a_{t,t+2q}$ выражается только через коэффициенты $a_{s,s+2p}$ если $0 \leqslant s < t$, $p \leqslant q$ и $s = t$, $p < q$.

Затем, используя формулы (10), (12) и постепенно увеличивая индексам p и s, нетрудно доказать справедливость равенства (9).

2.2. Вычисление элементов стоящих на нечётных наддиагоналях матрицы A. Главным результатом этой работы является формула:

$$
\begin{aligned}
a_{l,l+2k+1} = {} & \frac{(-1)^{l+1}}{(l+2k+1)!} \\
& \times ((1-\delta_{l,0})C_k C_{l+2k}^{2k+1} - C_{l+2k+1}^{2k+1} P_{k,2k+2}(a)), \quad l,\ k \geqslant 0,
\end{aligned} \tag{13}
$$

где $C_k = \frac{C_{2k}^k}{(k+1)}$ – числа Каталана, $\delta_{0,0} = 1$ and $\delta_{l,0} = 0$ for $l > 0$. Полиномы $P_{k,2k+2}(a)$ определяются соотношениями:

$$
\begin{aligned}
& P_{0,2}(a) = a^2; \quad P_{1,4}(a) = a^4; \quad P_{2,6}(a) = a^6 + a^4; \\
& P_{k,2k+2}(a) = a^{2k+2} + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_{k,i} a^{2(k-i+1)} \quad k \geqslant 3; \\
& \beta_{k,1} = k-1,\ k \geqslant 2; \quad \beta_{k,i} = \frac{(k+1)(k+2)...(k+i-1)(k-i)}{i!}, \\
& 2 \leqslant i \leqslant k-2; \quad \beta_{k,k-1} = \beta_{k,k-2} = C_{k-1}, \quad k \geqslant 4.
\end{aligned} \tag{14}
$$

Из (8) следует соотношение

$$
\begin{aligned}
a_{n-(2k+1),n} = {} & \frac{1}{n!}\Bigg(- \sum_{s=2k+1}^{n-1} a_{s-(2k+1),s} \frac{n!}{(n-s)!} + \sum_{m=2}^{k+1} (-1)^{m-2} \\
& \times \sum_{s=(2k+1)-2(m-1)}^{n-2(m-1)} a_{s-(2k+1-2(m-1)),s} \frac{(n-m)!(n+(m-1)(a^2-2))}{(n-s-2(m-1))!(m-1)!} \\
& + (-1)^k \frac{(n-k-2)!(n-1-2k+ka^2)}{(n-1-2k)!k!} \Bigg).
\end{aligned}
$$

Заменив индексы $l = n-(2k+1)$, $t = s-(2k+1)+2(m-1)$, получим

$$
\begin{aligned}
a_{l,l+(2k+1)} = \frac{1}{(l+2k+1)!}\Bigg(&-\sum_{t=0}^{l-1} a_{t,t+(2k+1)}\frac{(l+2k+1)!}{(l-t)!} \\
&+ \sum_{m=2}^{k+1}(-1)^{m-2}\sum_{t=0}^{l} a_{t,t+(2k+1-2(m-1))} \\
&\times \frac{(l+2k+1-m)!(l+2k+1+(m-1)(a^2-2))}{(l-t)!(m-1)!} \\
&+ (-1)^k\frac{(l+k-1)!(l+ka^2)}{l!k!}\Bigg).
\end{aligned} \tag{15}
$$

В оставшейся части этой статьи мы докажем формулу (13) индукцией, используя соотношение (15). В качестве базы индукции возьмем случай $l = 0, k = 0$. Очевидно, что формула (13) справедлива, так как

$$a_{0,0+1} = a^2 = P_{0,2}. \tag{16}$$

Отметим, что используя формулу (15) коэффициенты $a_{l,l+(2k+1)}$ можно выразить через элементы $a_{u,v}$ с "меньшими" значениями индексов, т.е. с индексами $u \leqslant l$, $v \leqslant l+(2k+1)$ и $u+v < 2l+2k+1$. Тогда индукционный переход состоит в том, что предпологая справедливость формулы (13) для всех коэффициентов $a_{u,v}$, стоящих в правой части равенства (15), мы должны доказать справедливость формулы (13) также и для левой части равенства (15). Чтобы доказать это утверждение, достаточно проверить равенство в обеих частях соотношения (15) всех коэффициентов у многочленов одной и той же степени по a^2, которые возникают при подстановке в (15) выражений для всех $a_{t,t+(2s+1)}$ по формуле (13).

Из определения оператора $\mathbf{A}$ (см. (4)) видно, что матрица A этого оператора является верхне-треугольной матрицей. Удобно начать доказательство формулы (13) с рассмотрения “граничных” ненулевых элементов матрицы A, то есть элементов $a_{l,l+1}$ ($k = 0$, $l > 0$), стоящих на первой наддиагонали матрицы A и элементов $a_{0,\,2k+1}$ ($k \geqslant 0$, $l = 0$), стоящих в первой строке матрицы A.

§3. Два специальных случая формулы (13)

3.1. Случай $k = 0$, $l > 0$. Из (15) при $k = 0$, $l > 0$ получаем

$$(l+1)!\, a_{l,l+1} = -\sum_{t=0}^{l-1} a_{t,t+1} \frac{(l+1)!}{(l-t)!} + (-1)^0 \frac{(l-1)!l}{l!0!}. \tag{17}$$

Заметим, что формула (13) при $k = 0$, $l > 0$ имеет вид

$$a_{l,l+1} = \frac{(-1)^{l+1}}{(l+1)!} \left(C_l^1 - C_{l+1}^1 P_{0,2}(a) \right). \tag{18}$$

Подставляя (18) в (17) и используя (16), получаем

$$(-1)^{l+1} \left(\frac{l(l+1)!}{(l+1)!} - a^2 \frac{(l+1)!}{l!} \right) \\ = -\sum_{t=0}^{l-1} (-1)^{t+1} t C_{l+1}^{t+1} + a^2 \sum_{t=0}^{l-1} (-1)^{t+1} (t+1) C_{l+1}^{t+1} + 1.$$

Перемещая первое и второе слагаемые из правой части в левую часть последнего равенства, получим

$$\sum_{t=0}^{l} (-1)^{t+1} t C_{l+1}^{t+1} - a^2 \sum_{t=0}^{l} (-1)^{t+1} (t+1) C_{l+1}^{t+1} = 1. \tag{19}$$

Для доказательства (19) достаточно проверить выполнение следующих двух равенств

$$\sum_{t=0}^{l} (-1)^{t+1} t C_{l+1}^{t+1} = 1, \quad \text{и} \quad \sum_{t=0}^{l} (-1)^{t+1} (t+1) C_{l+1}^{t+1} = 0. \tag{20}$$

Первое из этих равенств следует из тождества (44), доказанного ниже для $q = 0$. Чтобы доказать второе равенство, запишем его левую часть в виде суммы

$$\sum_{t=0}^{l} (-1)^{t+1} t C_{l+1}^{t+1} + \sum_{t=0}^{l} (-1)^{t+1} C_{l+1}^{t+1} = 1 - 1 = 0.$$

Таким образом формула (13) доказана для случая $k = 0$, $l > 0$.

