Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 494, 2020 г.

Н. М. Белоусов, С. Э. Деркачев

РЕГУЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРУППЫ $\mathrm{GL}(N,\mathbb{R})$: ФАКТОРИЗАЦИЯ, ОПЕРАТОРЫ КАЗИМИРА И ЦЕПОЧКА ТОДЫ

§1. Введение

В классической теории представлений конечных и непрерывных групп особую роль играет *регулярное представление*, поскольку многие (все в случае компактных групп [1]) неприводимые представления получаются из него редукцией.

Для групп Ли генераторы и, как следствие, операторы Казимира в регулярном представлении являются дифференциальными операторами, что получает приложение в теории интегрируемых моделей квантовой механики; самым известным примером является атом водорода и теория представлений групп $SO(4)$ и $SO(1,3)$ [2].

В данной заметке мы представляем способ вычисления генераторов и операторов Казимира в регулярном представлении для группы $\mathrm{GL}(N,\mathbb{R})$ в случае параметризации Гаусса. В основе лежит следующее наблюдение: матрица, составленная из генераторов в регулярном представлении, допускает факторизацию на более простые части, для каждой из которых нетрудно написать явный вид в случае произвольного N. Кроме того, в контексте этой факторизации достаточно легко увидеть связь между $\mathrm{GL}(N,\mathbb{R})$ и моделью квантовой цепочки Тоды.

В разделе 2 мы разберем самый простой случай $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ и на его примере проиллюстрируем все основные утверждения.

Раздел 3 посвящен общему случаю группы $\mathrm{GL}(N,\mathbb{R})$, в котором формулы становятся более громоздкими, но все доказательства основываются на простой идее о том, как связаны операторы левых и

Ключевые слова: полная линейная группа, регулярное представление, факторизация матрицы с генераторами, операторы Казимира, квантовая цепочка Тоды.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект 19-11-00131).

правых сдвигов на группе. Также поучительным оказывается рассмотрение форм Маурера-Картана – двойственного к генераторам в регулярном представлении базиса дифференциальных форм. На их языке формула факторизации становится очевидна.

В разделе 4 обсуждаются операторы Казимира. Удобной производящей функцией для них служит q-детерминант [3], и, основываясь на формуле факторизации, формулируется гипотеза о его вычислении.

В последнем разделе 5 показано, что редуцированные операторы Казимира совпадают с системой коммутирующих операторов (сохраняющихся величин) в модели квантовой открытой цепочки Тоды.

§2. Группа $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$

Группа $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ состоит из вещественных двумерных невырожденных матриц. В этом разделе мы будем использовать параметризацию Гаусса

$$g = abc = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Вычислим лево-инвариантную форму Маурера-Картана

$$\begin{aligned} \Omega_L = g^{-1}dg &= c^{-1}b^{-1}a^{-1}[da\, bc + a\, db\, c + ab\, dc] \\ &= c^{-1}[b^{-1}(a^{-1}da)b + b^{-1}db + dc\, c^{-1}]c. \end{aligned} \tag{2}$$

Все матрицы из дифференциальных форм легко считаются и повторяют структуру исходного разложения Гаусса

$$b^{-1}(a^{-1}da)b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\beta_1}{\beta_2}d\alpha & 0 \end{pmatrix}, \qquad b^{-1}db = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta_1}d\beta_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta_2}d\beta_2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$dc\, c^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & d\gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

так что получаем

$$\Omega_L = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta_1}d\beta_1 & d\gamma \\ \frac{\beta_1}{\beta_2}d\alpha & \frac{1}{\beta_2}d\beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Двойственным объектом к матрице Маурера-Картана является матрица из лево-инвариантных векторных полей на группе. Лево-инвариантные векторные поля на группе образуют базис алгебры Ли в правом регулярном представлении [4].

Регулярное представление реализуется в пространстве функций на группе. В нашем случае функция на группе – это функция от четырех переменных: $\Phi(g) = \Phi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma)$. Действие операторов правого регулярного представления на функцию определяется следующей формулой

$$[\mathrm{T}_R(h)\Phi]\,(g) = \Phi(gh). \tag{6}$$

В качестве базиса в алгебре Ли удобно взять матрицы E_{ij}

$$\begin{aligned} E_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad & E_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_{21} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad & E_{22} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7}$$

Генераторы R_{ik} алгебры Ли в правом регулярном представлении определяются при помощи формулы

$$\mathrm{T}_R(1 + \varepsilon E_{ik})\,\Phi(g) = \Phi(g(1 + \varepsilon E_{ik})) = \Phi(g) + \varepsilon R_{ik}\,\Phi(g) + O(\varepsilon^2). \tag{8}$$

Продемонстрируем, как из этого определения найти R_{ij}.

При умножении на матрицу $1 + \varepsilon E_{12}$ изменяется только переменная $\gamma \to \gamma + \varepsilon$

$$g(1 + \varepsilon E_{12}) = abc \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ab \begin{pmatrix} 1 & \gamma + \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

так что получаем

$$\mathrm{T}_R(1 + \varepsilon E_{12})\,\Phi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma) = \Phi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma + \varepsilon), \tag{10}$$

что соответствует генератору $R_{12} = \partial_\gamma$.

Умножение на диагональную матрицу Λ уже приводит к изменению и β-координат, и γ-координаты

$$g\Lambda = abc \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \lambda_1\beta_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Подстановка в общую формулу

$$\mathrm{T}_R(\Lambda)\,\Phi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma) = \Phi\left(\alpha, \lambda_1\beta_1, \lambda_2\beta_2, \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\gamma\right) \tag{12}$$

$\lambda_1 = 1 + \varepsilon$, $\lambda_2 = 1$ дает $\Lambda = 1 + \varepsilon E_{11}$, так что $R_{11} = \beta_1\partial_{\beta_1} - \gamma\partial_\gamma$. Подстановка $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + \varepsilon$ дает $\Lambda = 1 + \varepsilon E_{22}$ и, соответственно, $R_{22} = \beta_2\partial_{\beta_2} + \gamma\partial_\gamma$.

Умножение на матрицу $1+\varepsilon E_{21}$ приводит к изменению всех координат

$$
\begin{aligned}
g(1+\varepsilon E_{21}) &= abc\begin{pmatrix}1 & 0\\ \varepsilon & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 0\\ \alpha+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\gamma}\frac{\beta_2}{\beta_1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(1+\varepsilon\gamma)\beta_1 & 0\\ 0 & \frac{\beta_2}{1+\varepsilon\gamma}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{\gamma}{1+\varepsilon\gamma}\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

так что

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{T}_R(1+\varepsilon E_{21})\,\Phi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\gamma)\\
&\qquad = \Phi\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\gamma}\frac{\beta_2}{\beta_1},(1+\varepsilon\gamma)\beta_1,\frac{\beta_2}{1+\varepsilon\gamma},\frac{\gamma}{1+\varepsilon\gamma}\right) \qquad (14)
\end{aligned}
$$

и, соответственно, $R_{21}=\beta_2/\beta_1\,\partial_\alpha+\gamma(\beta_1\partial_{\beta_1}-\beta_2\partial_{\beta_2})-\gamma^2\partial_\gamma$.

