Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 493, 2020 г.

В. В. Суханов

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С МЕДЛЕННО ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ ПОТЕНЦИАЛОМ

§1. Введение

Работа посвящена исследованию решений нестационарного уравнения

$$-i\Phi_t = \mathrm{H}(\varepsilon \mathrm{t})\Phi, \quad \varepsilon \ll 1 \tag{1.1}$$

с оператором H медленно зависящим от времени. Хорошо известны асимптотические формулы описывающие поведение решений уравнения (1.1) в случае, когда спектр оператора в каждый момент времени является дискретным. Построение асимптотических формул для решения уравнения (1.1) в случае, если оператор H имеет непрерывный спектр, традиционно основано на адиабатической теореме теории рассеяния (см. [1]). Соответствующая техника, например, хорошо развита в случае, когда оператор H представим в виде суммы

$$\mathrm{H}(\varepsilon \mathrm{t}) = \mathrm{H}_0 + \mathrm{V}(\varepsilon \mathrm{t}), \tag{1.2}$$

где оператор H_0 от t не зависит. В случае быстро убывающего потенциала, в старшем порядке асимптотические формулы для решений уравнения (1.1) строятся так, как если бы оператор от времени не зависел и определяются только значением оператора в начальный момент времени, см [3] и [2]. В настоящей работе используется другой подход, использованный в работе [4], и не зависящий от адиабатической теоремы теории рассеяния. В качестве модели выбран одномерный оператор Шредингера (в самосопряженном случае) на всей оси с быстро убывающим потенциалом

$$\mathrm{H}\,(\tau) = -\frac{d^2}{dx^2} + v\,(x,\tau)\,, \quad v \in \mathbf{R}, \tau = \varepsilon t. - .$$

Ключевые слова: нестационарный оператор Шредингера, медленная зависимость от времени, адиабатическая теорема теории рассеяния, спектральная теория оператора Шредингера, асимптотика решений.

Исследование автора поддержано грантом РНФ No. 17-11-01126.

Мы будем считать, что оператор H(t) (для любого момента времени) не имеет дискретного спектра. В качестве основного асимптотического ансатца для решения уравнения (1.1) выбрано разложение по собственным функциям непрерывного спектра оператора H(t) в данный момент времени.

Во втором параграфе мы приведем основные сведения из спектральной теории оператора Шредингера.

Третий параграф посвящен построению формального решения нестационарного уравнения Шредингера. Такое решение, в старшем порядке,строится как интеграл по спектральному параметру от собственных функций оператора Шредингера в данный момент времени. Дальнейшие члены разложения определяются тем условием, чтобы решение оставалось быстроубываюшим при $x \to \pm\infty$.

В четвертом параграфе мы докажем, что построенные формальные решения являются асимптотическими разложениями точных решений задачи Коши для нестационарного уравнения Шредингера.

Наконец, в пятом параграфе, мы сравним полученные результаты с результатами, возникающими в рамках подхода, связанного с адиабатической теоремой теории рассеяния. Для модели оператора Дирака, рассмотренной в работе [4], асимптотическое поведение решения описывалось состоянием оператора H(t) в начальный момент времени со сверхстепенной точностью по ε. В случае оператора Шредингера это не так. Старший член асимптотики по-прежнему зависит только от состояния оператора H(t) в начальный момент времени. Однако младшие члены разложения чувствуют динамику оператора H(t). Это связано с краем спектра оператора Шредингера.

§2. Необходимые сведения из спектральной теории для оператора Шредингера

Для анализа решений уравнения (1.1) нам потребуются некоторые сведения из спектральной теории для оператора Шредингера (см. [5]). Рассмотрим оператор Шредингера на всей оси с быстро убывающим потенциалом

$$\mathrm{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + v(x), \quad v \in \mathbf{R}, \quad v(x) \in S(-\infty, +\infty).$$

где $\mathrm{S}(-\infty, +\infty)$ – класс Шварца. Здесь и в дальнейшем мы будем считать, что оператор H не имеет дискретного спектра, т.е. не существует отличных от нуля решений уравнения

$$\mathrm{H}y = \lambda y = k^2 y, \tag{2.1}$$

принадлежащих $L_2(-\infty, \infty)$.