3.2. Случай $l = 0$, $k \geqslant 0$ (доказательство формулы (14). Рассмотрим сперва случай $l = 0$, $k \geqslant 0$. Заметим, что для $l = 0$, первый член в скобках в правой части равенства (13) исчезает, т. е. равенство (13) принимает вид

$$a_{0,2k+1} = \frac{1}{(2k+1)!} C_{2k+1}^{2k+1} P_{k,2k+2}(a), \quad k \geqslant 0. \tag{21}$$

Формула справедлива для $k = 0$, так как, как уже упоминалось (см. формулу (16)) $a_{0,1} = a^2$, если мы предположим, что $P_{0,2}(a) = a^2$. Перепишем далее формулу (15) для случая $l = 0, k \geqslant 1$ (Заметим, что при $l = 0$ первый член в скобках в правой части равенства (15) равен нулю)

$$\begin{aligned} a_{0,2k+1} = \frac{1}{(2k+1)!} \Bigg(\sum_{m=2}^{k+1} [(-1)^{m-2} a_{0,2k+1-2(m-1)} \\ \times \frac{(2k+1-m)!(2k+1+(m-1)(a^2-2))}{0!(m-1)!}] + (-1)^k \frac{(k-1)!ka^2}{0!k!} \Bigg). \end{aligned} \tag{22}$$

Для проверки формулы (22) достаточно проверить равенство всех коэффициентов многочленов с одинаковыми степенями a^2, возникающих при замене всех $a_{0,2k+1-2(m-1)}$ в обеих частях соотношения (22) по формуле (21). Другими словами, нам нужно проверить следующее равенство.

$$\begin{aligned} P_{k,2k+2}(a) = \sum_{m=2}^{k+1} \Bigg[(-1)^{m-2} P_{k-m+1,2(k-m+1)+2}(a) \\ \times \frac{(2k+1-m)!(2k+1+(m-1)(a^2-2))}{(2(k-m+1)+1)!(m-1)!} \Bigg] + (-1)^k a^2, \quad k \geqslant 1. \end{aligned} \tag{23}$$

Рассмотрим случаи $k = 1$ и $k = 2$. Когда $k = 1$ имеем

$$P_{1,4}(a) = (-1)^2 P_{0,2} \frac{1!(3+a^2-2)}{1!} - a^2 = a^2(1+a^2) - a^2 = a^4. \tag{24}$$

Когда $k = 2$ имеем

$$\begin{aligned} P_{2,6}(a) = P_{1,4}(a) \frac{3!(5+a^2-2)}{3!1!} \\ - P_{0,2}(a) \frac{2!(5+2a^2-4)}{1!2!} + a^2 = a^6 + a^4. \end{aligned} \tag{25}$$

Заметим, что, используя (24) и (25), из (23) получаем следующий многочлен

$$P_{3,8}(a) = a^8 + 2(a^6 + a^4). \tag{26}$$

При $k \geqslant 2$ мы будем искать выражение для многочлена $P_{k,2k+2}(a)$ в виде

$$P_{k,2k+2}(a) = a^{2k+2} + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_{k,i} a^{2(k-i+1)}. \tag{27}$$

Сравнив выражения (25) и (26) для многочленов $P_{2,6}(a)$ и $P_{3,8}(a)$ с выражениями, полученными из (27) для $k = 2$ и $k = 3$, соответственно, имеем

$$\beta_{2,1} = C_1 = 1, \quad \beta_{3,1} = \beta_{3,2} = C_2 = 2. \tag{28}$$

Далее мы будем использовать (27) при $k \geqslant 3$. Чтобы проверить формулу (23) при $k \geqslant 3$, перепишем ее в следующем виде

$$\begin{aligned}
&P_{k,2k+2}(a) = \sum_{m=2}^{k-2} [(-1)^{m-2} P_{k-m+1,2(k-m+1)+2}(a) \\
&\times \frac{(2k+1-m)!(2k+1+(m-1)(a^2-2))}{(2(k-m+1)+1)!(m-1)!}] \\
&+ (-1)^{k-3} P_{2,6}(a) \frac{(2k+1-k+1)!(2k+1+(k-2)(a^2-2))}{(4+1)!(k-2)!} \\
&+ (-1)^{k-2} P_{1,4}(a) \frac{(k+1)!(2k+1+(k-1)(a^2-2))}{(2+1)!(k-1)!} \\
&+ (-1)^{k-1} P_{0,2}(a) \frac{k!(2k+1+k(a^2-2))}{1!k!} + (-1)^k a^2, \quad k \geqslant 1.
\end{aligned} \tag{29}$$

Подставляя в (29) вместо многочленов $P_{p,2p+2}(a)$ их выражения по формуле (27) при $p \geqslant 3$ мы имеем

$$\begin{aligned}
a^{2k+2} + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_{k,i} a^{2(k-i+1)} = \sum_{m=2}^{k-2} [(-1)^{m-2} (a^{2(k-m+1)+2} \\
+ \sum_{j=1}^{k-m+1-3} \beta_{k-m+1,j} a^{2(k-m+1-j+1)} + \beta_{k-m+1,k-m+1-2}(a^6 + a^4)) \\
\times \frac{(2k+1-m)!(2k+1+(m-1)(a^2-2))}{(2(k-m+1)+1)!(m-1)!}] \\
+ (-1)^{k-3} P_{2,6}(a) \frac{(2k+1-k+1)!(2k+1+(k-2)(a^2-2))}{(4+1)!(k-2)!} \\
+ (-1)^{k-2} P_{1,4}(a) \frac{(k+1)!(2k+1+(k-1)(a^2-2))}{(2+1)!(k-1)!} \\
+ (-1)^{k-1} P_{0,2}(a) \frac{k!(2k+1+k(a^2-2))}{1!k!} + (-1)^k a^2, \quad k \geqslant 1.
\end{aligned} \tag{30}$$

Приравнивая коэффициенты при одних и тех же степенях a^2 в обеих частях соотношения (30) мы убедимся далее в справедливости формул (14) для $\beta_{k,i}$.

