Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 493, 2020 г.

М. М. Попов

О СОГЛАСОВАНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫЙ АСИМПТОТИКИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОГО ТИПА С ВОЛНОВЫМ ПОЛЕМ ИХ ИСТОЧНИКА

§1. Введение

Статья посвящена развитию новой концепции поверхностных волн, распространяющихся вдоль гладких, строго выпуклых поверхностей, вложенных в $\mathbb{R}^3$. Эта концепция была анонсирована в [1] и подробно изложена в [2] на примере волн шепчущей галереи. Предлагаемая теория базируется на рассмотрении геодезического потока на данной поверхности Σ, вдоль которого и скользит поверхностная волна. Поскольку Σ вложена в $\mathbb{R}^3$, поток геодезических можно описывать вектор-функцией $\vec{r} = \vec{r}(s, \gamma)$, где $\vec{r}$ радиус-вектор в $\mathbb{R}^3$, s – длина дуги геодезическй и γ – параметр, фиксирующий геодезическую в потоке. Основная идея состоит в том, что для каждой геодезической строится асимптотическое решение уравнения Гельмгольца, сосредоточенное, или локализованное, в её трубчатый окрестности и не имеющее сингулярности на каустиках, через которые эта геодезическая проходит. Полное волновое поле поверхностной волны представляется суперпозицией, или точнее интегралам по γ, этих решений.

В данной статье, являющейся продолжением работы [2], рассматривается задача согласования асимптотики волны шепчущей галереи, в виде интеграла по локализованным решениям, с волновым полем источника, возбуждающим эту волну. Процесс согласования позволяет фиксировать свободные параметры, входящие в интеграл.

Отметим, что задача согласования интеграла по гауссовым пучкам с точечным источником волнового поля впервые была решена и подробно описана в работе автора [3].

Ключевые слова: волны шепчущей галереи, коротковолновая асимптотика, геодезические потоки, уравнение эйконала.

Работа поддержана грантом РФФИ No. 20-01-00627А..

§2. Базовые формулы

Приведем базовые формулы из статьи [2], которые потребуются нам в дальнейшем. Локальные координаты в окрестности геодезической строятся следующим образом. Репер образован тремя единичными векторами: вектором касательной $\vec{t}(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds}$, вектором главной нормали $\vec{n}(s)$, и вектором бинормали $\vec{e}(s) = [\vec{t}(s), \vec{n}(s)]$. Афинная связность описывается уравнениями Френе.

Локальные координаты s, q, n вводятся равенством

$$\vec{R}(M) = \vec{r}(s) + q\vec{e}(s) + n\vec{n}(s) \tag{1}$$

в окрестности каждой геодезической из потока $\vec{r}(s, \gamma)$. Здесь $\vec{R}(M)$ радиус-вектор точки M, параметр γ опускаем далее в формулах для упрощения обозначений. Формула (1) порождает риманову метрику вблизи $\vec{r}(s)$.

Мы полагаем, что волновое поле U шепчущей галереи удовлетворяет уравнению Гельмгольца $(\Delta + \boldsymbol{k}^2)U = 0$ в координатах s, q, n. Волновое число $\boldsymbol{k}$ считается большим параметром задачи. На поверхности Σ поле U удовлетворяет условию Дирихле, все дальнейшие построения легко переносятся на краевое условие Неймана.

Отыскивается асимптотическое (при $\boldsymbol{k} \to \infty$) решение, сосредоточенное в окрестности геодезической, т.е. экспоненциально убывающее с ростом $|q|$. При этом условии уравнение Σ в окрестности геодезической можно описать в виде

$$n = \sigma(s, q) \equiv \frac{1}{2}\varkappa(s)q^2 + O\left(q^3\right), \tag{2}$$

где $\varkappa(s) \geqslant \mathrm{const} > 0$ есть кривизна нормального сечения Σ в точке $\vec{r}(s)$, ортогонального $\vec{t}(s)$.

Масштабированные координаты ξ и ν в этой окрестности $\vec{r}(s)$ вводятся следующим образом

$$\xi = \sqrt{\boldsymbol{k}}q, \quad \nu = \eta(s)\boldsymbol{k}^{2/3}(n - \sigma(s, q)), \tag{3}$$

где $\eta(s)$ остается пока неопределённой функцией.