Соберем дифференциальные операторы R_{ij} в матрицу[1]

$$
R=\begin{pmatrix}R_{11} & R_{21}\\ R_{12} & R_{22}\end{pmatrix}. \qquad (15)
$$

Выписывая явные выражения для них, получаем

$$
R=\begin{pmatrix}\beta_1\partial_{\beta_1}-\gamma\partial_\gamma & \frac{\beta_2}{\beta_1}\partial_\alpha+\gamma(\beta_1\partial_{\beta_1}-\beta_2\partial_{\beta_2})-\gamma^2\partial_\gamma\\ \partial_\gamma & \beta_2\partial_{\beta_2}+\gamma\partial_\gamma\end{pmatrix}. \qquad (16)
$$

Найденные генераторы R_{ij} двойственны к элементам формы Маурера-Картана Ω_L (5): вычисляя формы на векторных полях, находим

$$
(\Omega_L)_{nk}(R_{ij})=\delta_{ni}\delta_{kj}. \qquad (17)
$$

Матрица R допускает естественную факторизацию, аналогичную факторизации формы Маурера-Картана Ω_L. Для наглядности запишем формулы для обеих матриц рядом

$$
R=:\begin{pmatrix}1 & -\gamma\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\partial_{\beta_1} & \frac{\beta_2}{\beta_1}\partial_\alpha\\ \partial_\gamma & \beta_2\partial_{\beta_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \gamma\\ 0 & 1\end{pmatrix}: \qquad (18)
$$

$$
\Omega_L=\begin{pmatrix}1 & -\gamma\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\beta_1}d\beta_1 & d\gamma\\ \frac{\beta_1}{\beta_2}d\alpha & \frac{1}{\beta_2}d\beta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \gamma\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \qquad (19)
$$

Здесь мы ввели символ *нормального упорядочения* $:\,:$, под знаком которого производные ставятся справа от переменных

$$
:\partial_x\,x:=x\partial_x. \qquad (20)
$$

[1] Заметим, что R_{ij} поставлен на место (j,i), а не на (i,j).

Как и в случае с R и Ω_L (17), векторные поля и дифференциальные формы, стоящие в средних матрицах, оказываются двойственны друг другу: значения форм на векторных полях либо ноль, либо единица, и ненулевых значений всего четыре

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\beta_1} d\beta_1 \left(\beta_1 \partial_{\beta_1}\right) = 1, && d\gamma \left(\partial_\gamma\right) = 1, \\ &\frac{\beta_1}{\beta_2} d\alpha \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \partial_\alpha\right) = 1, && \frac{1}{\beta_2} d\beta_2 \left(\beta_2 \partial_{\beta_2}\right) = 1. \end{aligned} \tag{21}$$

Можно проверить еще одну формулу факторизации для матрицы из генераторов

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \partial_{\beta_1} & \frac{\beta_2}{\beta_1} \partial_\alpha \\ \partial_\gamma & \beta_2 \partial_{\beta_2} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

В отличие от предшествующей формулы (18), здесь отсутствует символ нормального упорядочения и учитывается действие ∂_γ из матрицы посередине на γ в матрице справа.

Приведем для наглядности явный вид обобщения полученных формул на случай группы $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$.

(1) Элемент группы в параметризации Гаусса

$$g = abc = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & \gamma_3 \\ 0 & 1 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

(2) Лево-инвариантная форма Маурера-Картана

$$\Omega_L = c^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta_1} d\beta_1 & d\gamma_1 & d\gamma_3 - \gamma_2 d\gamma_1 \\ \frac{\beta_1}{\beta_2} d\alpha_1 & \frac{1}{\beta_2} d\beta_2 & d\gamma_2 \\ \frac{\beta_1}{\beta_3}\left(d\alpha_3 - \alpha_2 d\alpha_1\right) & \frac{\beta_2}{\beta_3} d\alpha_2 & \frac{1}{\beta_3} d\beta_3 \end{pmatrix} c. \tag{24}$$

(3) Матрица генераторов в правом регулярном представлении

$$R =: c^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \partial_{\beta_1} & \frac{\beta_2}{\beta_1}\left(\partial_{\alpha_1} + \alpha_2 \partial_{\alpha_3}\right) & \frac{\beta_3}{\beta_1} \partial_{\alpha_3} \\ \partial_{\gamma_1} + \gamma_2 \partial_{\gamma_3} & \beta_2 \partial_{\beta_2} & \frac{\beta_3}{\beta_2} \partial_{\alpha_2} \\ \partial_{\gamma_3} & \partial_{\gamma_2} & \beta_3 \partial_{\beta_3} \end{pmatrix} c: \tag{25}$$

$$= c^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \partial_{\beta_1} & \frac{\beta_2}{\beta_1}\left(\partial_{\alpha_1} + \alpha_2 \partial_{\alpha_3}\right) & \frac{\beta_3}{\beta_1} \partial_{\alpha_3} \\ \partial_{\gamma_1} + \gamma_2 \partial_{\gamma_3} & \beta_2 \partial_{\beta_2} - 1 & \frac{\beta_3}{\beta_2} \partial_{\alpha_2} \\ \partial_{\gamma_3} & \partial_{\gamma_2} & \beta_3 \partial_{\beta_3} - 2 \end{pmatrix} c. \tag{26}$$

§3. Группа $\mathrm{GL}(N,\mathbb{R})$

3.1. Регулярное представление. Группа $\mathrm{GL}(N,\mathbb{R})$ состоит из вещественных матриц $N\times N$ с ненулевым определителем

$$g=\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1N}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ g_{N1} & \cdots & g_{NN}\end{pmatrix}, \qquad \det g\neq 0. \tag{27}$$

Элемент группы g зависит от N^2 параметров, так что функция на группе $\Phi(g)$ – функция N^2 переменных. Правое и левое регулярные представления реализуются в пространстве функций на группе. Действие операторов представления на функцию определяется следующими формулами [4, 5]

$$[\mathrm{T}_R(h)\Phi](g)=\Phi(gh), \qquad [\mathrm{T}_L(h)\Phi](g)=\Phi(h^{-1}g). \tag{28}$$

В качестве базиса в алгебре Ли удобно взять матрицы E_{ij} – матрицы с единицей на месте (i,j)

$$(E_{ij})_{nk}=\delta_{in}\delta_{jk}, \tag{29}$$

удовлетворяющие стандартным коммутационным соотношениям

$$[E_{ij},E_{nk}]=\delta_{jn}E_{ik}-\delta_{ik}E_{nj}. \tag{30}$$

Генераторы R_{ik} и L_{ik} алгебры Ли в правом и левом регулярных представлениях определяются при помощи формул

$$\mathrm{T}_R(1+\varepsilon E_{ik})\,\Phi(g)=\Phi(g(1+\varepsilon E_{ik}))=\Phi(g)+\varepsilon R_{ik}\,\Phi(g)+O(\varepsilon^2), \tag{31}$$

$$\mathrm{T}_L(1+\varepsilon E_{ik})\,\Phi(g)=\Phi((1-\varepsilon E_{ik})g)=\Phi(g)+\varepsilon L_{ik}\,\Phi(g)+O(\varepsilon^2). \tag{32}$$

Из определения получаем явные формулы для генераторов, которые в рассматриваемом представлении реализуются как дифференциальные операторы первого порядка [1, 5]

$$R_{ij}=\sum_{k=1}^{N} g_{ki}\partial_{g_{kj}}=\sum_{k=1}^{N}\partial_{g_{kj}}g_{ki}-N\delta_{ij}, \qquad L_{ij}=-\sum_{k=1}^{N} g_{jk}\partial_{g_{ik}}. \tag{33}$$

