Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 494, 2020 г.

Н. М. Белоусов

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЭКЛУНДА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

§1. Введение

Преобразования Бэклунда являются важнейшим инструментом при изучении уравнений в частных производных и представляют собой отображения, связывающие разные решения этих уравнений. Ранние исследования таких отображений для нелинейного уравнения Шредингера можно найти в [1–3].

Возрождение интереса к преобразованиям Бэклунда обусловлено обнаруженными связями с квантовыми интегрируемыми системами и феноменом разделения переменных [4]. Цель данной заметки – представить новый подход к преобразованию Бэклунда для нелинейного уравнения Шредингера, следуя идеям работ Е. К. Склянина и В. Б. Кузнецова [4, 5].

План заметки следующий. В параграфе 2 вводится нелинейное уравнение Шредингера. В параграфе 3 мы приводим преобразование Бэклунда, исследовавшееся в работах [1–3], и обозначаем его свойства, существенные для нашего рассмотрения. В параграфе 4 введены необходимые объекты из метода обратной задачи рассеяния и представлен новый вывод преобразования Бэклунда, основанный на калибровочном преобразовании L-матрицы для нелинейного уравнения Шредингера. В параграфе 5 обсуждается квантовый аналог преобразования Бэклунда и его связь с Q-оператором Бакстера.

§2. Нелинейное уравнение Шредингера

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + 2c|\psi|^2\psi, \tag{1}$$

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, преобразование Бэклунда, симметрии, интегрируемость, метод обратной задачи рассеяния, Q-оператор Бакстера.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект No. 19-11-00131).

где $\psi(x,t)$ – комплекснозначная функция. При $c=0$ оно становится линейным и совпадает с уравнением Шредингера для свободной частицы из квантовой механики. Поэтому за ним закрепилось название *нелинейного уравнения Шредингера*.

Это уравнение возникает во многих физических задачах, и его решение зависит от граничных условий. Мы будем предполагать, что система живет «в ящике» $[a,b]$ размера $b-a$. Кроме того, наложим **периодические граничные условия**:

$$\psi(a,t)=\psi(b,t). \tag{2}$$

Уравнение (1) можно записать как гамильтоново уравнение движения для некоторой теории поля

$$\partial_t\psi=\{H,\psi\}. \tag{3}$$

Введем гамильтониан этой теории

$$H=\int\limits_a^b dx\left(\partial_x\bar{\psi}\partial_x\psi+c\bar{\psi}^2\psi^2\right) \tag{4}$$

и правила вычисления скобок Пуассона между полем ψ и комплексно-сопряженном ему $\bar{\psi}$

$$\{\psi(x),\bar{\psi}(y)\}=i\delta(x-y),\qquad \{\psi(x),\psi(y)\}=\{\bar{\psi}(x),\bar{\psi}(y)\}=0. \tag{5}$$

Здесь и далее зафиксируем момент времени t и будем опускать зависимость от него внутри функций $\psi(x,t)\equiv\psi(x)$.

Преобразования Бэклунда, связывающие разные решения уравнения (1), являются преобразованиями симметрии. Как следует из теоремы Нетер, в гамильтоновой формулировке симметриям теории соответствуют некоторые сохраняющиеся величины.

Одной из таких величин является гамильтониан. Помимо него нелинейное уравнение Шредингера обладает бесконечным набором других сохраняющихся величин. Две из них следуют из двух простых симметрий.

Из симметрии относительно сдвига по координате x следует сохранение *импульса*

$$P=-i\int\limits_a^b dx\,\bar{\psi}\partial_x\psi. \tag{6}$$

Кроме того, теория инвариантна при растяжении полей

$$\bar{\psi} \to v\bar{\psi}, \qquad \psi \to v^{-1}\psi, \tag{7}$$

откуда следует сохранение *числа частиц*

$$N = \int_a^b dx\, \bar{\psi}\psi. \tag{8}$$

§3. Преобразование Бэклунда

Сдвиг по координате и растяжение дают в некотором смысле одни и те же решения. Как правило, под преобразованием Бэклунда понимают отображение, способное генерировать новые решения. В случае нелинейного уравнения Шредингера такое отображение выглядит следующим образом.

Утверждение 1. *Преобразование* $(\bar{\psi}, \psi) \to (\bar{\varphi}, \varphi)$*, в котором новые поля определяются из системы уравнений*

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= v\bar{\psi} - i\partial_x\bar{\psi} - c\bar{\psi}^2\varphi, \\ \psi &= v\varphi + i\partial_x\varphi - c\bar{\psi}\varphi^2, \end{aligned} \tag{9}$$

сохраняет вид гамильтониана

$$H(\bar{\varphi}, \varphi) = H(\bar{\psi}, \psi) \tag{10}$$

и скобок Пуассона

$$\{\varphi, \varphi\} = \{\psi, \psi\}, \quad \{\bar{\varphi}, \bar{\varphi}\} = \{\bar{\psi}, \bar{\psi}\}, \quad \{\varphi, \bar{\varphi}\} = \{\psi, \bar{\psi}\}, \tag{11}$$

т. е. является симметрией.