Фиксируем решения Йоста $f(x)$ и $g(x)$ спектрального уравнения

$$\mathrm{H}y = k^2 y, \tag{2.2}$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$f(x,k) = \exp(ikx) + o(1), \quad x \to +\infty, \tag{2.3}$$

$$g(x,k) = \exp(-ikx) + o(1), \quad x \to -\infty. \tag{2.4}$$

Из анализа подходящих интегральных уравнений Вольтерра

$$f(x,k) = e^{ikx} - \int\limits_x^{+\infty} \frac{\sin(k(x-y))}{k} v(y) f(y,k)dy,$$

$$g(x,k) = e^{-ikx} + \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{\sin(k(x-y))}{k} v(y) g(y,k)dy$$

для решений $f(x,k)$ и $g(x,k)$ легко получить следующую лемму (см. [5]).

Lemma 2.1. *Решения $f(x,k)$ и $g(x,k)$ существуют и единственны при $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$. Они являются бесконечно дифференцируемыми функциями от x и k и имеют следующие пределы*

$$f(x,k) = a(k)\exp(ikx) + b(k)\exp(-ikx) + o(1), \quad x \to -\infty, \tag{2.5}$$

$$g(x,k) = a(k)\exp(-ikx) - \overline{b(k)}\exp(ikx) + o(1), \quad x \to +\infty. \tag{2.6}$$

Коэффициенты a и b удовлетворяют следующим условиям:

$$a(-k) = \overline{a(k)}, \quad |a(k)| \geqslant 1, \quad k \in \mathbb{R}; \quad a(k) \in C^\infty(0, +\infty);$$

$$b(-k) = \overline{b(k)}, \ k \in \mathbb{R}; \quad b(k) \in C^\infty(0, +\infty);$$

$$|a|^2 = |b|^2 + 1.$$

Оператор H обладает двукратным непрерывным спектром на положительной полуоси. Функции ψ_1 и ψ_2, определенные равенствами

$$\psi_1 = \frac{f}{a}, \quad \psi_2 = \frac{g}{a}$$

можно рассматривать как собственные функции непрерывного спектра оператора H, в частности

$$\int_0^\infty dk(\psi_1(x,k)\overline{\psi_1(y,k)} + \psi_2(x,k)\overline{\psi_2(y,k)}) = 2\pi\delta(x-y).$$

Функции $\psi_1(x,k)$ и $\psi_2(x,k)$ обладают следующими асимптотическими свойствами:

$$\psi_1(x,k) = \exp(ikx)/a(k) + o(1), \quad x \to +\infty, \tag{2.7}$$

$$\psi_1(x,k) = \exp(ikx) + \exp(-ikx)b(k)/a(k) + o(1), \quad x \to -\infty, \tag{2.8}$$

$$\psi_2(x,k) = \exp(-ikx) - \exp(ikx)\overline{b(k)}/a(k) + o(1), \quad x \to +\infty, \tag{2.9}$$

$$\psi_2(x,k) = \exp(-ikx)/a(k) + o(1), \quad x \to -\infty. \tag{2.10}$$

Введем в рассмотрение пространство вектор-функций $S_0(0,\infty)$

$$\mathbf{c} \in S_0(0,\infty) \longleftrightarrow \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}; \quad c_1, c_2 \in S(-\infty,+\infty)$$

(т.е. функции c_1, c_2, заданные на положительной полуоси, должны убывать при $x \to +\infty$ в соответствии с классом Шварца и иметь гладкое продолжение на всю ось) и преобразование $F: \ S(-\infty,+\infty) \to S_0(0,+\infty)$ задаваемое функциями ψ_1 и ψ_2

$$\begin{pmatrix} d_1(k) \\ d_2(k) \end{pmatrix} = F\left(c(x)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx c(x) \begin{pmatrix} \overline{\psi_1(x,k)} \\ \overline{\psi_2(x,k)} \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Это преобразование обладает свойствами, аналогичными преобразованию Фурье. В частности, оно обратимо, а формула для обратного преобразования имеет вид

$$c(x) = F^{-1}\begin{pmatrix} d_1(k) \\ d_2(k) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dk(\psi_1(x,k), \psi_2(x,k))\begin{pmatrix} d_1(k) \\ d_2(k) \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Общее решение неоднородного уравнения

$$Hv - k^2 v = h(x)$$

можно найти в терминах функций $f(x,k)$ и $g(x,k)$

$$v(x) = \frac{-1}{2ika(k)}\int_0^x (f(x,k)g(y,k) - g(x,k)f(y,k))h(y)dy$$

$$+r_1\psi_1(x,k)+r_2\psi_2(x,k). \tag{2.13}$$

Здесь r_1 и r_2 -произвольные коэффициенты.