Как ясно из определений (31), (32), дифференциальные операторы R_{ij} и L_{ij} действуют на элемент группы (27) по правилу

$$R_{ij}g=gE_{ij}, \qquad L_{ij}g=-E_{ij}g. \tag{34}$$

Объединим генераторы в матрицы и введем матрицу из производных[2]

$$R = \sum_{i,j=1}^{N} E_{ij} R_{ji}, \qquad L = \sum_{i,j=1}^{N} E_{ij} L_{ji}, \qquad \partial = \sum_{i,j=1}^{N} E_{ij} \partial_{g_{ij}}. \tag{35}$$

Нетрудно проверить, что явные выражения для генераторов (33) могут быть записаны в следующем компактном матричном виде

$$R = \partial^T g - N\mathbb{1}, \qquad L = -g\,\partial^T. \tag{36}$$

Как следствие, матрицы с генераторами оказываются связаны тождеством

$$R = -g^{-1}(L + N\mathbb{1})\,g. \tag{37}$$

С помощью символа нормального упорядочивания : : (20), под знаком которого производные и соответствующие переменные коммутируют, получаем эквивалентное соотношение, связывающее матрицы с генераторами в левом и правом регулярных представлениях[3]

$$R = -:g^{-1}L\,g: \tag{38}$$

Во избежание недоразумений приведем в качестве примера некоторые формулы в явном виде для группы $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$. Генераторы в правом регулярном представлении

$$\begin{aligned} R_{11} &= g_{11}\partial_{g_{11}} + g_{21}\partial_{g_{21}}, \qquad & R_{21} &= g_{12}\partial_{g_{11}} + g_{22}\partial_{g_{21}}, \\ R_{12} &= g_{11}\partial_{g_{12}} + g_{21}\partial_{g_{22}}, \qquad & R_{22} &= g_{12}\partial_{g_{12}} + g_{22}\partial_{g_{22}}. \end{aligned} \tag{39}$$

Пример соотношений $R_{ij}\,g = gE_{ij}$ – соотношение $R_{12}\,g = gE_{12}$ в явном виде

$$R_{12}\,g = \begin{pmatrix} R_{12}\,g_{11} & R_{12}\,g_{12} \\ R_{12}\,g_{21} & R_{12}\,g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & g_{11} \\ 0 & g_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

---

[2] Как и в случае $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, мы будем рассматривать транспонированные матрицы из генераторов, когда R_{ij} и L_{ij} поставлены на место (j,i), а не на (i,j) .

[3] Отметим, что данная формула для случая группы $SL(2,\mathbb{R})$ содержится в книге [5].

Формулы для генераторов в матричном виде

$$
\begin{aligned}
R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} \\ R_{12} & R_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_{g_{11}} & \partial_{g_{21}} \\ \partial_{g_{12}} & \partial_{g_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&=: \begin{pmatrix} \partial_{g_{11}} & \partial_{g_{21}} \\ \partial_{g_{12}} & \partial_{g_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \qquad (41)
\end{aligned}
$$

$$
L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} \\ L_{12} & L_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{g_{11}} & \partial_{g_{21}} \\ \partial_{g_{12}} & \partial_{g_{22}} \end{pmatrix}. \qquad (42)
$$

3.2. Подгруппы треугольных матриц. Пусть T_- – группа нижнетреугольных матриц $N \times N$ с единицами на диагонали, а T_+ – группа верхне-треугольных матриц $N \times N$ с единицами на диагонали

$$
a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{T}_-, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1N} \\ 0 & 1 & \dots & \gamma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{T}_+. \qquad (43)
$$

$\mathrm{T}_\pm$ являются подгруппами $\mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$. Общие определения левого и правого регулярных представлений (28) дословно переносятся на случай групп $\mathrm{T}_\pm$, однако формулы для генераторов алгебры Ли в регулярном представлении изменяются.

Рассмотрим сначала группу T_-. В качестве базиса в алгебре Ли возьмем матрицы E_{ij} – матрицы с единицей на месте (i, j), только теперь со строгим ограничением $i > j$. Дифференциальные операторы первого порядка R_{ij} и L_{ij} действуют на элемент группы $a \in \mathrm{T}_-$ по правилу

$$
R_{ij} a = a E_{ij}, \qquad L_{ij} a = -E_{ij} a, \qquad (44)
$$

и явные формулы для генераторов имеют следующий вид

$$
R_{ij} = \partial_{\alpha_{ij}} + \sum_{k=i+1}^{N} \alpha_{ki} \partial_{\alpha_{kj}}, \qquad L_{ij} = -\partial_{\alpha_{ij}} - \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_{jk} \partial_{\alpha_{ik}}. \qquad (45)
$$

Формулы (45) получаются из (33) естественным образом при ограничении $i > j$ и учете треугольности матрицы a: $a_{ii} = 1$ и $a_{ik} = 0$ при $i < k$. Изменения в формулах (45) по сравнению с (33) приводят к изменениям и в матричных соотношениях (36). Матрицы R и L теперь будут строго верхне-треугольными (верхне-треугольными с нулями на диагонали), а матрица ∂ – строго нижне-треугольной

$$R = \sum_{j>i} E_{ij} R_{ji}, \qquad L = \sum_{j>i} E_{ij} L_{ji}, \qquad \partial = \sum_{i>j} E_{ij} \partial_{\alpha_{ij}}. \tag{46}$$

Явные выражения для генераторов (45) в компактном матричном виде теперь записываются следующим образом

$$R = \left[\partial^T a\right]_+, \qquad L = -\left[a\,\partial^T\right]_+, \tag{47}$$

где символ $[A]_+$ означает матрицу, у которой строго-треугольная верхняя часть совпадает со строго-треугольной верхней частью матрицы A, а все остальные матричные элементы равны нулю. Соотношение между матрицами R и L теперь выглядит следующим образом

$$R = -\left[a^{-1}\,L\,a\right]_+, \qquad L = -\left[a\,R\,a^{-1}\right]_+. \tag{48}$$

В качестве примера приведем явные формулы для группы трехмерных матриц

$$\begin{aligned} R = \begin{pmatrix} 0 & R_{21} & R_{31} \\ 0 & 0 & R_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial_{\alpha_{21}} & \partial_{\alpha_{31}} \\ 0 & 0 & \partial_{\alpha_{32}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 1 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 \end{pmatrix}\right]_+ \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \partial_{\alpha_{21}} + \alpha_{32}\,\partial_{\alpha_{31}} & \partial_{\alpha_{31}} \\ 0 & 0 & \partial_{\alpha_{32}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} L = \begin{pmatrix} 0 & L_{21} & L_{31} \\ 0 & 0 & L_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= -\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 1 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \partial_{\alpha_{21}} & \partial_{\alpha_{31}} \\ 0 & 0 & \partial_{\alpha_{32}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_+ \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & \partial_{\alpha_{21}} & \partial_{\alpha_{31}} \\ 0 & 0 & \partial_{\alpha_{32}} + \alpha_{21}\,\partial_{\alpha_{31}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{50}$$