Заметим, что такое преобразование, как и преобразование растяжения (7), зависит от произвольного комплексного параметра v. Новые поля являются функциями от $\psi, \bar{\psi}$ и v.

Равенство гамильтонианов легко доказать, подставив $\bar{\varphi}$ и ψ из формул (9) и перекинув несколько раз производные. Кроме того, поскольку систему (9) можно записать через производящую функцию

$$\bar{\varphi}(x) = \frac{\delta F}{\delta\varphi(x)}, \qquad \psi(x) = \frac{\delta F}{\delta\bar{\psi}(x)}, \tag{12}$$

где

$$F(\bar{\psi},\varphi)=\int\limits_a^b dx\,\Big(\bar{\psi}(v+i\partial_x)\varphi-\tfrac{c}{2}\bar{\psi}^2\varphi^2\Big), \tag{13}$$

то такое преобразование является каноническим и сохраняет вид скобок Пуассона.

Применяя преобразование (9) к решениям исходного уравнения (1), мы будем получать новые решения. В этом нетрудно убедиться: взяв в качестве исходных полей $\bar{\psi}=0$, $\psi=0$, находим

$$\bar{\varphi}=0,\qquad \varphi=C\exp(ivx-iv^2t). \tag{14}$$

Зависимость от t восстановлена из уравнений движения, и C – произвольная константа. Таким образом, система (9) задает преобразование Бэклунда[1]. Кроме того, новые решения также можно получить, применяя обратное к (9) преобразование. Подробное исследование вопроса, какие решения получаются с помощью такого преобразования (и обратного к нему), можно найти в работе [3].

Предъявленная симметрия обладает одной интересной особенностью. В отличие от симметрий относительно сдвигов и растяжений, ей соответствует бесконечно много сохраняющихся величин.

Преобразованные поля $\varphi,\bar{\varphi}$ можно представить в виде рядов по v

$$\begin{aligned}\varphi(v|\bar{\psi},\psi)&=\sum_{n=1}^{\infty}v^{-n}\varphi_n(\bar{\psi},\psi),\\ \bar{\varphi}(v|\bar{\psi},\psi)&=\sum_{n=-1}^{\infty}v^{-n}\bar{\varphi}_n(\bar{\psi},\psi).\end{aligned} \tag{15}$$

Нижние пределы этих сумм диктуются системой (9), и коэффициенты получаются из нее рекуррентным образом. Например, из второго уравнения системы находим

$$\varphi_{n+1}=-i\partial_x\varphi_n+c\bar{\psi}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi_k\varphi_{n-k},\qquad \varphi_1=\psi. \tag{16}$$

Пользуясь разложением φ в ряд, покажем, что преобразованию (9) соответствует бесконечно много сохраняющихся величин.

[1]Заметим, что если исходные поля $\bar{\psi},\psi$ комплексно-сопряжены, то преобразование (9) переводит их в $\bar{\varphi},\varphi$, которые в общем случае уже не будут сопряжены.

Утверждение 2. *Функционал*

$$
\begin{aligned}
G(v) = \int\limits_a^b dx\, \bar{\psi}\varphi(v|\bar{\psi},\psi) &= \sum_{n=1}^{\infty} v^{-n} \int\limits_a^b dx\, \bar{\psi}\varphi_n(\bar{\psi},\psi) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} v^{-n} H_n(\bar{\psi},\psi)
\end{aligned}
\tag{17}
$$

является производящим для сохраняющихся величин, т. е.

$$\{H, H_n\} = 0. \tag{18}$$

Для доказательства домножим первое уравнение системы (9) на φ, второе на $\bar{\psi}$ и вычтем их друг из друга

$$\bar{\psi}\psi - \bar{\varphi}\varphi = i\partial_x(\bar{\psi}\varphi). \tag{19}$$

Пользуясь этим равенством и тем, что гамильтониан и скобки Пуассона выглядят одинаково в новых и старых переменных, покажем, что G коммутирует с H

$$
\begin{aligned}
\{H, G\} &= \int\limits_a^b dx \Big(\varphi\{H, \bar{\psi}\} + \bar{\psi}\{H, \varphi\}\Big) \\
&= i \int\limits_a^b dx \Big(\varphi\big(-\partial_x^2\bar{\psi} + 2c\bar{\psi}^2\psi\big) - \bar{\psi}\big(-\partial_x^2\varphi + 2c\bar{\varphi}\varphi^2\big)\Big) \\
&= 2ic \int\limits_a^b dx\, \bar{\psi}\varphi\,(\bar{\psi}\psi - \bar{\varphi}\varphi) = 0.
\end{aligned}
$$

Следовательно, с гамильтонианом будут коммутировать и коэффициенты H_n при разных степенях v.