Начнем с нахождения $\beta_{k,k-2}$ (коэффициент при a^6) и $\beta_{k,k-1}$ (коэффициент при a^4):

$$\begin{aligned}
\beta_{k,k-2} = (-1)^{k-2} C_{k+1}^{k-2} + \sum_{t=1}^{k-2} (-1)^{k-2-t} C_t C_{k+2+t}^{k-1-t} = C_{k-1}, \\
\beta_{k,k-1} = (-1)^{k-1} C_{k}^{k-1} + \sum_{t=0}^{k-2} (-1)^{k-2-t} C_t C_{k+1+t}^{k-1-t} = C_{k-1}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Доказательство формул (31) приведено в Приложении 1. Таким образом, доказана справедливость при $k \geqslant 2$ равенств

$$\beta_{k,k-2} = \beta_{k,k-1} = C_{k-1}. \tag{32}$$

Приравнивая коэффициенты при $a^{2(k-i+1)}$ с $k \geqslant 3$ и $1 \leqslant i \leqslant k-2$, для величин $\beta_{p,q}$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}\beta_{k,i} &= (-1)^{i-1}C^i_{2k-i} + (-1)^i C^i_{2k-i-1} + (-1)^{i-1}\beta_{k-i,1}C^{i-1}_{2k-i} \\ &+ \sum_{m=2}^{i}(-1)^{m-2}(\beta_{k-m+1,i-m+1}C^{m-1}_{2k-m+1} + \beta_{k-m+1,i-m+2}C^{m-2}_{2k-m+1}).\end{aligned} \tag{33}$$

Методом индукции докажем формулу

$$\beta_{k,1} = k-1. \tag{34}$$

Равенство $\beta_{3,1} = 2$ (см. (28)) служит базой индукции. Из формулы (33)) следует

$$\beta_{k,1} = (-1)^0 C^1_{2k-1} + (-1)^1 C^1_{2k-2} + (-1)^0\beta_{k-1,1}C^0_{2k-1} = 1 + \beta_{k-1,1}.$$

Последнее равенство дает индуктивный переход: если $\beta_{k-1,1} = k-2$, то $\beta_{k,1} = 1 + k - 2 = k - 1$. Таким образом, формула (34) доказана.

Далее из (33) при $k \geqslant 3$ и $i = 2$ для $\beta_{k,2}$ получаем

$$\begin{aligned}\beta_{k,2} = -C^2_{2k-2} + (-1)^2 C^2_{2k-3} + (-1)^0(\beta_{k-1,1}C^1_{2k-1} + \beta_{k-1,2}C^0_{2k-1}) \\ + (-1)^1\beta_{k-2,1}C^1_{2k-2} = \beta_{k-1,2} + k - 1.\end{aligned}$$

Последнее равенство даёт индуктивный переход, а равенство $\beta_{3,2} = 2$ служит базой индукции. Тогда

$$\beta_{k,2} = (k-1) + (k-2) + ... + 2 = \frac{(k+1)(k-2)}{2!}, \quad k \geqslant 3. \tag{35}$$

При $i = 2$ это равенство совпадает с (14).

Учитывая соотношения (16), (24), (25), (27), (32) и (34), для завершения доказательства формулы (14) осталось проверить что для коэффициентов $\beta_{k,i}$, определяемых равенством (33), при $2 \leqslant i \leqslant k-2$ справедливо следующее соотношение.

$$\begin{aligned}\beta_{k,i} = C^{k-1}_{k+i-1} - C^k_{k+i-1} = \frac{k-i}{i}C^{k-1}_{k+i-1} \\ = \frac{(k+1)(k+2)...(k+i-1)(k-i)}{i!}.\end{aligned} \tag{36}$$

Докажем (36) индукцией. В качестве базы индукци возьмем соотношения (28) и (35). Индуктивный переход состоит в доказательстве, что коэффициенты $\beta_{k,i}$, вычисленные по формуле (33), удовлетворяют соотношению (36), при условии, что все коэффициенты $\beta_{p,q}$ входящие в правую часть (33) удовлетворяют равенству (36).

Итак, для доказательства (36) достаточно проверить справедливость следующего равенства

$$\begin{aligned}(-1)^i C^i_{2k-i-1} &+ (-1)^{i-1} C^i_{2k-i} + (-1)^{i-1} C^1_{k-i-1} C^{i-1}_{2k-i} \\ &+ \sum_{m=2}^{i} (-1)^{m-2} \left[(C^{k-m}_{k+i-2m+1} - C^{k-m+1}_{k+i-2m+1}) C^{m-1}_{2k-m+1} \right. \\ &\left. + (C^{k-m}_{k+i-2m+2} - C^{k-m+1}_{k+i-2m+2}) C^{m-2}_{2k-m+1}) \right] \\ &= C^{k-1}_{k+i-1} - C^{k}_{k+i-1}, \quad 2 \leqslant i \leqslant k-2.\end{aligned} \tag{37}$$

Обозначим $S(m;k,i)$ общий член суммы в (37):

$$\begin{aligned}S(m;k,i) = (-1)^{m-2} &\left[(C^{k-m}_{k+i-2m+1} - C^{k-m+1}_{k+i-2m+1}) C^{m-1}_{2k-m+1} \right. \\ &\left. + (C^{k-m}_{k+i-2m+2} - C^{k-m+1}_{k+i-2m+2}) C^{m-2}_{2k-m+1}) \right].\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned}S(1;k,i) &= -C^{k-1}_{k+i-1} + C^{k}_{k+i-1}, \\ S(i+1;k,i) &= (-1)^{i-1} (C^i_{2k-i} + C^1_{k-i-1} C^{i-1}_{2k-i}), \\ S(i+2;k,i) &= (-1)^i C^i_{2k-i-1}.\end{aligned}$$

Тогда соотношение (36) можно переписать следующим образом

$$\sum_{m=1}^{i+2} S(m;k,i) = 0. \tag{38}$$

Справедливость этого равенства проверялась в программе символьных вычислений "Mathematica". Таким образом, соотношение (36) доказано, а следовательно, доказана и формула (14).