Замечание 2.2. Как видно из интегрального уравнения Вольтерра для функции $f(x,k)$ коэффициент $a(k)$ имеет вид

$$a(k)=1-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-iky})}{2ik}v(y)f(y,k)dy.$$

В случае общего положения $a(k)\to\infty$ при $k\to 0$, поэтому мы будем полагать, что оператор Н, таков что

$$|ka(k)|\geqslant\varepsilon_0>0,\quad k\in\mathbb{R}.$$

При таком условии формула (2.13) не имеет особенности при $k\to 0$.

§3. Формальное решение нестационарного уравнения Шредингера

Рассмотрим решение задачи Коши для нестационарного уравнения Шредингера

$$-i\Phi_t=\mathrm{H}(\tau)\Phi,\ \ \tau=\varepsilon t,\ \varepsilon\ll 1 \tag{3.1}$$
$$\Phi|_{t=o}=\Phi_0(x).$$

Здесь $\mathrm{H}(\tau)$-оператор Шредингера

$$\mathrm{H}(\tau)=-\frac{d^2}{dx^2}+v\left(x,\tau\right),\ \tau=\varepsilon t,$$
$$v(x,\tau)\in C^\infty((-\infty,+\infty)\times[0,\tau_0]),$$
$$\Phi_0(x)\in S(-\infty,+\infty),\quad \partial_\tau^j v(\bullet,\tau)\in S(-\infty,+\infty),\quad j=0,1,2,\dots.$$

Кроме того мы будем полагать, что

$$|ka(k,\tau)|\geqslant\varepsilon_0>0,\quad k\in\mathbb{R}.$$

Здесь $a(k,\tau)$ – коэффициент матрицы перехода для оператора $\mathrm{H}(\tau)$.

Будем строить формальное решение задачи Коши (3.1) на промежутке $\tau\in[0,\tau_0]$ в виде разложения

$$\hat\Phi(x,t)=\int_0^\infty dk\exp(ik^2t)\sum_{l=0}^\infty\varepsilon^l F_l(x,k,\tau). \tag{3.2}$$

Замечание 3.1. Разумеется нестационарное уравнение Шредингера имеет много решений в зависимости от поведения на бесконечности по переменной x. Нам требуется решение хорошо убывающее при $x \to \pm\infty$. Такое решение можно получить в рамках следующей теоремы.

Теорема 3.2. *Задача Коши* (3.1) *имеет единственное формальное решение вида* (3.2), *обладающее следующими свойствами:*

$$F_l(x,k,\tau)\in C^\infty((-\infty,+\infty)\times(0,+\infty)\times[0,\tau_0]),\ \ \partial_\tau^j F_l(x,\bullet,\tau)\in C^\infty(0,+\infty)$$

$$F_l = P_l(x,k,\tau)\exp(-ikx) + p_l^0(k)\exp(ikx) + o(1), \quad x\to-\infty, \tag{3.3}$$

$$F_l = Q_l(x,k,\tau)\exp(ikx) + q_l^0(k)\exp(-ikx) + o(1), \quad x\to+\infty. \tag{3.4}$$

Здесь P_l *и* Q_l *– полиномы по* x

$$P_l = \sum_{m=0}^{l} p_{lm}(\tau,k)x^m, \quad Q_l = \sum_{m=0}^{l} q_{lm}(\tau,k)x^m,$$

с гладкими коэффициентами

$$\partial_\tau^j p_{lm}(\tau,\bullet)\in S(0,+\infty), \partial_\tau^j q_{lm}(\tau,\bullet)\in S(0,+\infty), \quad j=0,1,2,\ldots,$$

а $p_l^0(k)$ *и* $q_l^0(k)$ *- гладкие функции из* $C^\infty(0,+\infty)$ *не зависящие от* τ *и* x.