Первыми слагаемыми из ряда G при этом являются уже знакомые нам функционалы числа частиц, импульса и гамильтониан

$$G = v^{-1}N + v^{-2}P + v^{-3}H + \ldots \tag{20}$$

Замечание. Производящий функционал для сохраняющихся величин G является в некотором смысле канонически сопряженной к v переменной относительно преобразования (9)

$$G = \frac{\partial F}{\partial v}(\bar{\psi}, \varphi) = \int\limits_a^b dx\, \bar{\psi}\varphi.$$

То же самое наблюдается для других интегрируемых моделей [4]. Было бы интересно найти доказательство этого факта для произвольной непрерывной симметрии, задаваемой некоторой производящей функцией F.

Итак, в этом параграфе мы показали, что преобразование (9) является преобразованием симметрии, которому соответствует бесконечно много сохраняющихся величин. Поскольку при этом решение исходного уравнения (1) переходит в еще одно его решение, такое преобразование является преобразованием Бэклунда. Предшествующие исследования этого преобразования можно найти в [1–3].

§4. Калибровочное преобразование

В этой части будут введены необходимые объекты из метода обратной задачи рассеяния, после чего будет представлен новый вывод преобразования Бэклунда при помощи калибровочного преобразования L-матрицы.

Изучение исходного уравнения (1) в рамках метода обратной задачи во многом сводится к исследованию следующих вспомогательных объектов. Введем 2×2 матрицу, среди элементов которой будут поля $\psi, \bar{\psi}$

$$L(x, u) = \begin{pmatrix} -i\frac{u}{2} & ic\,\bar{\psi}(x) \\ -i\psi(x) & i\frac{u}{2} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где u – произвольное комплексное число. Эта L-матрица *локальна*, то есть зависит от точки x. Теперь определим *глобальную* 2×2 матрицу, зависящую от концов отрезка $[a, b]$, на котором живут поля, как решение дифференциального уравнения

$$\partial_b T_a^b(u) = L(b, u) T_a^b(u), \qquad T_a^a(u) = \mathbb{1}. \tag{22}$$

Зависимость от a, b для нее отражена в верхнем и нижнем индексах, а в точке $b = a$ матрица T превращается в единичную.

Для этого уравнения можно написать формальный ответ в виде ряда

$$\begin{aligned} T = \mathbb{1} &+ \int\limits_a^b dx\, L(x) + \int\limits_a^b dx_2 \int\limits_a^{x_2} dx_1\, L(x_2)L(x_1) \\ &+ \int\limits_a^b dx_3 \int\limits_a^{x_3} dx_2 \int\limits_a^{x_2} dx_1\, L(x_3)L(x_2)L(x_1) + \dots \end{aligned} \tag{23}$$

Из последней формулы видно, что элементы T_{ij} этой матрицы являются функционалами от полей $\psi, \bar{\psi}$ (как и, например, гамильтониан H в предыдущем пункте).

Приведем одно из ключевых утверждений, которое доказывается в рамках метода обратной задачи[2].

Утверждение 3. *След матрицы* T

$$t(u) = \mathrm{trT(u)} = \mathrm{T_{11}(u)} + \mathrm{T_{22}(u)}, \tag{24}$$

является производящим функционалом для сохраняющихся величин нелинейного уравнения Шредингера (1)*, среди которых есть гамильтониан* (4)*.*

Величину $t(u)$ называют *трансфер-матрицей*[3]. Теперь обсудим, как введенные объекты помогают найти преобразование Бэклунда.

Рассмотрим преобразование $(\bar{\psi}, \psi) \to (\bar{\varphi}, \varphi)$, сохраняющее вид трансфер-матрицы

$$t(\bar{\varphi}, \varphi) = t(\bar{\psi}, \psi). \tag{25}$$

По утверждению 3 данное условие эквивалентно тому, что не меняется вид гамильтониана и других сохраняющихся величин, получающихся из трансфер-матрицы. Для выполнения (25) достаточно, чтобы T-матрицы в новых и старых переменных были связаны как

$$T(\bar{\varphi}, \varphi) = M(b)\, T(\bar{\psi}, \psi)\, M(a)^{-1}. \tag{26}$$

Тогда, по свойству следа, трансфер-матрицы $t = \mathrm{trT}$ будут совпадать[4].

[2] Смотри, например, [6].

[3] Связь между $t(u)$ и функционалом $G(v)$ (17) из преобразования Бэклунда, также генерирующим сохраняющиеся величины, будет показана в конце следующего параграфа.

[4] Здесь, как и всюду, на поля наложено условие периодичности $\psi(a) = \psi(b)$, $\bar{\psi}(a) = \bar{\psi}(b)$.