§4. Проверка равенства многочленов первой степени

Теперь рассмотрим случай $l > 0$, $k > 0$. Приравнивая многочлены первой степени от a^2, возникающие при замене в (15) выражений для всех $a_{t,t+(2s+1)}$ по формуле (13) получаем

$$\begin{gathered}\frac{(-1)^{l+1}}{(l+2k+1)!}C_k C_{l+2k}^{2k+1} = \frac{1}{(l+2k+1)!} \\ \times \left\{\sum_{t=0}^{l-1}(\delta_{t,0}-1)\frac{(-1)^{t+1}}{(t+2k+1)!}C_k C_{t+2k}^{2k+1}\frac{(l+2k+1)!}{(l-t)!} + \sum_{m=2}^{k+1}(-1)^{m-2}\right. \\ \times \sum_{t=0}^{l}(1-\delta_{t,0})[\frac{(-1)^{t+1}}{(t+2(k-m+1)+1)!}C_{k-m+1}C_{t+2(k-m+1)}^{2(k-m+1)+1} \\ \times \frac{(l+2k+1-m)!(l+2k+1+(m-1)(a^2-2))}{(l-t)!(m-1)!}] \\ \left. +(-1)^k\frac{(l+k-1)!(l+ka^2)}{l!k!}\right\}.\end{gathered} \tag{39}$$

Итак, нам нужно доказать справедливость этого равенства. Для этого достаточно проверить следующие два соотношения:

$$\begin{gathered}\sum_{m=2}^{k+1}(-1)^{m-2}\frac{(l+2k+1-m)!(m-1)}{(m-1)!}\sum_{t=1}^{l}C_{k-m+1}C_{t+2(k-m+1)}^{2(k-m+1)+1} \\ \times\frac{(-1)^{t+1}}{(l-t)!(t+2(k-m+1)+1)!} = (-1)^{k+1}\frac{(l+k-1)!k}{l!k!},\end{gathered} \tag{40}$$

а также

$$\begin{aligned}(-1)^{l+1}(1-\delta_{l,0})C_k C_{l+2k}^{2k+1} &= \sum_{t=0}^{l-1}(\delta_{t,0}-1)\frac{(-1)^{t+1}}{(t+2k+1)!}C_k \\ &\times C_{t+2k}^{2k+1}\frac{(l+2k+1)!}{(l-t)!} + \sum_{m=2}^{k+1}(-1)^{m-2}\sum_{t=0}^{l}(1-\delta_{t,0}) \\ &\times\left[\frac{(-1)^{t+1}}{(t+2(k-m+1)+1)!}\times C_{k-m+1}C_{t+2(k-m+1)}^{2(k-m+1)+1}\right. \\ &\left.\times\frac{(l+2k+1-m)!(l+2k+1+(m-1)(-2))}{(l-t)!(m-1)!}\right] \\ &+(-1)^k\frac{(l+k-1)!l}{l!k!}.\end{aligned} \tag{41}$$

Сперва проверим равенство (40), означающее, что коэффициент при a^2 в правой части (13) равен нулю. Перепишем равенство (40), заменив индекс суммирования $m = k + 1 - q \quad (m > 1)$

$$\sum_{q=0}^{k-1} (-1)^{k-q-1} \frac{(l+k+q)!}{(k-q-1)!} \sum_{t=1}^{l} C_q C_{t+2q}^{2q+1} \frac{(-1)^{t+1}}{(l-t)!(t+2q+1)!} = (-1)^{k-1} C_{l+k-1}^{k-1}. \quad (42)$$

Далее сравним равенство (42) при $s = l + k$ с тождеством (которое будет доказано в Приложении 2):

$$\sum_{q=0}^{k-1} (-1)^{k-q-1} C_q C_{s+q}^{k-1-q} = (-1)^{k-1} C_{s-1}^{k-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant s. \quad (43)$$

Очевидно, что для доказательства равенства (40) достаточно проверить, что коэффициенты у всех C_q в левой части соотношений (42) и (43) совпадают, то есть

$$\sum_{t=1}^{l} (-1)^{t+1} C_{t+2q}^{1+2q} C_{l+2q+1}^{t+2q+1} = 1. \quad (44)$$

Заменяя переменную $\tau = t + 2q + 1$ получим

$$\sum_{\tau=2q+2}^{l+2q+1} (-1)^{\tau-2q} C_{\tau-1}^{1+2q} C_{l+2q+1}^{\tau} = 1. \quad (45)$$

Поскольку $C_{\tau-1}^{1+2q} C_{l+2q+1}^{\tau} = C_{l+2q+1}^{l} \frac{l}{\tau} C_{l-1}^{\tau-2q-2}$, (45) можно переписать как

$$C_{l+2q+1}^{l}\, l \sum_{\tau=2q+2}^{l+2q+1} (-1)^{\tau-2q} \frac{C_{l-1}^{\tau-2q-2}}{\tau} = 1.$$

Изменив индекс суммирования еще раз $s = \tau - 2(q+1)$, получим

$$C_{l+2q+1}^{l}\, l \sum_{s=0}^{l-1} (-1)^{s} \frac{C_{l-1}^{s}}{s + 2(q+1)} = 1.$$

Используя формулу (4.2.2.45) из [8], получаем

$$C_{l+2q+1}^{l}\, l \frac{(l-1)!}{\prod_{s=0}^{l-1}(s+2q+2)} = \frac{(l+2q+1)!}{(l+2q+1)!} = 1,$$

так что (45) доказано. Это завершает доказательство справедливости соотношения (40).

Перейдем к проверке равенства (41). Запишем это равенство в виде:

$$A = B_1 + B_2, \tag{46}$$

где

$$A = (-1)^{l+1}(1-\delta_{l,0})C_k C_{l+2k}^{2k+1} + \sum_{t=0}^{l-1}(1-\delta_{t,0})\frac{(-1)^{t+1}}{(t+2k+1)!}C_k C_{t+2k}^{2k+1}\frac{(l+2k+1)!}{(l-t)!},$$

и

$$\begin{aligned} B_1 &= \sum_{m=2}^{k+1}(-1)^{m-2}\sum_{t=0}^{l}(1-\delta_{t,0})\left[\frac{(-1)^{t+1}}{(t+2(k-m+1)+1)!}\right. \\ &\quad \left.\times C_{k-m+1}C_{t+2(k-m+1)}^{2(k-m+1)+1}\frac{(l+2k+1-m)!(l+2k+1)}{(l-t)!(m-1)!}\right]; \\ B_2 &= \sum_{m=2}^{k+1}(-1)^{m-2}\sum_{t=0}^{l}(1-\delta_{t,0})\left[\frac{(-1)^{t+1}}{(t+2(k-m+1)+1)!}\right. \\ &\quad \left.\times C_{k-m+1}C_{t+2(k-m+1)}^{2(k-m+1)+1}\frac{(l+2k+1-m)!(m-1)(-2)}{(l-t)!(m-1)!}\right] \\ &\quad + (-1)^k\frac{(l+k-1)!l}{l!k!}. \end{aligned} \tag{47}$$