Анзац искомого локализованного решения берётся в виде

$$U = \exp\left\{i\boldsymbol{k}s + i\boldsymbol{k}^{1/3}h(s)\right\} V(s, \xi(q), \nu(n, s, \xi(q))), \tag{4}$$

причем функция $h(s)$ также подлежит определению, а V строится в виде ряда по степеням $\boldsymbol{k}^{-1/6}$

$$V = V_0 + \boldsymbol{k}^{-1/6} V_1 + \boldsymbol{k}^{-1/3} V_2 + O(\boldsymbol{k}^{-1/2}). \tag{5}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением двух первых членов в разложении (5) и приведем их явные фопмулы, см. [2]

$$V_0 = \alpha(s)\Psi(s,\xi) v\left(\nu - \zeta_p\right), \tag{6}$$

$$V_1 = -i\alpha(s)\eta^{-1}(s)\Psi(s,\xi)T(s)\xi\nu v\left(\nu - \zeta_p\right). \tag{7}$$

где $\eta(s) = \left(2K(s)\right)^{1/3}$, $\alpha(s) = \sqrt{\eta(s)}$, $h(s) = -\frac{1}{2}\zeta_p \int_0^s \eta^2(s)\, ds$.

Через $v\left(\nu - \zeta_p\right)$ обозначена вещественная функция Эйри (в определении В.А. Фока [4]), экспоненциально убывающая при $\nu \to +\infty$, $-\zeta_p$ есть её корень с номером p. Таким образом, на поверхности Σ в окрестности геодезической $\vec{r}(s)$ выполняется условие Дирихле $V_0|_{\nu=0} = 0$, $V_1|_{\nu=0} = 0$. Функция $\Psi(s,\xi)$ обеспечивает локализацию V_0 и V_1 по координате $\xi = \sqrt{\boldsymbol{k}}q$ и имеет вид

$$\Psi(s,\xi) = B(s) \exp\left(\frac{i}{2}\frac{P(s)}{Q(s)}\xi^2\right), \quad B(s) = \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{Q(s)}}. \tag{8}$$

Комплекснозначные функции $Q(s)$ и $P(s)$ являются решениями системы уравнений в вариациях функционала Ферма на Σ

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds}Q(s) = P(s), \\ &\frac{d}{ds}P(s) = \left(-\varkappa(s)K(s) + T(s)^2\right)Q(s), \end{aligned} \tag{9}$$

с начальными условиями

$$Q(0) = 1 + i0, \quad P(0) = 0 + i1. \tag{10}$$

Обе эти функции не обращаются в нуль при всех возможных значениях длины дуги s и при этом $\operatorname{Im}\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{|Q(s)|^2} > 0$, так что $|\Psi(s,\xi)| = |B(s)| \exp\left(-\frac{\xi^2}{2|Q(s)|^2}\right)$.

В дальнейших построениях функция V в (4) берётся в виде $V = V_0 + \boldsymbol{k}^{-1/6}V_1$ и базовым асимптотическим решением, сосредоточенным в окрестности геодезической, будет следующее выражение

$$U^{(2)} = \exp\left\{ i\boldsymbol{k}s - \frac{i\boldsymbol{k}^{1/3}}{2}\zeta_p \int\limits_0^s \eta^2(s)ds \right\}$$

$$\times\, \alpha(s)\Psi(s,\xi)v\left(\nu - \zeta_p\right)\left[1 - \frac{i}{\boldsymbol{k}^{1/6}}\eta^{-1}(s)\xi\nu T(s)\right]. \quad (11)$$

§3. Глобальная асимптотика волны шепчущей галереи на Σ

Исходный геодезические поток $r = \vec{r}(s,\gamma)$ порождается источником, возбуждающим волну шепчущий галереи. Для каждой геодезической в потоке строится сосредоточенное решение (11) в своих локальных координатах s, ξ, ν, так что правые части в формуле (11) приобретают зависимость от параметра γ, фиксирующего геодезическую, т.е. $U^{(2)} = U^{(2)}(s,\xi,\nu;\gamma)$.