Вспомним, что матрица T в исходных переменных зависела от концов интервала $[a, b]$ и удовлетворяла уравнению (22)

$$\partial_b T_a^b(u) = L(b, u) T_a^b(u). \tag{27}$$

Дифференцируя (26) по b, находим, что L-матрицы должны быть связаны *калибровочным преобразованием*

$$L(x, u|\bar{\varphi}, \varphi) = M(x) L(x, u|\bar{\psi}, \psi) M(x)^{-1} + \big(\partial_x M(x)\big) M(x)^{-1}. \tag{28}$$

Теперь, чтобы получить какое-нибудь преобразование симметрии, нужно зафиксировать в этом уравнении матрицу M и найти соотношения, связывающие новые поля $\bar{\varphi}, \varphi$ со старыми $\bar{\psi}, \psi$.

Рассмотрим простой пример, взяв

$$M(x, v) = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Зависимость от точки x здесь тривиальная, и мы включили в преобразование дополнительный параметр v. Справа в (28) останется только первое слагаемое, и, перемножив матрицы, получаем

$$\bar{\varphi} = v\bar{\psi}, \qquad \varphi = v^{-1}\psi. \tag{30}$$

Такое преобразование растяжения мы уже встречали (7) как одну из симметрий нелинейного уравнения Шредингера.

Не любая матрица M определяет какое-то преобразование, т. к. матричное уравнение (28) может не решиться. Кроме того, для преобразования симметрии еще необходимо свойство каноничности. Следуя идеям лекций [5], в качестве анзаца возьмем[5]

$$M(v, u) = \begin{pmatrix} v - u + pq & p \\ q & 1 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

где параметр u тот же, что и внутри L-матриц в (28), v – снова произвольное число, а p, q зависят от новых и старых полей

$$p = p(\bar{\psi}, \psi, \bar{\varphi}, \varphi), \qquad q = q(\bar{\psi}, \psi, \bar{\varphi}, \varphi). \tag{32}$$

Зависимость от x сидит внутри них же. Перемножая в (28) матрицы и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях u, получим,

[5] В лекциях [5] сформулирован следующий рецепт: следует искать M среди матриц, удовлетворяющих классическому уравнению Янга-Бакстера с той же r-матрицей, с которой связана матрица T данной модели. В нашем случае анзац (31) воспроизводит L-матрицу DST-цепочки.

что

$$p = c\bar{\psi}, \qquad q = -\varphi, \tag{33}$$

а поля связаны как

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= v\bar{\psi} - i\partial_x\bar{\psi} - c\bar{\psi}^2\varphi, \\ \psi &= v\varphi + i\partial_x\varphi - c\bar{\psi}\varphi^2. \end{aligned} \tag{34}$$

Это и есть преобразование Бэклунда (9), обсуждавшееся в параграфе 3. Таким образом, в подходе с трансфер-матрицей ему соответствует

$$M(\bar{\psi}, \varphi) = \begin{pmatrix} v - u - c\bar{\psi}\varphi & c\bar{\psi} \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Заметим, что в точке $u = v$ определитель (35) становится равным нулю. Есть красивый способ, как из этого наблюдения найти собственные числа матрицы T, и мы приводим его в приложении А. Сейчас воспользуемся результатом тех вычислений, выписав формулу (72) для суммы собственных чисел матрицы T, т.е. для трансфер-матрицы.

Утверждение 4. *Трансфер-матрицу* (24) *можно записать в виде*

$$t(v) = 2\cosh\Big(-i\frac{v}{2}(b-a) + icG(v)\Big), \tag{36}$$

где G – производящий функционал сохраняющихся величин из преобразования Бэклунда (17)

$$G(v) = \int\limits_a^b dx\, \bar{\psi}\varphi(v|\bar{\psi}, \psi). \tag{37}$$

Здесь под φ нужно понимать решение второго уравнения системы (34), которое мы уже находили, см. формулы (15), (16).

Как мы уже знаем, в разложении G присутствует гамильтониан

$$G(v) = v^{-1}N + v^{-2}P + v^{-3}H + \dots \tag{38}$$

Поэтому, как и было анонсировано в утверждении 3, тот же самый гамильтониан можно обнаружить, раскладывая логарифм трансфер-матрицы (36). Кроме того, трюк с калибровочным преобразованием показывает, что замена переменных (34) сохраняет не только вид H, но и вид N, P и всех остальных функционалов, которые получаются из трансфер-матрицы и G.

Отметим, что способ нахождения преобразования Бэклунда с помощью калибровочного преобразования является довольно общим в рамках метода обратной задачи, хотя подбор хорошей матрицы M требует творческого подхода.

§5. Квантовое преобразование Бэклунда

В последнем параграфе мы посмотрим на квантовую теорию нелинейного уравнения Шредингера и найдем квантовый аналог для преобразования Бэклунда (34).