Начнем с вычисления A. Заметим, что первый член может быть включен в сумму, т. е.

$$\begin{aligned} A &= \sum_{t=0}^{l}(1-\delta_{t,0})(-1)^{t+1}C_k C_{t+2k}^{2k+1}C_{l+2k+1}^{t+2k+1} \\ &= C_{l+2k+1}^{2k+1}C_k\sum_{t=0}^{l}(1-\delta_{t,0})(-1)^{t+1}C_l^t\frac{t}{t+2k+1} \\ &= C_{l+2k+1}^{2k+1}C_k\left[\sum_{t=1}^{l}(-1)^{t+1}C_l^t - (2k+1)\sum_{t=1}^{l}\frac{(-1)^{t+1}}{t+2k+1}C_l^t\right]. \end{aligned} \tag{48}$$

Из свойств биномиальных коэффициентов следует, что первый член в квадратных скобках равен 1, а второй, после замены $t = \tau + 1$ принимает вид

$$-l\left(\sum_{\tau=0}^{l-1}\frac{(-1)^\tau}{\tau+1}C_{l-1}^\tau - \sum_{\tau=0}^{l-1}\frac{(-1)^\tau}{\tau+2(k+1)}C_{l-1}^\tau\right).$$

Используя формулу (4.2.2.45) из [8], это выражение можно переписать в виде

$$-l\left(\frac{(l-1)!}{l!}-\frac{(l-1)!}{(2k+2)(2k+3)...(2k+2+l-1)}\right).$$

Подставляя полученные результаты в (48) получаем

$$\begin{aligned} A &= -C_k C_{l+2k+1}^{2k+1} + C_k C_{l+2k+1}^{2k+1} \\ &+ C_k l! \frac{(2k+l+1)!}{(2k+1)!(2k+2)...(2k+l+1)l!} = C_k. \end{aligned} \tag{49}$$

Перейдем к вычислению B_1. Заменив индекс $m = k+1-q$ в правой части выражения для B_1 (см. (47)), так же как и в (40) при получении (42), мы получаем следующее выражение для B_1.

$$\begin{aligned} B_1 &= (l+2k+1)\sum_{0}^{q=k-1}(-1)^{k-q-1}\frac{(l+k+q)!}{(k-q)!} \\ &\times \sum_{t=1}^{l} C_q C_{t+2q}^{2q+1}\frac{(-1)^{t+1}}{(t+2q+1)!(l-t)!}. \end{aligned} \tag{50}$$

Коэффициент при C_q в этой сумме имеет вид

$$(-1)^{k-q-1}C_{l+k+q}^{k-q-1}\frac{l+2k+1}{k-q}\sum_{t=1}^{l}(-1)^{t+1}C_{t+2q}^{1+2q}C_{l+2q+1}^{t+2q+1}.$$

Заметим, что последняя сумма равна 1 (см. (44)). Подставляя найденные значения коэффициентов при C_q в формулу (50), находим (обозначив $s = l+k$)

$$\begin{aligned} B_1 &= \sum_{q=0}^{k-1}(-1)^{k-q-1}C_q C_{s+q}^{k-q-1}\frac{s+k+1}{k-q} \\ &= \sum_{q=0}^{k-1}(-1)^{k-q-1}C_q C_{s+q}^{k-q-1} + \sum_{q=0}^{k-1}(-1)^{k-q-1}C_q C_{s+q+1}^{k-q} \\ &= \sum_{q=0}^{k-1}(-1)^{k-q-1}C_q C_{s+q}^{k-q-1} - \sum_{q=0}^{k}(-1)^{k-q}C_q C_{s+q+1}^{k-q} + C_k. \end{aligned}$$

Используя тождество (43) (и его аналог) для первой и второй сумм, мы получаем для B_1 выражение

$$B_1 = (-1)^{k-1} C_(s-1)^{k-1} + (-1)^{k-1} C_s^k + C_k. \tag{51}$$

Теперь вычислим B_2. Из сравнения формул (47) и (42), очевидно, что первая сумма в правой части (47) совпадает с левой частью (42), умноженной на множитель (-2). Тогда из (47) и (42) следует равенство.

$$\begin{aligned} B_2 &= (-1)^{k-1} C_{s-1}^{k-1}(-2) + (-1)^k C_{s-1}^k \\ &= (-1)^k (2C_{s-1}^{k-1} + C_{s-1}^k) = (-1)^k C_s^k + (-1)^k C_{s-1}^{k-1}. \end{aligned}$$

Проверим справедливость равенства (46), используя (51), (49) и (42). Имеем

$$\begin{aligned} A = C_k, \quad B_1 + B_2 &= (-1)^{k-1} C_{s-1}^{k-1} + (-1)^{k-1} C_s^k + C_k \\ &\quad + (-1)^k C_s^k + (-1)^k C_{s-1}^{k-1} = C_k. \end{aligned}$$

Следовательно, справедливость равенства (46), а следовательно, и равенств (39) и (41) доказана.

§5. Проверка равенства многочленов степени выше первой

Предпологая $l > 0$ и приравнивая многочлены степени выше первой по a^2, возникающие при замене в (15) выражений для всех $a_{t,t+(2s+1)}$ по формуле (13), получаем

$$\begin{aligned} &\frac{(-1)^{l+1}}{(2k+1)!l!} P_{k,2k+2}(a) \\ &\quad = \frac{1}{(l+2k+1)!} \left\{ -\sum_{t=0}^{l-1} \left(\frac{(-1)^{t+1}}{(2k+1)!t!} P_{k,2k+2}(a) \frac{(l+2k+1)!}{(l-t)!} \right. \right. \\ &\quad + \sum_{m=2}^{k+1} (-1)^{m-2} \sum_{t=0}^{l} \left[\frac{(-1)^{t+1}}{(2(k-m+1)+1)!t!} P_{k-m+1,2(k-m+1)+2}(a) \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{(l+2k+1-m)!(l+2k+1+(m-1)(a^2-2))}{(l-t)!(m-1)!} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{52}$$