В качестве глобальной асимптотики волны $W^{(2)}$ предлагается суперпозиция локализованных решений

$$W^{(2)} = \int d\gamma\, U^{(2)}(s,\xi,\nu;\gamma), \quad (12)$$

которая не имеет сингулярностей на каустиках и естественным образом учитывает кручение геодезических на Σ. Препятствием к использованию интеграла (12) остаётся наличие точек уплощения на геодезических, в которых $\eta(s)$ обращается в нуль. Волны шепчущей галереи разрушаются в окрестности этих точек.

§4. Задача согласования асимптотик

Следует подчеркнуть, что формулы для сосредоточенных решений содержат произвол. Так начальные условия (10) для функций $Q(s)$ и $P(s)$, которые обеспечивают свойства функции $\Psi(s,\xi)$, не являются единственно возможными. Кроме того, $B(s)$ в (10) содержит произвольную константу. Поэтому возникает задача согласования интеграла (12) с полем источника. Такое согласование осуществляется в малой окрестности источника, где геодезический поток оказывается регулярным, т.е. свободным от каустик, и где интеграл по сосредоточенным решением и волновое поле источника удаётся упростить путем вычисления асимптотики при $\boldsymbol{k} \to \infty$, см., например [3].

Далее в статье исследуется интеграл (12) в области регулярности поля геодезических и вычисляется, какие величины подлежат определению путем сравнением с полем источника.

Интеграл $W^{(2)}$ по локализованным решениям $U^{(2)}$ содержит быстро осциллирующую экспоненту $\exp\left(i\boldsymbol{k}s + \frac{i\boldsymbol{k}}{2}\frac{P(s)}{Q(s)}q^2\right)$. Поэтому можно использовать метод стацфазы для получения асимптотики $W^{(2)}$ при $\boldsymbol{k}\to\infty$.

Для каждой точки наблюдения R_* в области регулярности поля геодезических существует единственная стационарная точка. Она соответствует той геодезической $\gamma=\gamma_*$, которая проходит в точности через R_* при $s=s_*$, в силу того, что $\Psi(s,\xi)$ экспоненциально убывает с ростом $|q|$.

Таким образом возникает необходимость разложения $U^{(2)}$ по степеням $\gamma-\gamma_*$.

§5. Эйконал $\tau(s,q)$ геодезического потока $\vec{r}(s,\gamma)$ на Σ в окрестности геодезической $\gamma=\gamma_*$

Длина дуги s и параметр γ являются так называемыми лучевыми координатами геодезического потока. В рассматриваемой области его регулярности между s, γ и координатами s, q на Σ есть взаимно однозначное соответствие и поэтому существует эйконал в виде гладкой функции $\tau(s,q)$ в окрестности каждой геодезической.

Метрика на Σ в координатах s, q вытекает из равенства (1) после замены длины нормали n по формуле (2). При этом для квадрата элементы длины $dS^2=\left(d\vec{R}_M, d\vec{R}_M\right)$ получаем следующее выражение на Σ

$$dS^2 = g_{ss}ds^2 + 2g_{sq}dsdq + g_{qq}dq^2,$$

где элементы метрического тензора g, с точностью до квадратичных членов по координате q включительно, имеют вид

$$\begin{aligned} g_{ss} &= 1 - \varkappa K q^2 + T^2q^2 + O(q^3),\\ g_{sq} &= -\frac{1}{2}\varkappa T q^2 + O(q^3), \\ g_{qq} &= 1 + \varkappa^2 q^2 + O(q^5). \end{aligned} \tag{13}$$

Указанная точность расчетов достаточна для вычисления главного члена асимптотики интеграла (12) при $\boldsymbol{k}\to\infty$ по методу стацфазы.

Далее мы используем лучевой анзац $A\exp(i\boldsymbol{k}\tau)$ для уравнения Гельмгольца на поверхности Σ. Уравнение эйконала возникает из вторых производных в уравнении Гельмгольца, содержащих множителем старшую степень большего параметра $\boldsymbol{k}^2$:

$$-g_{qq}\left(\frac{\partial\tau}{\partial s}\right)^2+2g_{sq}\frac{\partial\tau}{\partial s}\frac{\partial\tau}{\partial q}-g_{ss}\left(\frac{\partial\tau}{\partial q}\right)^2+\det g=0. \tag{14}$$