Классическим каноническим преобразованиям, которые оставляют скобки Пуассона неизменными, в квантовой механике соответствуют преобразования подобия

$$\widehat{A} \longmapsto \widehat{Q}\widehat{A}\,\widehat{Q}^{-1}. \tag{39}$$

Для наглядности рассмотрим некоторую одномерную квантовую модель, гамильтониан которой записывается в привычных переменных $\widehat{p}$ и $\widehat{x}$. Любое преобразование вида (39) сохранит коммутатор $[\widehat{x},\widehat{p}] = ih$ между этими операторами. Будем работать в координатном представлении, когда все операторы действуют на пространстве функций от x, и $\widehat{p} = -ih\partial_x$. Предположим, что $\widehat{Q}$ можно представить как интегральный оператор

$$\big[\widehat{Q}f\,\big](x) = \int dy\, Q(x,y) f(y) \tag{40}$$

с некоторым ядром $Q(x,y)$. В классическом пределе этому оператору должно соответствовать некоторое каноническое преобразование

$$p, x \to k, y, \tag{41}$$

и мы будем считать, что оно задается производящей функцией $F(x,y)$, т. е.

$$p = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad k = -\frac{\partial F}{\partial y}. \tag{42}$$

Существует красивая формула [7], которая говорит, каким образом в классическом пределе для ядра Q появляется функция F

$$Q(x,y) \sim \exp\big(ih^{-1}F(x,y)\big), \qquad h \to 0. \tag{43}$$

Для некоторых преобразований эта формула является точной. Рассмотрим, например, преобразование, меняющее местами импульс и координату,

$$y = p, \qquad k = -x. \tag{44}$$

Его производящей функцией будет $F = xy$. В квантовом случае импульс и координата меняются местами посредством преобразования Фурье. Иными словами, если задать[6]

$$\big[\widehat{Q}f\,\big](x) = \int dy\, e^{ixy} f(y), \tag{45}$$

то

$$\widehat{Q}x = -i\partial_x \widehat{Q}, \qquad \widehat{Q}(-i\partial_x) = -x\widehat{Q}. \tag{46}$$

Как видно, здесь ядро преобразования (45) воспроизводит функцию F без взятия предела.

Чтобы перейти к квантовой теории нелинейного уравнения Шредингера, воспользуемся каноническим рецептом квантования и заменим поля-функции на поля-операторы

$$\psi,\, \bar\psi \longmapsto \widehat{\psi},\, \widehat{\psi}^\dagger, \tag{47}$$

действующие в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Зададим коммутаторы между полями аналогично скобкам Пуассона (5)

$$[\widehat{\psi}(x), \widehat{\psi}^\dagger(y)] = \delta(x-y), \qquad [\widehat{\psi}(x), \widehat{\psi}(y)] = [\widehat{\psi}^\dagger(x), \widehat{\psi}^\dagger(y)] = 0. \tag{48}$$

Будем считать, что гильбертово пространство $\mathcal{H}$, в котором действуют поля $\widehat{\psi}^\dagger, \widehat{\psi}$ и все остальные операторы, имеет структуру пространства Фока: в $\mathcal{H}$ существует вектор $|0\rangle$, такой что

$$\widehat{\psi}|0\rangle = 0, \tag{49}$$

и любой другой вектор получается из него действием операторов $\widehat{\psi}^\dagger$. Иными словами, всякое состояние из $\mathcal{H}$ можно представить в виде

$$f(\widehat{\psi}^\dagger)|0\rangle = f_0|0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int dx_1 \ldots dx_n\, f_n(x_1, \ldots, x_n) \widehat{\psi}^\dagger(x_1) \ldots \widehat{\psi}^\dagger(x_n)|0\rangle. \tag{50}$$

По всем переменным x_j интегрирование идет на интервале $[a, b]$. Между состояниями можно задать естественное скалярное произведение

$$(f, g) = \bar f_0 g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int dx_1 \ldots dx_n\, \bar f_n(x_1, \ldots, x_n) g_n(x_1, \ldots, x_n), \tag{51}$$

где черта означает комплексное сопряжение. Чтобы сопоставить преобразованию Бэклунда (34) какое-то квантовое преобразование, нам

[6] С этого момента положим $h = 1$.

нужно понять, как на пространстве $\mathcal{H}$ реализуются интегральные операторы.

Определим гауссов функциональный интеграл

$$\int \mathrm{D}\alpha^\dagger \mathrm{D}\alpha \, \exp\left[\int_a^b dx \left(-\alpha^\dagger\alpha + J\alpha + K\alpha^\dagger\right)\right] = \exp\left[\int_a^b dx \, JK\right]. \quad (52)$$

Здесь все величины под интегралом зависят от x. Пользуясь этой формулой, находим еще одно представление для скалярного произведения

$$(f,g) = \int \mathrm{D}\alpha^\dagger \mathrm{D}\alpha \, \exp\left[-\int_a^b dx\alpha^\dagger\alpha\right] \bar{f}(\alpha) g(\alpha^\dagger). \quad (53)$$