Итак, нам нужно проверить справедливость этого равенства. Для удобства мы перепишем равенство (52) в следующем виде

$$\widetilde{A} = \widetilde{B}, \tag{53}$$

где

$$\widetilde{A} = \frac{(-1)^{l+1}}{(2k+1)!l!} P_{k,2k+2}(a) + \sum_{t=0}^{l-1} \frac{(-1)^{t+1}}{(2k+1)!t!} \frac{P_{k,2k+2}(a)}{(l-t)!},$$

и

$$\widetilde{B} = \sum_{m=2}^{k+1} (-1)^{m-2} \sum_{t=0}^{l} \left[\frac{(-1)^{t+1}}{(2(k-m+1)+1)!t!} P_{k-m+1,2(k-m+1)+2}(a) \right.$$
$$\left. \times \frac{(l+2k+1-m)!(l+2k+1+(m-1)(a^2-2))}{(l-t)!(m-1)!} \right].$$

Начнем с вычисления значения $\widetilde{A}$. Очевидно, что первый член в правой части может быть включен в сумму, т.е.

$$\widetilde{A} = \sum_{t=0}^{l} \frac{(-1)^{t+1}}{(2k+1)!t!} \frac{P_{k,2k+2}(a)}{(l-t)!} = \frac{P_{k,2k+2}(a)}{l!(2k+1)!} \sum_{t=0}^{l} (-1)^{t+1} C_l^t = 0.$$

Далее найдём $\widetilde{B}$. Для этого вычислим коэффициент при полиноме $P_{k-m+1,2(k-m+1)+2}(a)$:

$$(-1)^{m-2} \frac{(l+2k+1-m)!(l+2k+1+(m-1)(a^2-2))}{l!(2(k-m+1)+1)!(m-1)!}$$
$$\times \sum_{t=0}^{l} (-1)^{t+1} C_l^t = 0.$$

Итак равенство (53) выполняется, и, следовательно, тождество (52) справедливо. Это доказывает справедливость формулы (15) для всех $k > 0$ и $l > 0$. Следовательно, формула (13) полностью доказана.

§6. Заключительные замечания

В последнее время в теории ортогональных многочленов всё чаще используются линейные дифференциальные операторы произвольного порядка. Приведем несколько примеров.

Во-первых, существуют системы ортогональных полиномов, которые удовлетворяют только линейному дифференциальному уравнению бесконечного порядка [10].

Во-вторых, хорошо известно [11], что любое линейное преобразование

$$T : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$$

может быть представлено дифференциальным оператором

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n(x)}{n!} D^n,$$

где D обозначает дифференцирование $D^n f(x) = f^{(n)}(x)$, а $Q_n(x)$ - комплексные многочлены. Такие преобразования, сохраняющие или сужающие область в которой расположены комплексные нули многочленов, являются недавним объектом изучения, мотивированным гипотезой Римана.

Дальнейшие примеры, а также обширная библиография, имеется в монографии [12]. Таким образом, важность линейных дифференциальных операторов бесконечного порядка в изучении ортогональных многочленов не нуждается в дальнейшем акцентировании.

В настоящей работе построена реализация оператора уничтожения $a^-_{\mu_a} = \sqrt{2}\mathbf{A}$ осциллятороподобной системы, связанной с системой обобщенных полиномов Чебышева $Ch_n(z;1;a)$, дифференциальным оператором бесконечного порядка. Этот оператор имеет вид

$$\mathbf{A} = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{s-1} a_{ls} z^l \frac{d^s}{dz^s}.$$

Получены формулы для вычисления коэффициентов a_{ls}. Для иллюстрации выпишем несколько начальных элементов первых строк и столбцов бесконечной матрицы коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix}
0 & a^2 & 0 & \frac{a^4}{3!} & 0 & \frac{a^6+a^4}{5!} & 0 & \frac{a^8+2(a^6+a^4)}{7!} & \cdots \\
0 & 0 & \frac{1-2a^2}{2!} & 0 & \frac{1-4a^4}{4!} & 0 & \frac{2-6(a^6+a^4)}{6!} & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & -\frac{2-3a^2}{3!} & 0 & -\frac{4-10a^4}{5!} & 0 & -\frac{12-21(a^6+a^4)}{7!} & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3-4a^2}{4!} & 0 & \frac{10-20a^4}{6!} & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4-5a^2}{5!} & 0 & -\frac{20-35a^4}{7!} & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5-6a^2}{6!} & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6-7a^2}{7!} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{bmatrix}$$

Мы надеемся, что подобные представления лестничных операторов могут оказаться полезными при изучении обобщенных алгебр Гейзенберга, связанных с системами ортогональных полиномов. Например, при получении дифференциальных уравнений для соответствующих полиномов методом, предложенным в работе авторов [3].

Приложение 1[1]

1. Докажем первое из соотношений (31), а именно

$$(-1)^{k-2}C_{k+1}^{k-2}+\sum_{t=1}^{k-2}(-1)^{k-2-t}C_tC_{k+2+t}^{k-1-t}=C_{k-1}. \tag{54}$$

Преобразуем это равенство, введя правую часть равенства под знак суммы в левой части, и учтя, что при $t=k-1$ мы имеем $(-1)^{k-2-t}=(-1)$ и $C_{k+2+t}^{k-1-t}=C_{2k+1}^{0}=1$. В результате (54) переходит в

$$(-1)^{k-2}C_{k+1}^{k-2}+\sum_{t=1}^{k-1}(-1)^{k-2-t}C_tC_{k+2+t}^{k-1-t}=0$$

или, после сокращения на $(-1)^{k-2}$,

$$C_{k+1}^{k-2}+\sum_{m=0}^{k-2}(-1)^{m+1}C_{m+1}C_{k+m+3}^{k-m-2}=0, \tag{55}$$

где $m=t-1$. Так как при $m\geqslant k-1$ имеем $C_{k+m+3}^{k-m-2}=0$, то после сокращения на (-1), (55) можно переписать в виде

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m}C_{m+1}C_{k+m+3}^{2m+5}=C_{k+1}^{k-2}. \tag{56}$$

Обозначив $n=k+3$, получим

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m}C_{m+1}C_{n+m}^{2m+5}=C_{n-2}^{n-5}. \tag{57}$$

Это отношение мы и будем доказывать. Для вычисления суммы в левой части равенства (57) рассмотрим производящую функцию

$$\mathfrak{F}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m}C_{m+1}C_{n+m}^{2m+5}\right]x^{n} \tag{58}$$

[1] При доказательстве формул в этом и следующем приложении мы будем использовать вариант “Snake Oil” (“Змеиное масло”) метода производящей функции [9]. Термин “Snake Oil” возник в 30-е годы прошлого века в американском политическом лексиконе как средство (лекарство) от всего.