Решение уравнения (14) отыскиваем в виде ряда

$$\tau(s,q)=s+\tau_1(s)q+\tau_2(s)q^2+O\left(q^3\right). \tag{15}$$

Подстановка (15) в (14) даёт $\tau_1(s)=0$ и уравнение Риккати для $\tau_2(s)$:

$$2\frac{\partial\tau_2}{\partial s}-4\tau_2^2+\varkappa(s)K(s)-T^2(s)=0. \tag{16}$$

Положим далее $\tau_2(s)=\frac{1}{2}\frac{L(s)}{M(s)}$, тогда уравнение Риккати линеаризуется и для введённых функций получаем линейную каноническую систему уравнений (9), т.е. уравнения в вариациях. На этот раз нам требуются вещественные решения этой системы, которые описывают геометрическое расхождение потока геодезических и эйконал $\tau(s,q)$ на выделенной геодезической. По этому поводу см. подробности в [5–7].

При этом функция $M(s)$ имеет смысл геометрического расхождения вдоль рассматриваемый геодезической. Обе функции $L(s)$ и $M(s)$ не имеют особенностей и $M(s)$ не обращается в нуль в области регулярности потока геодезических, причём их можно выбрать так, что $M(s)$ остаётся положительный в этой области.

§6. Асимптотика интеграла $W^{(2)}$ при $\boldsymbol{k}\to\infty$ в области регулярности потока геодезических

Из изложенного построения эйконала $\tau(s,q)$ следует, что для волнового фронта $\tau(s,q)=\mathrm{const}$, пересекающего геодезическую $\gamma=\gamma_*$ в точке наблюдения $s=s_*$ имеет место следующая формула

$$s_*-\frac{1}{2}\frac{L\left(s_*\right)}{M\left(s_*\right)}q^2+O\left(q^3\right)=s. \tag{17}$$

Напомним, что для вычисления интересующего нас главного члена асимптотики достаточно в (17) сохранения квадратичного члена по координате q.

Быстрые осциляции в $W^{(2)}$ порождаются двумя экспонентами $\exp(\boldsymbol{ik}s)$ и $\exp\left(\frac{\boldsymbol{ik}}{2}\frac{P(s)}{Q(s)}q^2\right)$. В окрестностях стационарной точки этот множитель принимает вид $\exp\left\{\boldsymbol{ik}\left(s_* + \frac{1}{2}\Lambda(s_*)\, q^2 + O\left(q^3\right)\right)\right\}$, где

$$\Lambda(s_*) = \frac{P(s_*)}{Q(s_*)} - \frac{L(s_*)}{M(s_*)} = \frac{P(0)M(0) - Q(0)L(0)}{Q(s_*)\, M(s_*)}, \tag{18}$$

в силу свойства решений линейной канонической системы (9).

В работе [7], содержащей решение задачи о вычислении геометрического расхождения лучевой трубки в окрестности центрального луча, показано, что для локальной координаты q справедливо следующее разложение по степеням лучевого параметра $\gamma - \gamma_*$

$$q(s_*, \gamma) = M(s_*)(\gamma - \gamma_*) + O(\gamma - \gamma_*)^2, \tag{19}$$

где $M(s_*)$ есть геометрическое расхождение.

Остановимся на вычислении асимптотики интеграла $W^{(2)}$ (12) при $\boldsymbol{k} \to \infty$, когда в выражении (11) для $U^{(2)}$ сохранен лишь главный член разложения (5)

$$U_0 = \exp\left\{\boldsymbol{ik}s - \frac{\boldsymbol{ik}^{1/3}}{2}\zeta_p \int\limits_0^s \eta^2(s)ds\right\}\alpha(s)\Psi(s,\xi)v(\nu - \zeta_p).$$

Вынося медленно меняющиеся функции из под знака интеграла в стационарной точке $\gamma = \gamma_*$, $s = s_*$ и, выделяя интеграл от быстро осцилирующих функций, приходим к следующему результату

$$\int d\gamma\, U_0(s,\xi,\nu;\gamma) = \exp\left\{\boldsymbol{ik}s_* - \boldsymbol{ik}^{1/3}\frac{1}{2}\zeta_p \int\limits_0^{s_*} \eta^2(s)ds\right\} \times \alpha(s_*)\, B(s_*)\, v(\nu - \zeta_p) \cdot I \tag{20}$$

где интеграл I имеет вид

$$I = \int\limits_{\gamma_*-\delta}^{\gamma_*+\delta} \exp\left\{\frac{\boldsymbol{ik}}{2}\Lambda(s_*)\, M^2(s_*)(\gamma - \gamma_*)^2\right\} d\gamma. \tag{21}$$