Экспонента под интегралом играет роль меры

$$\mu(\alpha^\dagger,\alpha) = \exp\left[-\int_a^b dx\,\alpha^\dagger\alpha\right]. \quad (54)$$

Произвольный интегральный оператор $\widehat{Q}$ на $\mathcal{H}$ будет действовать по формуле

$$\big[\widehat{Q}f\,\big](\widehat{\psi}^\dagger)|0\rangle = \int \mathrm{D}\alpha^\dagger \mathrm{D}\alpha \, \mu(\alpha^\dagger,\alpha)\, \mathcal{Q}(\widehat{\psi}^\dagger,\alpha)\, f(\alpha^\dagger)|0\rangle, \quad (55)$$

где $\mathcal{Q}$ обозначает ядро этого оператора.

Теперь, как в примере с преобразованием Фурье (45), построим квантовый оператор $\widehat{Q}$ с ядром

$$\mathcal{Q}(\widehat{\psi}^\dagger,\alpha) = \exp\left[F(\widehat{\psi}^\dagger,\alpha)\right], \quad (56)$$

где F – производящая функция классического преобразования Бэклунда (13)

$$F(\widehat{\psi}^\dagger,\alpha) = \int_a^b dx \left(\widehat{\psi}^\dagger(v + i\partial_x)\alpha - \tfrac{c}{2}(\widehat{\psi}^\dagger)^2\alpha^2\right). \quad (57)$$

Для квантового нелинейного уравнения Шредингера такой интегральный оператор играет особую роль: он совпадает с т. н. *Q-оператором Бакстера*, который для этой модели был исследован в работе [8][7].

[7]В работе [8] этот оператор записан в несколько другой форме, в приложении B продемонстрировано, что в действительности они совпадают.

Q-оператор является полезным инструментом при решении квантовой задачи на нахождение собственных функций и спектра гамильтониана и к тому же обладает рядом интересных свойств.

Утверждение 5. *Интегральный оператор с ядром* (56) *коммутирует сам с собой*

$$\left[\widehat{Q}(u), \widehat{Q}(v)\right] = 0 \tag{58}$$

и с производящей функцией квантовых сохраняющих величин нелинейного Шредингера, квантовой трансфер-матрицей [9],

$$\left[\widehat{t}(u), \widehat{Q}(v)\right] = 0. \tag{59}$$

Кроме того, этот оператор удовлетворяет уравнению Бакстера

$$\widehat{Q}(v)\widehat{t}(v) = e^{-i\frac{v}{2}(b-a)}\widehat{Q}(v+ic) + e^{i\frac{v}{2}(b-a)}\widehat{Q}(v-ic). \tag{60}$$

Свойства коммутации означают, что преобразование подобия, задаваемое оператором $\widehat{Q}$, является симметрией квантовой теории, а уравнение Бакстера позволяет решить задачу о спектре $\widehat{t}(v)$ и, как следствие, о спектре гамильтониана модели.

Итак, преобразование симметрии, задаваемое оператором $\widehat{Q}$ можно считать квантовым аналогом классического преобразования Бэклунда (9). В конце этого параграфа заметим, что в свое время Паскье и Годен [11], построив Q-оператор для квантовой цепочки Тоды, заметили, что его ядро точно так же является экспонентой от преобразования Бэклунда, известного для классической цепочки Тоды.

§6. Заключение

В духе работы [4] мы посмотрели на уже появлявшееся в литературе преобразование Бэклунда для нелинейного уравнения Шредингера (9) с точки зрения калибровочного преобразования L-матрицы (28).

При этом, в частности, была получена формула (36) для трансфер-матрицы в терминах производящего функционала сохраняющихся величин (17), соответствующих симметрии относительно преобразования Бэклунда. В последнем параграфе мы обозначили связь классического преобразования Бэклунда с Q-оператором Бакстера для квантовой модели.

Одним из открытых вопросов дальнейшего исследования является связь классического и квантового преобразований Бэклунда с разделением переменных для нелинейного уравнения Шредингера. В работе [4] этот вопрос обсуждается на примере дискретных моделей, поэтому теперь было бы интересно проинтерпретировать идеи оттуда в нашем случае теории поля.

Благодарности. Автор благодарит С. Э. Деркачева и Е. К. Склянина за чрезвычайно ценные обсуждения и внимание к работе.

A. Собственные числа T-матрицы

В параграфе 4 мы установили, что при калибровочном преобразовании L-матрицы

$$L(\bar{\varphi}, \varphi)M = ML(\bar{\psi}, \psi) + \partial_x M \tag{61}$$

соответствующие матрицы T связаны преобразованием подобия

$$T(\bar{\varphi}, \varphi)M(a) = M(b)T(\bar{\psi}, \psi). \tag{62}$$

Кроме того, выбрав в качестве M матрицу

$$M(v,u) = \begin{pmatrix} v - u - c\bar{\psi}\varphi & c\bar{\psi} \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix}, \tag{63}$$

мы получили связь между полями

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= v\bar{\psi} - i\partial_x\bar{\psi} - c\bar{\psi}^2\varphi, \\ \psi &= v\varphi + i\partial_x\varphi - c\bar{\psi}\varphi^2. \end{aligned} \tag{64}$$

Пользуясь этими формулами, найдем собственные числа T-матрицы.