Перепишем $\mathfrak{F}(x)$ следующим образом

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m C_{m+1}\left[\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+m}^{2m+5}x^n\right]\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m C_{m+1}x^{m+5}\left[\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+m}^{2m+5}x^{n-m-5}\right].\end{aligned} \tag{59}$$

Учитывая, что при $m+5>n$ имеем $C_{n+m}^{2m+5}=0$, это равенство можно записать в виде

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m C_{m+1}x^{m+5}\left[\sum_{n=m+5}^{\infty} C_{n+m}^{2m+5}x^{n-m-5}\right]. \tag{60}$$

Из степенного ряда

$$\frac{1}{(1-x)^q} = \sum_{r=0}^{\infty} C_{q+r-1}^{q-1}x^r,$$

при $q=2m+6$ получаем

$$\sum_{r=0}^{\infty} C_{2m+r+5}^{2m+5}x^r = \frac{1}{(1-x)^{2m+6}}, \tag{61}$$

или для $r=n-m-5$

$$\sum_{n=m+5}^{\infty} C_{n+m}^{2m+5}x^{n-m-5} = \frac{1}{(1-x)^{2m+6}}. \tag{62}$$

Подставляя (62) в (60), получим

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m C_{m+1}x^{m+5}\frac{1}{(1-x)^{2m+6}}\\ &= \frac{x^5}{(1-x)^6}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m C_{m+1}\frac{x^m}{(1-x)^{2m}}\\ &= \frac{x^5}{(1-x)^6}\frac{(1-x)^2}{-x}\sum_{m=0}^{\infty} C_{m+1}\left[\frac{(-x)}{(1-x)^2}\right]^{m+1}\\ &= -\frac{x^4}{(1-x)^4}\sum_{m=0}^{\infty} C_{m+1}\left[\frac{(-x)}{(1-x)^2}\right]^{m+1}.\end{aligned} \tag{63}$$

Обозначив $p = m + 1$, имеем

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{-x^4}{(1-x)^4}\left[\sum_{p=1}^{\infty} C_p \left(\frac{(-x)}{(1-x)^2}\right)^p + C_0 - C_0\right], \tag{64}$$

или, учитывая что $C_0 = 1$,

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{-x^4}{(1-x)^4}\left[\sum_{p=0}^{\infty} C_p \left(\frac{(-x)}{(1-x)^2}\right)^p\right] + \frac{x^4}{(1-x)^4}. \tag{65}$$

Используя порождающую функцию для чисел Каталана

$$\sum_{p=0}^{\infty} C_p y^p = \frac{1-\sqrt{1-4y}}{2y}, \tag{66}$$

и разложение в ряд Маклорена функции $\frac{1}{(1-x)^q}$ при $q = 4$, получаем

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(x) &= \frac{-x^4}{(1-x)^4}(1-x) + \frac{x^4}{(1-x)^4} = \frac{x^4}{(1-x)^4}(1-1+x) \\ &= \frac{x^5}{(1-x)^4} = x^5\left[\sum_{r=0}^{\infty} C_{r+3}^3 x^r\right] = \sum_{r=0}^{\infty} C_{r+3}^3 x^{r+5} \\ &= \sum_{n=5}^{\infty} C_{n-2}^{n-5} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n-2}^{n-5} x^n,\end{aligned} \tag{67}$$

где $n = r + 5$ и учтено, что $C_{n-2}^{n-5} = 0$ для $n < 5$. Таким образом (57), и, следовательно, (54), доказаны.

2. Докажем второе из соотношений (31), а именно

$$(-1)^{k-1}C_k^{k-1} + \sum_{t=0}^{k-2}(-1)^{k-2-t}C_t C_{k+1+t}^{k-1-t} = C_{k-1}. \tag{68}$$

Заметим, что при $t = k - 1$ имеем $(-1)^{k-2-t} = (-1)$ и $C_{k+t+1}^{k-t-1} = C_{2k}^0 = 1$. Таким образом мы можем переписать (68) в виде

$$\sum_{t=0}^{k-1}(-1)^{k-2-t}C_t C_{k+t+1}^{k-t-1} = (-1)^{k-2}C_k^{k-1}.$$

Поделив обе части равенства на $(-1)^{k-2}$, и принимая во внимание, что $C_{k+t+1}^{k-t-1} = C_{k+t+1}^{2t+2}$, получим

$$\sum_{t=0}^{k-1} (-1)^t C_t C_{k+t+1}^{2t+2} = C_k^{k-1}. \tag{69}$$

Поскольку $C_{k+t+1}^{2t+2} = 0$ при $t \geqslant k$, мы можем переписать (69) в следующим образом

$$\sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t C_t C_{k+t+1}^{2t+2} = C_k^1. \tag{70}$$

Обозначив $n = k + 1$, получим

$$\sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t C_t C_{n+t}^{2t+2} = C_{n-1}^1. \tag{71}$$

Эту формулу мы и будем доказывать. Для этого введем производящую функцию

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t C_t C_{n+t}^{2t+2} \right] x^n = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t C_t x^t \left[\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+t}^{2t+2} x^{n-t} \right]. \tag{72}$$

Тогда

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t C_t x^{t+2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+t}^{2t+2} x^{n-t-2} \right]. \tag{73}$$

Поскольку при $n < t + 2$ имеем $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \Rightarrow \sum\limits_{n=t+2}^{\infty}$, то мы получаем

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^{2+t} C_t x^{t+2} \left[\sum_{n=t+2}^{\infty} C_{n+t}^{2t+2} x^{n-t-2} \right]. \tag{74}$$

Тогда при $q = 2t + 3$ имеем

$$\frac{1}{(1-x)^q} = \sum_{r=0}^{\infty} C_{q+r-1}^{q-1} x^r = \sum_{r=0}^{\infty} C_{2t+r+2}^{2t+2} x^r. \tag{75}$$

Замена $r = n - t - 2$ даёт

$$\frac{1}{(1-x)^q} = \sum_{n=t+2}^{\infty} C_{n+t}^{2t+2} x^{n-t-2} = \frac{1}{(1-x)^{2t+3}}. \tag{76}$$

Тогда

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t C_t x^{t+2}\frac{1}{(1-x)^{2t+3}} = \frac{x^2}{(1-x)^3}\sum_{t=0}^{\infty} C_t\left(\frac{-x}{(1-x)^2}\right)^t. \quad (77)$$

Так как (см. (66))

$$\sum_{t=0}^{\infty} C_t\left(\frac{-x}{(1-x)^2}\right)^t = 1-x, \quad (78)$$

получаем

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(x) &= \frac{x^2}{(1-x)^3}(1-x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}\\ &= x^2\sum_{r=0}^{\infty} C_{r+1}^1 x^r = \sum_{r=0}^{\infty} C_{r+1}^1 x^{r+2}.\end{aligned} \quad (79)$$

Заменив $n = r+2$, имеем

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} C_{n-1}^1 x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n-1}^1 x^n. \quad (80)$$

Итак

$$\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t C_t C_{n+t}^{2t+2} = C_{n-1}^1, \quad (81)$$

что мы и должны были доказать.