В случае группы T_+ все формулы модифицируются естественным образом. В качестве базиса в алгебре Ли берем матрицы E_{ij} со строгим ограничением $i < j$. Дифференциальные операторы первого порядка R_{ij} и L_{ij} действуют на элемент группы $c \in \mathrm{T}_+$ по стандартному правилу

$$R_{ij} c = c E_{ij}, \qquad L_{ij} c = -E_{ij} c. \tag{51}$$

Явные формулы для генераторов имеют следующий вид

$$R_{ij} = \partial_{\gamma_{ij}} + \sum_{k=1}^{i-1} \gamma_{ki} \partial_{\gamma_{kj}}, \qquad L_{ij} = -\partial_{\gamma_{ij}} - \sum_{k=j+1}^{N} \gamma_{jk} \partial_{\gamma_{ik}}. \tag{52}$$

Матрицы R и L – строго нижне-треугольные, а матрица ∂ – строго верхне-треугольная

$$R = \sum_{j<i} E_{ij} R_{ji}, \qquad L = \sum_{j<i} E_{ij} L_{ji}, \qquad \partial = \sum_{i<j} E_{ij} \partial_{\gamma_{ij}}. \tag{53}$$

Явные выражения для генераторов (52) в компактном матричном виде

$$R = \left[\partial^T c\right]_-, \qquad L = -\left[c\, \partial^T\right]_-. \tag{54}$$

Соотношение между матрицами R и L

$$R = -\left[c^{-1}\, L\, c\right]_-, \qquad L = -\left[c\, R\, c^{-1}\right]_-. \tag{55}$$

Символ $[A]_-$ означает матрицу, у которой строго-треугольная нижняя часть совпадает со строго-треугольной нижней частью матрицы A, а все остальные матричные элементы равны нулю.

В дополнение к $\mathrm{T}_\pm$ рассмотрим подгруппу нижне-треугольных матриц с произвольными элементами на диагонали T

$$t = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{N1} & t_{N2} & \dots & t_{NN} \end{pmatrix} \in \mathrm{T}, \qquad \det t \neq 0. \tag{56}$$

В качестве базиса в алгебре Ли возьмем матрицы E_{ij} $(i \geq j)$. Формулы для генераторов R_{ij} и L_{ij} в регулярном представлении снова можно получить редукцией из выражений для генераторов всей группы (33)

$$R_{ij} = \sum_{k=i}^{N} t_{ki} \partial_{t_{kj}} = \sum_{k=i}^{N} \partial_{t_{kj}} t_{ki} - (N-i+1)\delta_{ij}, \quad L_{ij} = -\sum_{k=1}^{j} t_{jk} \partial_{t_{ik}}. \tag{57}$$

Транспонированные матрицы с генераторами R и L – верхне-треугольные, а матрица с производными ∂ – нижне-треугольная

$$R = \sum_{j \geq i} E_{ij} R_{ji}, \qquad L = \sum_{j \geq i} E_{ij} L_{ji}, \qquad \partial = \sum_{i \geq j} E_{ij} \partial_{t_{ij}}. \tag{58}$$

Тогда в матричном виде выражения для генераторов записываются как

$$R = \left(\partial^T t\right)_+ - \Delta, \qquad L = -\left(t\,\partial^T\right)_+, \tag{59}$$

где символ $(A)_+$ обозначает матрицу A, у которой все элементы под диагональю равны нулю, и $\Delta = \operatorname{diag}(N, N-1, \ldots, 1)$. Тождество, связывающее матрицы R и L, принимает вид

$$R + \Delta = -\left(t^{-1}\,L\,t\right)_+. \tag{60}$$

3.3. Разложение Гаусса и формулы факторизации. Пусть $\mathrm{T}_\pm$ – рассмотренные в прошлом разделе группы треугольных матриц и D – группа обратимых диагональных матриц размера $N \times N$

$$b = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \beta_N \end{pmatrix} \in \mathrm{D}, \qquad \det b \neq 0. \tag{61}$$

Почти любая матрица $g \in \mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$ может быть представлена, и при том единственным образом, в виде [1]

$$g = abc, \tag{62}$$

где $a \in \mathrm{T}_-$, $b \in \mathrm{D}$, $c \in \mathrm{T}_+$.

В параграфе 3.1 были выведены выражения для матриц R и L, в которые входят генераторы правого и левого регулярных представлений. В качестве параметров, определяющих элемент группы $g \in \mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$ были использованы матричные элементы g_{ik}. Во многих случаях более удобной оказывается параметризация при помощи элементов матриц a, b, c, входящих в разложение Гаусса. Данный раздел посвящен выводу выражений для матриц R и L в этой параметризации.

Утверждение 1. *Матрица из генераторов в правом регулярном представлении допускает факторизацию*

$$R =: c^{-1} S\, c := c^{-1}(S - \delta)\, c \tag{63}$$

где

$$S_{ij} = \begin{cases} \partial_{\gamma_{ji}} + \sum\limits_{k=i+1}^{N} \gamma_{ik}\partial_{\gamma_{jk}}, & i > j \\ \beta_i \partial_{\beta_i}, & i = j \\ \frac{\beta_j}{\beta_i}\Big[\partial_{\alpha_{ji}} + \sum\limits_{k=j+1}^{N} \alpha_{kj}\partial_{\alpha_{ki}}\Big], & i < j \end{cases} \tag{64}$$

и $\delta = \mathrm{diag}(0, 1, \ldots, N-1)$.

Заметим, что элементы матрицы S из нижнего треугольника $(i > j)$ с точностью до знака совпадают с генераторами группы верхних треугольных матриц с единицами на диагонали T_+ в левом регулярном представлении (52).

Точно так же элементы из верхнего треугольника $(i < j)$ с точностью до множителя β_j/β_i являются генераторами группы нижних треугольных матриц с единицами на диагонали T_- в правом регулярном представлении (45).

Наконец, на диагонали стоят дифференциальные операторы $\beta_i\partial_{\beta_i}$, которые являются генераторами группы диагональных матриц D в регулярном представлении. Кроме того, как и в случае $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ (18), (22), формулы с нормальным упорядочением и без него отличаются только вычитанием констант на диагонали.

Аналогичную формулу можно доказать для левого регулярного представления.

Утверждение 2. *Матрица из генераторов в левом регулярном представлении допускает факторизацию*

$$L =: a\,\widetilde{S}\,a^{-1} := a(\widetilde{S} + \mathbb{1} - \Delta)a^{-1} \tag{65}$$

где

$$\widetilde{S}_{ij} = \begin{cases} -\frac{\beta_i}{\beta_j}\left[\partial_{\gamma_{ji}} + \sum\limits_{k=i+1}^{N} \gamma_{ik}\partial_{\gamma_{jk}}\right], & i > j \\ -\beta_i\partial_{\beta_i}, & i = j \\ -\partial_{\alpha_{ji}} - \sum\limits_{k=j+1}^{N} \alpha_{kj}\partial_{\alpha_{ki}}, & i < j \end{cases} \tag{66}$$

и $\Delta = \mathrm{diag}(N, N-1, \ldots, 1)$.

Далее мы приведем доказательство только для формулы факторизации

$$R = c^{-1}M\,c, \tag{67}$$

где для краткости мы ввели обозначение $M = S - \delta$. Проверка остальных трех формул идет аналогичным образом.