Для доказательства теоремы подставим ряд (3.2) в уравнение (3.1). Приравняем члены при одинаковых степенях ε. Легко видеть, что коэффициенты ряда (3.2) удовлетворяют рекуррентной системе соотношений

$$-i(F_l)_\tau = (\mathrm{H}(\tau)-k^2)F_{l+1}.$$

В старшем порядке получим

$$(\mathrm{H}(\tau)-k^2)F_0(x,k,\tau)=0.$$

Таким образом, функция $F_0(x,k,\tau)$ является решением спектрального уравнения (2.2). Произвольное решение спектрального уравнения может быть представлено в виде

$$F_0(x,k,\tau) = d_1^0(k,\tau)\psi_1(x,k,\tau) + d_2^0(k,\tau)\psi_2(x,k,\tau).$$

Для того чтобы определить функции $d_1^0(k,\tau)$ и $d_2^0(k,\tau)$, используем условия (3.3) и (3.4). С учетом асимптотических свойств (2.7)-(2.10) решений $\psi_1(x,k,\tau)$ и $\psi_2(x,k,\tau)$ получим

$$(d_1^0)_\tau = 0, \quad (d_2^0)_\tau = 0.$$

Наконец, из начального условия задачи Коши (3.1) окончательно имеем

$$\begin{pmatrix} d_1^0(k) \\ d_2^0(k) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \begin{pmatrix} \overline{\psi_1(x,k,0)} \\ \overline{\psi_2(x,k,0)} \end{pmatrix} \Phi_0(x).$$

Далее выполнение теоремы можно увидеть с помощью метода математической индукции. Пусть утверждение теоремы выполнено для всех $l \leqslant N$. В частности, отсюда следует, что

$$\frac{\partial F_N(y,k,\tau)}{\partial \tau} = \exp(-ikx)\tilde{P}_N(x,k,\tau) + o(1), \quad x \to -\infty, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial F_N(y,k,\tau)}{\partial \tau} = \exp(ikx)\tilde{Q}_N(x,k,\tau) + o(1), \quad x \to +\infty. \tag{3.6}$$

Здесь

$$\tilde{P}_l(x,k,\tau) = \frac{\partial P_l}{\partial \tau}, \quad \tilde{Q}_l(x,k,\tau) = \frac{\partial Q_l}{\partial \tau}.$$

При $l = N+1$ получим

$$F_{N+1}(x,k,\tau) = \frac{1}{2a(k)k} \int\limits_0^x dy (f(x,k)g(y,k) - g(x,k)f(y,k)) \frac{\partial F_N(y,k,\tau)}{\partial \tau}$$
$$+ d_1^{N+1}(k,\tau)\psi_1(x,k,\tau) + d_2^{N+1}(k,\tau)\psi_2(x,k,\tau). \tag{3.7}$$

Рассмотрим асимптотическое поведение функции $F_{N+1}(x,k,\tau)$ при $x \to -\infty$. Подставим формулы (2.5) и (2.4), описывающие асимптотическое поведение функций $f(x,k,\tau)$ и $g(x,k,\tau)$, а также асимптотику (3.5) производной функции F_N в соотношение (3.7). Нетрудно видеть, что подынтегральное выражение для интеграла, стоящего в правой части равенства при $y \to -\infty$, $x < y$, обладает асимптотическим поведением следующего вида

$$(f(x,k)g(y,k) - g(x,k)f(y,k)) \frac{\partial F_N(y,k,\tau)}{\partial \tau}$$
$$\simeq a(k)(\exp(ikx)\exp(-2iky) + \exp(-ikx))\tilde{P}_N(y,k,\tau)$$

Отсюда можно получить асимптотику функции $F_{N+1}(x,k,\tau)$

$$F_{N+1}(x,k,\tau) \simeq \hat{P}_{N+1}(x,k,\tau)\exp(-ikx) + \hat{p}_{N+1}(k,\tau)\exp(ikx)$$
$$+ d_1^{N+1}(k,\tau)\left(\exp(ikx) + \exp(-ikx)\frac{b}{a}\right) + d_2^{N+1}(k,\tau)\exp(-ikx)\frac{1}{a}$$