Поскольку в точке $u = v$ определитель матрицы M зануляется, можно найти вектор ω, соответствующий нулевому собственному числу:

$$M(v,v)\omega = \begin{pmatrix} -c\bar{\psi}\varphi & c\bar{\psi} \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix}\omega = 0, \qquad \omega = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \end{pmatrix}. \tag{65}$$

С точностью до нормировки такой вектор будет единственным. Подчеркнем, что φ здесь зависит от $\bar{\psi}, \psi$ и берется из системы (64). Теперь домножим справа на этот вектор калибровочное преобразование (61) с параметром $u = v$ внутри L-матриц

$$M(v,v,x)\big(L(v,x) - \partial_x\big)\omega(x) = 0$$

Из единственности ω заключаем, что для оператора в скобках этот вектор тоже является собственным. Легко найти соответствующее собственное число

$$\big(L(v)-\partial\big)\omega=\begin{pmatrix}-i\frac{v}{2}+ic\bar\psi\varphi\\ -i\psi+i\frac{v}{2}\varphi-\partial\varphi\end{pmatrix}=\Big(-i\frac{v}{2}+ic\bar\psi\varphi\Big)\,\omega, \qquad (66)$$

где мы воспользовались вторым уравнением из (64). Теперь точно так же домножим на этот вектор глобальное преобразование (62) при $u=v$

$$M(b)T(\bar\psi,\psi)\omega(a)=T(\bar\varphi,\varphi)M(a)\omega(a)=0, \qquad (67)$$

и с учетом единственности ω верно, что

$$T_a^b(v|\bar\psi,\psi)\omega(a)=f(a,b,v)\omega(b)=f(a,b,v)\omega(a), \qquad (68)$$

где мы к тому же воспользовались периодическими граничными условиями. Осталось найти собственное число $f(a,b,v)$. Продифференцируем последнее уравнение по a[8]

$$T_a^b\big(-L(a)+\partial_a\big)\omega(a)=\partial_a f(a)\omega(b). \qquad (69)$$

Из локального соотношения (66) в точке a следует простое уравнение на собственное число

$$\partial_a f(a)=\Big(i\frac{v}{2}-ic\bar\psi(a)\varphi(a)\Big)\,f(a), \qquad f(b)=1, \qquad (70)$$

начальное условие к которому берется из условия на T-матрицу: $T_b^b=\mathbb{1}$. Наконец, решая это уравнение мы находим одно из собственных чисел матрицы T

$$f(a,b,v)=\exp\left(-i\frac{v}{2}(b-a)+ic\int\limits_a^b \mathrm{d}x\bar\psi(x)\varphi(v,x|\bar\psi,\psi)\right). \qquad (71)$$

Заметим, что в показателе экспоненты стоит то, что мы раньше обозначали как $G(v|\bar\psi,\psi)$ – семейство интегралов движения. Кроме того, поскольку $\mathrm{tr}L=0$, то $\det T=1$, значит, второе собственное число есть f^{-1}. Трансфер-матрица отсюда равна

$$t(v)=f+f^{-1}=2\cosh\Big(-i\frac{v}{2}(b-a)+icG(v)\Big). \qquad (72)$$

[8]Здесь нужно воспользоваться тождеством $\partial_a T_a^b=-T_a^bL(a)$, которое вытекает из определения T (22).

В. Q-оператор Бакстера

В параграфе 5 мы ввели интегральный оператор, действующий в пространстве состояний $\mathcal{H}$ по следующей формуле

$$\begin{aligned}\big[\widehat{Q}f\,\big](\widehat{\psi}^\dagger)|0\rangle = \int \mathrm{D}\alpha^\dagger \mathrm{D}\alpha\, \exp\Bigg[-\int\limits_a^b dx\,\alpha^\dagger\alpha \\ + \int\limits_a^b dx\,\Big(\widehat{\psi}^\dagger(v+i\partial_x)\alpha - \frac{c}{2}(\widehat{\psi}^\dagger)^2\alpha^2\Big)\Bigg]\, f(\alpha^\dagger)|0\rangle.\end{aligned} \tag{73}$$

Оказывается, этот оператор можно представить и в более простой форме. Введем символ *нормального упорядочения* $::$, который в любом выражении с полями переставляет $\widehat{\psi}^\dagger$ налево, а $\widehat{\psi}$ направо

$$:\,\widehat{\psi}\widehat{\psi}^\dagger\widehat{\psi}^2\widehat{\psi}^\dagger\,: = (\widehat{\psi}^\dagger)^2\widehat{\psi}^3, \tag{74}$$