Доказательство основано на тождестве, связывающей генераторы в левом и правом регулярных представлениях

$$R = -g^{-1}(L + N\mathbb{1})g, \tag{68}$$

а также на аналогичных формулах (48), (55), (60) для подгрупп $\mathrm{T}_\pm$, T. Подставим разложение Гаусса $g = abc$ в последнюю формулу

$$R = -c^{-1}\big(b^{-1}a^{-1}L\,ab + N\mathbb{1}\big)c. \tag{69}$$

Отсюда видно, что матрица M из формулы факторизации (67) может быть записана как через правые, так и через левые генераторы

$$M = -b^{-1}a^{-1}Lab - N\mathbb{1} = cRc^{-1}. \tag{70}$$

Далее мы отдельно рассмотрим элементы M над диагональю, под диагональю и на диагонали и покажем, что они в точности совпадают с анонсированными в утверждении дифференциальными операторами (64).

Над диагональю. Во-первых, посчитаем сопряжение произвольной матрицы N диагональной $b = \mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_N)$

$$(b^{-1}Nb)_{ij} = \beta_j N_{ij}\,\beta_i^{-1}. \tag{71}$$

Следовательно, для элементов M над диагональю получаем

$$[M]_+ = -\left[b^{-1}a^{-1}Lab\right]_+ = -b^{-1}\left[a^{-1}La\right]_+ b. \tag{72}$$

Теперь рассмотрим подгруппу нижних треугольных матриц с единицами на диагонали T_-. Генераторы в левом регулярном представлении для этой подгруппы L^-_{ij} $(i > j)$ и аналогичные им генераторы L_{ij} для всей группы $\mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$ подчиняются уравнениям

$$L^-_{ij}\,a = -E_{ij}\,a, \qquad L_{ij}\,abc = -E_{ij}\,abc. \tag{73}$$

Следовательно, L_{ij} при $i > j$ зависят только от переменных α_{nk}, и оба типа генераторов равны

$$L^-_{ij} = L_{ij}. \tag{74}$$

Дальше, пользуясь тождеством, связывающим левые и правые генераторы для T_- (48), и формулой (45), находим

$$M_{ij} = \frac{\beta_j}{\beta_i}\left[\partial_{\alpha_{ji}} + \sum_{k=j+1}^{N} \alpha_{kj}\partial_{\alpha_{ki}}\right]. \tag{75}$$

Под диагональю. Доказательство того, что при $i > j$

$$M_{ij} = \partial_{\gamma_{ji}} + \sum_{k=i+1}^{N} \gamma_{ik}\partial_{\gamma_{jk}}, \tag{76}$$

абсолютно симметрично предыдущей части, только теперь нужно воспользоваться вторым представлением для матрицы M (70)

$$[M]_{-} = \left[cR\,c^{-1}\right]_{-} \tag{77}$$

и формулами (55) и (52).

Диагональ. В этой части нам необходимо найти явный вид элементов

$$M_{ii} = -\big(b^{-1}a^{-1}L\,a\,b\big)_{ii} - N. \tag{78}$$

Рассмотрим подгруппу обратимых нижне-треугольных матриц T в параметризации, аналогичной разложению Гаусса,

$$t = ab \in \mathrm{T}, \tag{79}$$

где $a \in \mathrm{T}_{-}$, $b \in \mathrm{D}$. Диагональные генераторы в правом регулярном представлении для нее имеют вид $\beta_i\partial_{\beta_i}$. Генераторы в левом представлении для подгруппы T и аналогичные им генераторы L_{ij} $(i \geq j)$ для всей группы $\mathrm{GL}(N,\mathbb{R})$ равны. Пользуясь тождеством (60), связывающим генераторы подгруппы T, для диагонали матрицы M (78) находим

$$M_{ii} = \beta_i\partial_{\beta_i} + \Delta_{ii} - N = \beta_i\partial_{\beta_i} - i + 1. \tag{80}$$

Таким образом, мы нашли явный вид всех элементов матрицы M и, как следствие, вид генераторов R_{ij} в параметризации Гаусса.

3.4. Формы Маурера-Картана. Двойственными объектами к матрицам R и L являются лево- и право-инвариантные формы Маурера-Картана

$$\Omega_L = g^{-1}dg, \qquad \Omega_R = -dg\,g^{-1}. \tag{81}$$

Пользуясь параметризацией через элементы g_{ij} (33), легко убедиться в том, что эти объекты действительно двойственны

$$(\Omega_L)_{ij}(R_{nk}) = (\Omega_R)_{ij}(L_{nk}) = \delta_{in}\delta_{jk}. \tag{82}$$

В параметризации Гаусса $g = abc$ матрицы Ω_L, Ω_R факторизуются, как и соответствующие им R, L. Рассмотрим лево-инвариантную форму

$$\Omega_L = (abc)^{-1}d(abc) = c^{-1}\big(b^{-1}a^{-1}da\,b + b^{-1}db + dc\,c^{-1}\big)c. \tag{83}$$

Обсудим смысл слагаемых в матрице, образовавшейся посередине

$$\Sigma_L = b^{-1}a^{-1}da\,b + b^{-1}db + dc\,c^{-1}. \tag{84}$$

Слагаемое $b^{-1}db$ является лево-инвариантной формой для подгруппы диагональных матриц D. Точно так же $a^{-1}da$ – это лево-инвариантная форма для подгруппы нижне-треугольных матриц с единицами на диагонали T_-, а сопряжение матрицей $b = \mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_N)$ дает

$$(b^{-1}a^{-1}da\, b)_{ij} = \frac{\beta_j}{\beta_i}(a^{-1}da)_{ij}. \tag{85}$$

Наконец, $dc\, c^{-1}$ с точностью до знака совпадает с право-инвариантной формой для подгруппы T_+.

Матрица из генераторов R удовлетворяет соотношению (63)

$$R =: c^{-1}S\, c :, \tag{86}$$

аналогичной факторизации формы Ω_L. При этом элементы матрицы S

$$S_{ij} = \begin{cases} \partial_{\gamma_{ji}} + \sum\limits_{k=i+1}^{N} \gamma_{ik}\partial_{\gamma_{jk}}, & i > j \\ \beta_i \partial_{\beta_i}, & i = j \\ \frac{\beta_j}{\beta_i}\Big[\partial_{\alpha_{ji}} + \sum\limits_{k=j+1}^{N} \alpha_{kj}\partial_{\alpha_{ki}}\Big], & i < j \end{cases} \tag{87}$$

оказываются двойственными к элементам Σ_L

$$(\Sigma_L)_{ij}(S_{kn}) = \delta_{in}\delta_{jk}. \tag{88}$$

Действительно, операторы $S_{ii} = \beta_i \partial_{\beta_i}$ являются генераторами в регулярном представлении группы диагональных матриц D, которые двойственны форме $b^{-1}db$. Точно так же элементы над диагональю S_{ij} $(i > j)$ с точностью до знака совпадают с генераторами в левом регулярном представлении для T_+, двойственными к $-dc\, c^{-1}$. Аналогично для элементов S_{ij} при $i < j$ и $b^{-1}a^{-1}da\, b$.

То же самое можно понять, не прибегая к явному виду матриц c и S. В общем случае преобразования подобия

$$\Sigma_L = c\,\Omega_L c^{-1}, \qquad S =: c\, R\, c^{-1} : \tag{89}$$

с произвольной матрицей c для Σ_L и S выполняется соотношение двойственности (88), что легко показать, используя формулы (89) и (82)[4].