при $x \to -\infty$, где $\hat{P}_{N+1}(x,k,\tau)$ – подходящий полином по x степени $N+1$, а $\hat{p}_{N+1}(k,\tau)$ – коэффициент не зависящий от x. Отсюда используя соотношение (3.3) можно найти коэффициент d_1^{N+1} с точностью до одной неизвестной постоянной (по τ) величины

$$d_1^{N+1}(k,\tau) = -\hat{p}_{N+1}(k,\tau) + p^0_{N+1}(k).$$

Совершенно аналогично, рассматривая асимптотическое поведение функции $F_{N+1}(x,k,\tau)$ при $x \to +\infty$, находится коэффициент d_2^{N+1}. Для отыскания недостающих функций можно использовать начальное условие задачи Коши

$$\int\limits_0^\infty dk F_{N+1}(x,k,0) = 0.$$

В итоге, получим

$$\begin{pmatrix} q^0_{N+1}(k) \\ p^0_{N+1}(k) \end{pmatrix} = F(0)[\frac{-1}{4\pi a(k)k}\int\limits_0^x dy (f(x,k,0)g(y,k,0) - g(x,k,0)f(y,k,0))$$

$$\times \frac{\partial F_N(y,k,\tau)}{\partial \tau}|_{\tau=0} + \begin{pmatrix} \hat{p}_{N+1}(k,0) \\ \hat{q}_{N+1}(k,0) \end{pmatrix}.$$

Здесь $F(0)$ – преобразование построенное по формуле (2.11) с функциями $\psi_1(x,k,\tau)$ и $\psi_2(x,k,\tau)$ в момент времени $\tau = 0$. Таким образом, мы видим, что существует единственная функция $F_{N+1}(x,k,\tau)$ обладающая нужными свойствами. На этом будем считать теорему доказанной.

§4. Оценки формального решения

Введем в рассмотрение отрезок ряда (3.2)

$$\Phi_N(x,t) = \int\limits_0^{+\infty} dk \exp(ikt) \sum_{l=0}^N \varepsilon^l F_l(x,k,\tau)$$

и соответствующую ему невязку в уравнении (3.1)

$$\Delta\Phi_N(x,t) = -i\frac{\partial \Phi_N}{\partial t} - \mathrm{H}(\tau)\Phi_N = -i\varepsilon^{N+1}\int\limits_0^\infty dk \exp(ik^2 t)\frac{\partial F_N(y,k,\tau)}{\partial \tau}.$$

Теорема 4.1. *Невязка* $\Delta\Phi_N(x,t)$ *удовлетворяет следующим оценкам*

$$\Delta\Phi_N(x,t) \in C^\infty((-\infty,+\infty),[0,\tau_0]),$$

$$\|\Delta\Phi_N(x,t)\|_{klm} = O(\varepsilon^{N+1}).$$

Здесь

$$\|F(x,t)\|_{lkm} = \sum_{l'=0}^{l}\sum_{k'=0}^{k}\sum_{m'=0}^{m}\max_{x,\tau}\left|\frac{\partial^{l'+k'}F}{\partial^{l'}x\partial^{k'}t}(|x|^m+1)\right|.$$

Доказательство этой теоремы является прямым следствием конструкции формального решения $\Phi_N(x,t)$.

Теорема 4.2. *Формальный ряд* $\hat{\Phi}$ *является асимптотическим разложением точного решения* Φ *задачи Коши* (1.2) *для* $\tau \in [0,\tau_0]$. *Выполнены следующие оценки*

$$\forall k,l,m \quad \|\Phi - \Phi_N\|_{lkm} = O(\varepsilon^{N+1}).$$

Введем в рассмотрение точное решение Φ задачи Коши (3.1)

$$-i\Phi_t = \mathrm{H}(\tau)\Phi, \ \ \tau = \varepsilon t,$$

$$\Phi|_{t=o} = \Phi_0(x).$$

Это решение мы можем рассматривать как результат действия действия оператора $M(t)$ на начальные данные задачи Коши

$$\Phi(t) = M(t)\Phi_0.$$

Оператор $H(\tau)$ формально самосопряженный в $L_2(-\infty,+\infty)$. Таким образом оператор $M(t)$ можно считать изометрическим в $L_2(-\infty,+\infty)$. Рассмотрим функцию

$$X_N = \Phi - \Phi_N.$$

Она удовлетворяет неоднородному уравнению

$$-i\frac{\partial X_N}{\partial t} - \mathrm{H}(\tau)X_N = \Delta\Phi_N. \tag{4.1}$$