как если бы поля были классическими. Тогда оператор $\widehat{Q}$ запишется в виде

$$\widehat{Q}(v) =:\exp\Bigg[\int\limits_a^b dx\,\Big(\widehat{\psi}^\dagger(v-1+i\partial_x)\widehat{\psi} - \frac{c}{2}(\widehat{\psi}^\dagger)^2\widehat{\psi}^2\Big)\Bigg]\,:\,. \tag{75}$$

Чтобы доказать это утверждение, понадобится формула приведения произведения двух операторов к нормальному порядку [10]

$$\begin{aligned}&:\,A(\widehat{\psi}^\dagger,\widehat{\psi})\,:\,:\,B(\widehat{\psi}^\dagger,\widehat{\psi})\,:\\ &=:\int \mathrm{D}\alpha^\dagger\mathrm{D}\alpha\,\exp\Bigg[-\int\limits_a^b dx\,(\alpha^\dagger-\widehat{\psi}^\dagger)(\alpha-\widehat{\psi})\Bigg]\,A(\widehat{\psi}^\dagger,\alpha)\,B(\alpha^\dagger,\widehat{\psi})\,:\,.\end{aligned} \tag{76}$$

Пользуясь этой формулой, нужно подействовать оператором (75) на произвольное состояние $f(\widehat{\psi}^\dagger)|0\rangle$. Помня, что $\psi|0\rangle = 0$, получаем исходную формулу (73).

В работе [8] исследовался оператор вида

$$\widehat{Q}_*(v) =:\exp\Bigg[\int\limits_a^b dx\,\Big(\frac{i}{v}\widehat{\psi}^\dagger\partial_x\widehat{\psi} - \frac{c}{2v^2}(\widehat{\psi}^\dagger)^2\widehat{\psi}^2\Big)\Bigg]\,: \tag{77}$$

С точностью до нормировки он совпадает с (75)

$$\widehat{Q}(v) = v^{\widehat{N}} \widehat{Q}_*(v), \tag{78}$$

где $\widehat{N}$ – квантовый оператор числа частиц

$$\widehat{N} = \int_a^b dx\, \widehat{\psi}^\dagger \widehat{\psi}. \tag{79}$$

Чтобы доказать последнее равенство, необходимо снова применить формулу приведения (76) и воспользоваться тождеством

$$v^{\widehat{N}} =: e^{(v-1)\widehat{N}} \ : . \tag{80}$$

При этом свойства оператора $\widehat{Q}$ из утверждения 5 следуют из соответствующих свойств $\widehat{Q}_*$.

Список литературы

1. B. G. Konopelchenko, *The group structure of Backlund transformations.* — Phys. Lett. A, **74** (1979), 189–192.
2. R. Sasaki, *Canonical structure of Backlund transformations.* — Phys. Lett. A, **78** (1980), 7–10.
3. B. G. Konopelchenko, *Elementary Backlund transformations, nonlinear superposition principle and solution of the integrable equations.* — Phys. Lett. A, **87** (1982), 445–448.
4. V. B. Kuznetsov, E. K. Sklyanin, *On Backlund transformations for many-body systems.* — J. Physics A **31** (1998), 2241–2251, solv-int/9711010.
5. E. K. Sklyanin, *Backlund transformations and Baxter's Q-operator*, Lecture notes, Integrable systems: from classical to quantum, Universite de Montreal (Jul 26 – Aug 6, 1999), nlin/0009009 [nlin.SI].
6. A. G. Izergin, *Introduction to the Bethe Ansatz Solvable Models*, Lecture notes, Universit'a di Firenze, Dipartimento di Fisica (1998–1999).
7. V. Fock, *On the canonical transformation in classical and quantum mechanics.* — Acta Physica **27** (1969), 219–224.
8. N. Belousov, S. Derkachov, *The Q-Operator for the Quantum NLS Model.* — J. Math. Sci., **242** (2019), 608–627, 1812.10043 [hep-th].
9. Е. К. Склянин, *Квантовый вариант метода обратной задачи рассеяния.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **95** (1980), 55–128.
10. F. A. Berezin, *The method of second quantization.* — Pure Appl. Phys. **24** (1966), Academic Press, 228 p.
11. M. Gaudin, V. Pasquier, *The periodic Toda chain and a matrix generalization of the Bessel function's recursion relations.* — J. Phys. A **25** (1992), 5243–5252.

Belousov N. M. Backlund transformation for the nonlinear Schrodinger equation.

In the note we give a new method of derivation of the Backlund transformation for the nonlinear Schrodinger equation. We discuss conserved quantities related to this transformation, and how it can be connected with the inverse scattering method. Besides, we construct a quantum analog of the Backlund transformation defined by the Baxter's Q-operator.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: belousovnikita.m@gmail.com

Поступило 12 октября 2020 г.