Для право-инвариантной формы Ω_R получаем симметричную формулу факторизации

$$\Omega_R = a\, \Sigma_R\, a^{-1}, \tag{90}$$

где

$$\Sigma_R = a^{-1}da + db\, b^{-1} + b\, dc\, c^{-1}b^{-1}, \tag{91}$$

[4]Формулы (82) и (88) отличаются порядком индексов n, k слева, поскольку мы рассматриваем транспонированную матрицу из генераторов R.

и в матрице Σ_R можно распознать формы, двойственные к элементам $\widetilde{S}$ (66).

Замечание. Иными словами, формулы факторизации из предыдущего параграфа можно вывести, пользуясь факторизацией формы Маурера-Картана и соотношением двойственности.

§4. Операторы Казимира

Для наглядности сначала рассмотрим случай $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$. Группа $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ обладает двумя операторами Казимира. В регулярном представлении они образуют систему из коммутирующих друг с другом дифференциальных операторов.

Операторы Казимира можно найти с помощью т. н. *q-детерминанта* [3]. Рассмотрим двумерную матрицу $u\mathbb{1}_2 + E$, где E – (транспонированная[5]) матрица из генераторов группы, а u – вспомогательный параметр. Ее q-детерминант задается формулой

$$\begin{aligned} \mathrm{qdet}(u+E) &= (u+E)_{11}(u-1+E)_{22} - (u+E)_{12}(u-1+E)_{21} \qquad (92)\\ &= (u+E_{11})(u-1+E_{22}) - E_{21}E_{12} \qquad (93) \end{aligned}$$

и представляет собой полином по u с коэффициентами, которые являются операторами Казимира.

В регулярном представлении

$$\begin{aligned} \mathrm{qdet}(u+R) &= (u+R_{11})(u-1+R_{22}) - R_{21}R_{12} \qquad (94)\\ &= u^2 + u\,C_1 + C_2, \qquad (95) \end{aligned}$$

пользуясь выражениями для генераторов (16), находим операторы Казимира C_k в параметризации Гаусса

$$C_1 = \beta_1\partial_{\beta_1} + \beta_2\partial_{\beta_2} - 1, \qquad (96)$$

$$C_2 = \beta_1\beta_2\,\partial_{\beta_1}\partial_{\beta_2} - \beta_1\partial_{\beta_1} - \frac{\beta_2}{\beta_1}\partial_\alpha\partial_\gamma. \qquad (97)$$

Как мы уже знаем, матрица R в этой параметризации факторизуется

$$R =: c^{-1}S\,c := \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1\partial_{\beta_1} & \frac{\beta_2}{\beta_1}\partial_\alpha \\ \partial_\gamma & \beta_2\partial_{\beta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \qquad (98)$$

[5] На месте (i,j) стоит генератор E_{ji}.

Оказывается, что q-детерминанты матриц с производными $u+R$ и $u+S$ равны

$$\mathrm{qdet}(u+R) = \mathrm{qdet}(u+S). \tag{99}$$

Это равенство доказывается прямым вычислением и является аналогом классическом формулы для определителей матриц с коммутирующими элементами, связанных преобразованием подобия.

Перейдем к случаю группы $\mathrm{GL}(N,\mathbb{R})$, которая содержит N операторов Казимира. Формула для их производящей функции обобщается естественным образом

$$\mathrm{qdet}(u+E) = \sum_{s\in S_N} \mathrm{sgn}(s)(u+E)_{1\,s(1)}(u-1+E)_{2\,s(2)} \cdots (u-N+1+E)_{N\,s(N)}, \tag{100}$$

где S_N – группа перестановок.

В регулярном представлении

$$\mathrm{qdet}(u+R) = u^N + \sum_{k=1}^{N} u^{N-k} C_k \tag{101}$$

операторы Казимира C_k образуют систему из N коммутирующих дифференциальных операторов. Равенство q-детерминантов матриц $u+R$ и $u+S$, где S – матрица из формулы факторизации (63)

$$R =: c^{-1} S\, c :, \tag{102}$$

при $N>2$ уже не выполняется.

Введем следующую операцию на всевозможных произведениях элементов матрицы S

$$\mathrm{P}[S_{ij}\dots S_{ml}S_{nk}] = \begin{cases} S_{nk}\,\mathrm{P}[S_{ij}\dots S_{ml}], & n>k \\ \mathrm{P}[S_{ij}\dots S_{ml}]\,S_{nk}, & n\le k \end{cases} \tag{103}$$

По сути операция P инвертирует порядок элементов S_{nk} с $n>k$ в произведении, поскольку такие операторы зависят от γ-координат и коммутируют со всеми остальными элементами S_{ij}, но не друг с другом (смотри формулу (64)). Приведем простой пример

$$\mathrm{P}[S_{12}S_{32}S_{54}] = S_{54}S_{32}S_{12}. \tag{104}$$

С помощью этой операции сформулируем гипотезу для производящей функции операторов Казимира C_k в общем случае.

Гипотеза. Следующие операторы равны

$$\mathrm{qdet}(u+R) = \mathrm{P}[\mathrm{qdet}(u+S)]. \tag{105}$$

Явный вид оператора справа в случае $N = 3$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}[\mathrm{qdet}(u+S)] &= (u+S_{11})(u-1+S_{22})(u-2+S_{33}) \\ &- S_{32}(u+S_{11})S_{23} - S_{21}S_{12}(u-2+S_{33}) \\ &+ S_{31}S_{12}S_{23} + \underline{S_{32}S_{21}}S_{13} - S_{31}S_{13}(u-1+S_{22}), \end{aligned} \tag{106}$$

где мы подчеркнули единственное место, в котором операторы S_{nk} с $n > k$ оказались переставлены друг относительно друга.

К сожалению, у нас нет доказательства этого утверждения в общем случае. Гипотеза основана на прямом вычислении для групп $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ при $n = 3, 4, 5$. При ее выполнении вычисление C_k упрощается, поскольку явные формулы для элементов S_{ij} являются менее громоздкими, чем для генераторов R_{ij}.

Замечание. Операторы Казимира в правом и левом регулярном представлениях совпадают и могут быть посчитаны как через операторы правых сдвигов R_{ij}, так и через операторы левых сдвигов L_{ij}. Матрица S содержит ближайших родственников этих генераторов из обоих представлений: над диагональю в ней находятся операторы правых сдвигов для нижне-треугольных матриц, а под диагональю – операторы левых сдвигов для верхне-треугольных матриц. Таким образом, при вычислении операторов Казимира через S естественным образом подключается и то, и другое представление.