Приложение 2. Докажем (43):

$$\sum_{q=0}^{k-1}(-1)^{k-q-1} C_q C_{s+q}^{k-1-q} = (-1)^{k-1} C_{s-1}^{k-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant s. \quad (82)$$

Или

$$\sum_{q=0}^{k-1}(-1)^{k-q} C_q C_{s+q}^{k-1-q} = (-1)^k C_{s-1}^{k-1}. \quad (83)$$

Так как при $k-1 < q$ имеем $C_{s+q}^{k-1-q} = 0$, (83) можно переписать в виде

$$\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^{k-q} C_q C_{s+q}^{k-1-q} = (-1)^k C_{s-1}^{k-1}. \quad (84)$$

Рассмотрим производящую функцию

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} x^s \left[\sum_{q=0}^{\infty} (-1)^{k-q} C_q C_{s+q}^{k-1-q}\right]. \tag{85}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(x) &= \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^{k-q} C_q \left[\sum_{s=0}^{\infty} C_{s+q}^{k-1-q} x^s\right] \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^{k-q} x^{k-2q-1} C_q \left[\sum_{s=0}^{\infty} C_{s+q}^{k-1-q} x^{s-k+2q+1}\right] \end{aligned} \tag{86}$$

Поскольку при $k-1-q < s+q$ $C_{s+q}^{k-1-q} = 0$, то последнее равенство можно переписать следующим образом

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^{k-q} x^{k-2q-1} C_q \left[\sum_{s=k-1-2q}^{\infty} C_{s+q}^{k-1-q} x^{s-k+2q+1}\right] \tag{87}$$

Сумма в квадратных скобках есть разложение $(1-x)^{-p}$ в ряд Маклорена при $p = k - q$:

$$\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{r=0}^{\infty} C_{p+r-1}^{p-1} x^r. \tag{88}$$

Итак мы получили

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(x) &= \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^{k-q} x^{k-2q-1} C_q \frac{1}{(1-x)^{k-q}} \\ &= (-1)^k \frac{x^{k-1}}{(1-x)^k} \sum_{q=0}^{\infty} C_q \left(-\frac{1-x}{x^2}\right)^q, \end{aligned} \tag{89}$$

или при $y = -\frac{1-x}{x^2}$

$$\mathfrak{F}(x) = (-1)^k \frac{x^{k-1}}{(1-x)^k} \sum_{q=0}^{\infty} C_q y^q = (-1)^k \frac{x^{k-1}}{(1-x)^k} \frac{1-\sqrt{1-4y}}{2y}, \tag{90}$$

где использована производящая функция для чисел Каталана (66). Так как $y = -\frac{1-x}{x^2}$, то

$$\frac{1-\sqrt{1-4y}}{2y} = x, \tag{91}$$

и мы получаем

$$\mathfrak{F}(x) = (-1)^k \sum_{q=0}^{\infty} C_{k-r-1}^{x+s}. \tag{92}$$

Таким образом, коэффициент при x^s равен

$$(-1)^k C_{k+(s-k)-1}^{k-1} = (-1)^k C_{s-1}^{k-1}, \tag{93}$$

что мы и собирались доказать.

Список литературы

1. В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *Локальное возмущение дискретного уравнения Шредингера и обобщенный осциллятор Чебышёва.* — ТМФ, **200:3** (2019), 494–506.
2. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, *Generalized Chebychev polynomials conected with a point interaction for the discrete Schrödinger equation.* — Proc. International Conference DAYS on DIFFRACTION'2018 (2018).
3. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, *Realization of the annihilation operator for an oscillator-like system by a differential operator and Hermite-Chihara polynomials.* — Integral Transforms Special Functions, **13** (2002), 547–554.
4. V. V. Borzov, *Orthogonal polynomials and generalized oscillator algebras.* — Integral Transforms and Special Functions, **12** (2001), 115–138.
5. T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials.* — Gordon and Breach, NY (1978).
6. V. V. Borzov, *Generalized Hermite polynomials*, — Preprint SPBU-IP-00-24. `arXiv:math.QA/0101216`.
7. D. R. Yafaev, *A point interaction for the discrete Schrödinger operator and generalized Chebyshev polynomials.* — J.Math.Phys., **58** (2017), 063511.
8. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды - Элементарные функции.* — Наука (1981).
9. Herbert S. Wilf, *Generatingfunctionology.* A K Peters, Ltd. 3rd edition (2006).
10. J. Koekoek, R. Koekoek, *On a differential equation for Kornwinder's generalized Laguerre polynomials*, — Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1991), 1045–1054.
11. D. A. Cardon, E. L. Sorensen, J. C. White, *Interlacing properties of coefficients polynomials in differential operator representations of real-root preserving linear transformation* `arXiv:math/1912.13055`.
12. A. M. Krall, *Hilbert Space, Boundary Value Problems and Orthogonal Polynomials.* — Birkhauser, Basel (2002).

Borzov V. V., Damaskinskiy E. V. Realization by a differential operator of the annihilation operator for generalized Chebyshev oscillator.

We study a generalized Chebyshev oscillator [1] associated with a point interaction for the discrete Schrödinger operator. Our goal is to find a

realization of the annihilation operator for this oscillator by a differential operator. This realization can be used to obtain a differential equation for the corresponding generalized Chebyshev polynomials [2]. This report is a continuation of our work [1, 3].

Санкт-Петербургский государственный
университет телекоммуникаций,
кафедра математики, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: borzov.vadim@yandex.ru

Военный институт (инженерно технический),
кафедра математики, Захарьевская 22,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: evd@pdmi.ras.ru

Поступило 1 сентября 2020 г.