Мы можем вычислить решение этого уравнения с помощью оператора $M(t)$

$$X_N(k,t) = iM(t)\int_0^t dt' M^{-1}(t')\Delta\Phi_N(t').$$

Из этого соотношения мы можем получить оценку для нормы функции X_N

$$\|X_N\|_{L_2(-\infty,+\infty)} \leqslant t \max_{t'\in[0,t]} \|\Delta\Phi_N(t')\|_{L_2(-\infty,+\infty)}.$$

Для того, чтобы получить оценки для производной $\frac{\partial X_N}{\partial x}$ продифференцируем уравнение (4.1)

$$-i\frac{\partial^2 X_N}{\partial t\partial x} - \mathrm{H}(\tau)\frac{\partial X_N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Delta\Phi_N + v_x X_N.$$

Теперь мы имеем неоднородное уравнение для $\frac{\partial X_N}{\partial x}$. Оценки для него можно получить аналогично, как для уравнения (4.1). Похожим образом возникают оценки для производных $\frac{\partial X_N}{\partial t}$, а также для произведений $X_N x^l$. На этом будем считать теорему доказанной.

§5. Асимптотическое поведение решения при больших временах

В старшем порядке построенное нами решение при $\varepsilon \to 0$ имеет вид

$$\Phi(x,t) \cong \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty dk\exp(ik^2t)(\psi_1(x,k,\tau),\psi_2(x,k,\tau)) \tag{5.1}$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \begin{pmatrix} \overline{\psi_1(y,k,0)} \\ \overline{\psi_2(y,k,0)} \end{pmatrix} \Phi_0(y).$$

Легко видеть, что при $t \gg 1$ внешний интеграл, стоящий в правой части содержит большой параметр и, следовательно, асимптотика его может быть вычислена с помощью метода стационарной фазы. Основной вклад дают точки стационарной фазы и граница промежутка интегрирования.

Начнем с анализа вклада точек стационарной фазы. Хорошо известно, что при больших временах решение нестационарного уравнения Шредингера в основном сосредоточено в области где $|x|$ порядка t. Поэтому будем считать, что x велико. Если $x > 0$, то функции $\psi_{1,2}(x,k,\tau)$ в интеграле (5.1)можно заменить их асимптотиками

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty dk\exp(ik^2t)(\exp(ikx)/a(k,\tau),\exp(-ikx)-\exp(ikx)\overline{b(k,\tau)}/a(k,\tau))$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \begin{pmatrix} \overline{\psi_1(y,k,0)} \\ \overline{\psi_2(y,k,0)} \end{pmatrix} \Phi_0(y). \tag{5.2}$$

Стационарная точка возникнет только у тех слагаемых, которые содержат экспоненту $\exp(ik^2t)\exp(-ikx)$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} dk \exp(ik^2t)(0, \exp(-ikx)) \times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \begin{pmatrix} \overline{\psi_1(y,k,0)} \\ \overline{\psi_2(y,k,0)} \end{pmatrix} \Phi_0(y) \tag{5.3}$$

$$\cong \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi t}} \exp(-ix^2/(4t)) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \overline{\psi_2(y, x/(2t), 0)} \Phi_0(y).$$

Аналогичный вклад для больших отрицательных x

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} dk \exp(ik^2t)(\exp(ikx), 0) \times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \begin{pmatrix} \overline{\psi_1(y,k,0)} \\ \overline{\psi_2(y,k,0)} \end{pmatrix} \Phi_0(y) \tag{5.4}$$

$$\cong \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi t}} \exp(ix^2/(4t)) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \overline{\psi_1(y, -x/(2t), 0)} \Phi_0(y).$$

Сумма двух вкладов (5.3) и (5.4) и дает старший порядок асимптотики по времени для решения нестационарного уравнения Шредингера

$$\Phi(x,t) \cong \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} dk \exp(ik^2t)(\exp(ikx), \exp(-ikx))$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \begin{pmatrix} \overline{\psi_1(y,k,0)} \\ \overline{\psi_2(y,k,0)} \end{pmatrix} \Phi_0(y).$$

Легко видеть, что полученное выражение зависит только от состояния оператора в начальный момент времени и не зависит от дальнейшей динамики. Этот результат естественно согласуется с результатами, полученными из адиабатической теоремы теории рассеяния, см. [1].