§5. Связь с квантовой цепочкой Тоды

Квантовая открытая цепочка Тоды – это одномерная система из N частиц с экспоненциальным взаимодействием, описываемая гамильтонианом [6, 7]

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{n=1} \partial_n^2 + \sum_{n=1}^{N-1} e^{x_n - x_{n+1}}. \tag{107}$$

Для краткости мы обозначили $\partial_n = \partial/\partial x_n$. В рамках метода обратной задачи этой модели соответствует L-матрица

$$L_n(v) = \begin{pmatrix} v + i\partial_n & e^{-x_n} \\ -e^{x_n} & 0 \end{pmatrix}, \tag{108}$$

где v – комплексный параметр, а индекс n отвечает номеру частицы. Из нее строится матрица монодромии, отвечающая всей цепочке

$$T_N(v) = L_N(v) \cdots L_1(v) = \begin{pmatrix} A_N(v) & B_N(v) \\ C_N(v) & D_N(v) \end{pmatrix}. \tag{109}$$

Элементы матрицы T_N являются полиномами по v. Исходный гамильтониан (107) появляется в одном из старших коэффициентов элемента A_N

$$A_N(v) = v^N - v^{N-1}P + v^{N-2}\left(\frac{1}{2}P^2 - H\right) + \ldots \tag{110}$$

Здесь P – это оператор полного импульса

$$P = -i\sum_{n=1}^{N} \partial_n. \tag{111}$$

Можно доказать[6], что операторы A_N при разных значениях параметров коммутируют

$$[A_N(v), A_N(w)] = 0. \tag{112}$$

Как следствие, друг с другом коммутируют коэффициенты A_N при разных степенях, и этот оператор является производящей функцией для N сохраняющихся величин открытой цепочки Тоды.

Оказывается, что оператор A_N связан с производящей функцией операторов Казимира в регулярном представлении группы $\mathrm{GL}(N,\mathbb{R})$ из предыдущих параграфов. Продемонстрируем это на примере двухчастичной задачи, а затем рассмотрим общий случай.

5.1. Две частицы. В случае $N = 2$ оператор A_N принимает вид

$$\begin{aligned} A(v) &= v^2 + vH_1 + H_2 \\ &= v^2 + v(i\partial_1 + i\partial_2) + (-\partial_1\partial_2 - e^{x_1 - x_2}). \end{aligned} \tag{113}$$

Производящая функция для операторов Казимира $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$

$$\mathrm{qdet}(u + S) = \mathrm{qdet}\begin{pmatrix} u + \beta_1\partial_{\beta_1} & \frac{\beta_2}{\beta_1}\partial_\alpha \\ \partial_\gamma & u + \beta_2\partial_{\beta_2} \end{pmatrix} \tag{114}$$

[6] См., например, [7].

является полиномом второй степени по u

$$\begin{aligned}\mathrm{qdet}(u+S) &= u^2 + uC_1 + C_2 \\ &= u^2 + u(\beta_1\partial_{\beta_1} + \beta_2\partial_{\beta_2} - 1) \\ &+ \left(\beta_1\beta_2\partial_{\beta_1}\partial_{\beta_2} - \beta_1\partial_{\beta_1} - \frac{\beta_2}{\beta_1}\partial_\alpha\partial_\gamma\right).\end{aligned} \tag{115}$$

Операторы Казимира C_k действуют на функциях от $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma$. Среди них можно найти такое подмножество функций, что операторы C_k на нем совпадут с H_k (с точностью до некоторого преобразования подобия).

Рассмотрим функции $f(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma)$, удовлетворяющие условию

$$\partial_\alpha f = f, \qquad \partial_\gamma f = -f. \tag{116}$$

Производящая функция операторов Казимира (115) на подмножестве таких функций равна

$$\begin{aligned}F(u) = u^2 &+ u(\beta_1\partial_{\beta_1} + \beta_2\partial_{\beta_2} - 1) \\ &+ \left(\beta_1\beta_2\partial_{\beta_1}\partial_{\beta_2} - \beta_1\partial_{\beta_1} + \frac{\beta_2}{\beta_1}\right).\end{aligned} \tag{117}$$

Чтобы узнать в этом выражении оператор A (113), переобозначим оставшиеся параметры

$$\beta_1 = e^{-x_1}, \qquad \beta_2 = e^{-x_2} \tag{118}$$

и положим $u = iv$. Тогда, с точностью до преобразования подобия[7], операторы F и A совпадут

$$A(v) = -e^{x_2} F(iv) e^{-x_2}. \tag{119}$$

5.2. N **частиц.** Матрица монодромии для N частиц (109) строится рекуррентным образом

$$\begin{pmatrix} A_N & B_N \\ C_N & D_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v + i\partial_N & e^{-x_N} \\ -e^{x_N} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{N-1} & B_{N-1} \\ C_{N-1} & D_{N-1} \end{pmatrix}, \tag{120}$$

откуда следует, что оператор A_N удовлетворяет соотношению

$$A_N(v) = (v + i\partial_N)A_{N-1}(v) - e^{x_{N-1}-x_N} A_{N-2}(v). \tag{121}$$

[7]При таком преобразовании

$$e^{x_2}\,\partial_2\, e^{-x_2} = \partial_2 - 1.$$

Производящая функция для операторов Казимира $\mathrm{GL}(N,\mathbb{R})$ при выполнении гипотезы (105) определяется как

$$\mathrm{P}\left[\mathrm{qdet}(u+S_N)\right] = u^N + \sum_{k=1}^{N} u^{N-k} C_k, \tag{122}$$

где S_N является матрицей $N \times N$ с элементами

$$(S_N)_{ij} = \begin{cases} \partial_{\gamma_{ji}} + \sum\limits_{k=i+1}^{N} \gamma_{ik}\partial_{\gamma_{jk}}, & i > j \\ \beta_i \partial_{\beta_i}, & i = j \\ \frac{\beta_j}{\beta_i}\left[\partial_{\alpha_{ji}} + \sum\limits_{k=j+1}^{N} \alpha_{kj}\partial_{\alpha_{ki}}\right], & i < j \end{cases} \tag{123}$$

Коэффициенты при степенях u являются операторами Казимира и действуют на функциях от $\alpha_{nk}, \beta_n, \gamma_{nk}$. Определим $\mathcal{H}$ – подмножество функций f, удовлетворяющих условиям

$$(S_N)_{i\,i+1}\, f = \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} f, \qquad (S_N)_{i+1\,i}\, f = -f \qquad (i = 1 \ldots N-1). \tag{124}$$

Как было замечено в разделе 3.3, элементы S_N вне диагонали являются (с точностью до знака и множителя β_j/β_i) генераторами правых и левых сдвигов на подгруппах верхних и нижних треугольных матриц $\mathrm{T}_\pm$. Условия (124) фиксируют действие только $(S_N)_{i\,i+1}$ и $(S_N)_{i+1\,i}$. Поскольку остальные генераторы этих подгрупп могут быть получены с помощью коммутаторов, их действие на множестве $\mathcal{H}$ зануляется

$$(S_N)_{i\,i+n}\, f = 0, \qquad (S_N)_{i+n\,i}\, f = 0 \qquad (n > 1,\ f \in \mathcal{H}). \tag{125}$$

Следовательно, матрица S_N на $\mathcal{H}$ становится трехдиагональной

$$S_N\big|_{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \beta_1\partial_{\beta_1} & \frac{\beta_2}{\beta_1} & & & \\ -1 & \beta_2\partial_{\beta_2} & \frac{\beta_3}{\beta_2} & & \\ & -1 & & \ddots & \\ & & \ddots & & \frac{\beta_N}{\beta_{N-1}} \\ & & & -1 & \beta_N\partial_{\beta_N} \end{pmatrix}. \tag{126}$$

Чтобы связать ее q-детерминант[8]

$$F_N(u) = \mathrm{qdet}(u + S_N\big|_{\mathcal{H}}) \tag{127}$$

с оператором A_N, переобозначим переменные

$$\beta_n = e^{-x_n}. \tag{128}$$

При такой замене верно следующее утверждение.