Теперь посмотрим на вклад от границы промежутка интегрирования при $k = 0$. По-прежнему будем считать, что $|x|$ велико. Тогда вновь можно использовать асимптотику для собственных функций. Пусть $x > 0$. Перепишем формулу (5.2) в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dk(\exp(ik^2t)\exp(ikx)R_1(k,\tau)+\exp(ik^2t)\exp(-ikx)R_2(k,\tau)) \quad (5.5)$$

Здесь

$$R_1(k,\tau) = \frac{1}{a(k,\tau)}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\overline{\psi_1(y,k,0)}\Phi_0(y) - \frac{\overline{b(k,\tau)}}{a(k,\tau)}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\overline{\psi_2(y,k,0)}\Phi_0(y),$$

$$R_2(k,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\overline{\psi_2(y,k,0)}\Phi_0(y).$$

Интегрируя по частям в интеграле (5.5)(т.е. интегрируя быстро осциллирующую экспоненту $\exp(ik^2t)\exp(\pm ikx)$ и дифференцируя амплитуду $R_{1,2}$) можно получить асимптотическое разложение вида

$$\frac{-1}{2\pi ix}(R_1(0,\tau) - R_2(0,\tau)) + \sum_{l=2}^{\infty} r_l(\tau)x^{-l}$$

с некоторыми коэффициентами r_l. Видно, что полученный вклад при x порядка t имеет порядок $O(1/t)$ и меньше, чем вклады от стационарных точек.

Аналогично можно вычислить вклад от точки $k = 0$ при больших отрицательных x.

Замечание 5.1. Таким образом, в старшем порядке асимптотика полностью определяется оператором в начальный момент времени, но степенные поправки чувствуют динамику оператора Шредингера. Для оператора Дирака, как видно из работы [4], поправки имели сверхстепенной характер. Наличие степенных поправок для оператора Шредингера связано с краем непрерывного спектра данного оператора в нуле.

Список литературы

1. J. D. Dollard, *Adiabatic switching in the Shroedinger theory of scattering.* — J. Math. Phys.**7** (1966), 802–810.
2. G. Nenciu,. *On the adiabatic limit for Dirac particles in external fields.*— Com. Math. Phys.**76** (1980), 117–128.

3. A. Martinez, Sh. Nakamura, *Adiabatic limit and scattering.* — C. R. Acad. Sci. Paris ser I Math.**318**, No. 12 (1994), 1153–1158.
4. В. В. Суханов, *Асимптотическое поведение решений нестационарного уравнения Дирака с медленно зависящим от времени потенциалом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ. (2019), 189–198.
5. L. D. Faddeev, *Inverse problem of the quantum scattering theory.* — Uspekhi Mat. Nauk **14**, No. 4 (1959), 57–119.

Sukhanov V. V. Asymptotic behavior of solutions of the nonstationary Schrodinger equation with a slowly time dependent potential.

The asymptotic behavior of solutions of the Cauchy problem for the nonstationary Schrodinger equation with a rapidly decreasing potential is studied. The potential is slowly depending on time. The construction of asymptotic solutions is based on the spectral expansion of the solution at a given time. It do not use the adiabatic theorem of scattering theory. In the highest order (as in the approach associated with the adiabatic theorem of scattering theory) the solution does not depend on the dynamics of the potential and is completely determined by the value of the potential at the zero moment of time. We calculate corrections to the leading term of the solution associated with the boundary of the continuous spectrum. These corrections take into account the time dependence of the operator.

С.-Петербургский
государственный университет НИИФ
Петродворец, Ульяновская ул.1,
198904, Ст.-Петербург, Россия
E-mail: vvsukhanov@mail.ru

Поступило 22 октября 2020 г.