Утверждение 3. *Оператор A_N для цепочки Тоды и производящая функция операторов Казимира F_N на множестве $\mathcal{H}$, с учетом* (128), *связаны преобразованием подобия*

$$A_N(v) = (-i)^N U^{-1} F_N(iv)\, U, \tag{129}$$

где

$$U = \prod_{n=1}^{N} (\beta_n)^{n-1} = \exp\left[-\sum_{n=1}^{N} (n-1)x_n\right]. \tag{130}$$

Заметим, что при $N = 2$ доказываемое утверждение совпадает с формулой (119). Также легко убедится, что оно верно при $N = 1$. Для доказательства в общем случае напишем рекуррентное соотношение на q-детерминант F_N, разложив его по последним двум строчкам

$$F_N = (u - N + 1 + \beta_N \partial_{\beta_N}) F_{N-1} + \frac{\beta_N}{\beta_{N-1}} F_{N-2}. \tag{131}$$

Сделаем замену $\beta_n = e^{-x_n}$, положим $u = iv$ и домножим на U и U^{-1} справа и слева. Тогда соотношение (131) совпадет с рекуррентной формулой для оператора A_N (121).

Замечание 1. Условия на функцию f из множества $\mathcal{H}$

$$(S_N)_{i\, i+1}\, f = \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} f, \qquad (S_N)_{i+1\, i}\, f = -f \qquad (i = 1 \dots N-1) \tag{132}$$

можно записать в более простом виде, пользуясь тем, что действие остальных элементов S_N вне диагонали зануляется (125). Запишем эквивалентное определение $\mathcal{H}$

$$f \in \mathcal{H} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{array}{ll} \partial_{\alpha_{i+1\, i}}\, f = f, & \partial_{\alpha_{i+n\, i}}\, f = 0, \\ \partial_{\gamma_{i\, i+1}}\, f = -f, & \partial_{\gamma_{i\, i+n}}\, f = 0. \end{array} \tag{133}$$

где $n > 1$.

[8]Здесь мы опустили операцию P, поскольку элементы $S_N\big|_{\mathcal{H}}$ под диагональю коммутируют друг с другом.

Замечание 2. Трехдиагональная матрица $S_N\big|_{\mathcal{H}}$ (126) после перехода к x-координатам совпадает с дуальной L-матрицей для открытой цепочки Тоды [6].

§6. Заключение

В данной заметке мы продемонстрировали, что в параметризации Гаусса, когда элемент группы записывается в виде произведения треугольных и диагональной матрицы

$$g = abc, \qquad a \in \mathrm{T}_-,\ b \in \mathrm{D},\ c \in \mathrm{T}_+, \tag{134}$$

матрица из генераторов в правом регулярном представлении допускает две факторизации

$$R =: c^{-1}Sc := c^{-1}Mc, \tag{135}$$

и аналогично для матрицы генераторов в левом регулярном представлении L. При этом вид дифференциальных операторов в матрицах S, M посередине оказывается существенно проще вида исходных генераторов R_{ij}. Единственным местом, где нам удалось найти обсуждение похожих формул факторизации для регулярного представления, является книга [8].

Сформулирована гипотеза, что операторы Казимира в регулярном представлении C_k можно записать через особым образом упорядоченный q-детерминант матрицы $u + S$

$$\mathrm{P}\left[\mathrm{qdet}(u+S)\right] = u^N + \sum_{k=1}^{N} u^{N-k} C_k. \tag{136}$$

Пользуясь этой гипотезой, мы продемонстрировали, что на некотором множестве функций $\mathcal{H}$ такой q-детерминант совпадает с производящей функцией сохраняющихся величин квантовой открытой цепочки Тоды A (по модулю преобразования подобия)

$$F(u) = \mathrm{qdet}(u+S)\big|_{\mathcal{H}}, \qquad A = (-i)^N U^{-1} F(iv)\, U. \tag{137}$$

Подробнее о связи $\mathrm{GL}(N,\mathbb{R})$ и квантовой цепочки Тоды можно прочитать в обзоре [7].

Обсуждаемая факторизация в случае индуцированных представлений группы $\mathrm{GL}(N,\mathbb{C})$ [9] оказалась очень удобным инструментом при исследовании квантового уравнения Янга-Бакстера [10], а ее классический аналог был использован для построения координат Дарбу на орбитеककоприсоединенного представления группы $\mathrm{GL}(N,\mathbb{C})$ [11]. Однако, по сравнению с индуцированными представлениями, для регулярных представлений вся картина становится гораздо более простой и естественной.

Список литературы

1. Д. П. Желобенко, *Компактные группы Ли и их представления.* — М.: Наука (1970), 664 с.
2. M. Bander, C. Itzykson, *Group Theory and the Hydrogen Atom (I).* — Reviews of Modern Physics **38:2** (1966), 330–345.
   M. Bander, C. Itzykson, *Group Theory and the Hydrogen Atom (II).* — Reviews of Modern Physics **38:2** (1966), 346–358.
3. A. Molev, *Yangians and classical Lie algebras.* — Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, **143** (2007), 400 p.
4. A. P. Isaev, V. A. Rubakov, *Theory of Groups and Symmetries: Finite Groups, Lie Groups, and Lie Algebras.* — World Scientific (2018), 476 p.
5. И. М. Гельфанд, М. И. Наймарк, Н. Я. Виленкин, *Обобщённые функции. Вып* 5*: Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений.* — М.: Государственное издательство физико-математической литературы (1962), 656 с.
6. E. K. Sklyanin, *Baecklund transformations and Baxter's Q-operator.* — Lecture notes, Integrable systems: from classical to quantum, Universite de Montreal (Jul 26 – Aug 6, 1999), nlin/0009009 [nlin.SI].
7. M. Semenov-Tian-Shansky, *Quantum Toda Lattice: a Challenge for Representation Theory.* — [arXiv: 1912.13268 [math.RT]].
8. A. N. Leznov, M. V. Saveliev, *Group-Theoretical Methods for Integration of Nonlinear Dynamical Systems.* — Progress in Mathematical Physics, Birkhauser Basel, **15** (1992), 292 p.
9. И. М. Гельфанд, М. И. Наймарк, *Унитарные представления классических групп.* — Труды математического института им В. И. Стеклова, **36** (1950).
10. С. Э. Деркачев, А. Н. Манашов, *Общее решение уравнения Янга-Бакстера с группой симметрии* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. — Алгебра и анализ, **21:4** (2009), 1–94.
11. М. В. Бабич, С. Э. Деркачев, *О рациональной симплектической параметризации коприсоединенной орбиты* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$*: диагонализуемый случай.* — Алгебра и анализ, **22:3** (2010), 16–31.

Belousov N. M., Derkachov S. E. Regular representation of the group $\mathrm{GL}(N,\mathbb{R})$: factorization, Casimir operators and Toda chain.

The note is devoted to a factorization formula for the matrix constructed from the generators of the group $\mathrm{GL}(N,\mathbb{R})$ in its regular representation. The factorization formula makes it possible to calculate these generators together with Casimir operators in the case of an arbitrary N, and it also clarifies a link between the group $\mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$ and the quantum Toda chain.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: belousovnikita.m@gmail.com

E-mail: derkach@pdmi.ras.ru

Поступило 18 ноября 2020 г.