Параметр $\delta > 0$ выделяет существенную область интегрирования. Стандартные (в методе стацфазы) вычисления интеграла (21) дают следующий результат:

$$I = \sqrt{\frac{2\pi}{\boldsymbol{k}}} e^{i\frac{\pi}{4}} \left(P(0)M(0) - Q(0)L(0)\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{Q\,(s_*)}{M(s_*)}}. \tag{22}$$

Постоянную интегрирования const в формуле (8) для $B(s)$ фиксируем условием const $= (P(0)M(0) - Q(0)L(0))^{1/2}$, устраняя произвол в формуле для $\Psi(s,\xi)$.

Обратимся ко второму члену V_1 асимптотики сосредоточенных решений (7), имеющему порядок $\boldsymbol{k}^{-1/6}$. Он является нечетной функцией q и, следовательно, аргумента $(\gamma - \gamma_*)$. Поэтому вклад его в асимптотику $W^{(2)}$ в стацточке обращается в нуль.

Окончательная формула для $W^{(2)}$ при $\boldsymbol{k} \to \infty$ приобретает следующий вид

$$W^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{\boldsymbol{k}}} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\alpha\,(s_*)}{\sqrt{M(s_*)}} \exp\left(i\boldsymbol{k}s_* - i\boldsymbol{k}^{1/3}\frac{1}{2}\zeta_p \int\limits_0^{s_*} \eta^2\,(s)\,ds \right) v(\nu - \zeta_p). \tag{23}$$

§7. Заключение

В формуле (23) для $W^{(2)}$ неопределенными остаются две величины: геометрическое расхождение $M(s)$ вдоль геодезической $\gamma = \gamma_*$, в окрестности которой локализовано решение, и дифракционной коэффициент, появляющийся как постоянная интегрирования уравнения переноса. Эти величины определяются источником, возбуждающим волну шепчущей галереи и, естественно, порождающим геодезический поток. Они обе зависят от вида источника — точечный источник или начальный волновой фронт, а также от положения источника относительно поверхности Σ. Таким образом для завершения решения задачи согласования асимптотик требуется исследовать волновое поле источника при $\boldsymbol{k} \to \infty$. По этому поводу смотри работу [3], где подобная задача решена для случая интеграла по гауссовым пучкам и точечного источника. В заключение заметим, что структурно правая часть в (23) совпадает с главным членом асимптотики шепчущей галереи в двумерном случае, см. [8]. Однако, в рассматриваемой нами трехмерной задаче все построения учитывают еще и кручение геодезических. Следующий за главным, член асимптотики, в [8] и в (23), имеет порядок $O(\boldsymbol{k}^{-1/3})$ и всё асимптотическое разложение в [8] и (23) выполняется по степеням $\boldsymbol{k}^{-1/3}$, а не $\boldsymbol{k}^{-1/6}$, как в случае интеграла по сосредоточенным решениям, см. (5). Обратим внимание также, что в тех областях поверхности Σ, где поток геодезических регулярен, поле шепчущей галереи можно описывать более простой формулой типа (23) вместо интеграла по сосредоточенным решениям. Для этого к этому интегралу нужно применить метод стацфазы, однако, при этом потребуется вычислять индекс Морса для геодезических, попавших в зону регулярности потока.

Список литературы

1. M. M. Popov, *On theory of surface wave propagation on smooth strictly convex surfaces embedded in* $\mathbb{R}^3$, Proceedings of the International Conference Day on Diffraction 2019, pp. 159–162.
2. М. М. Попов, *Новая концепция поверхностных волн интерференционного типа для гладких строго выпуклых поверхностей, вложенных в* $\mathbb{R}^3$. — Зап. научн. сем. ПОМИ **493** (2020), с. 301–313.
3. М. М. Попов, *Новый метод расчета волновых полей в высокочастотном приближении.* — Зап. научн. сем. ЛОМИ **104**, (1981), 195–216.
4. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн*, Изд-во "Советское радио," М., 1970.
5. М. М. Попов, *Об одном методе вычисления геометрического расхождения в неоднородной среде, содержащей границы раздела.* — Докл. АН СССР **237(5)** (1977), 1059–1062.
6. М. М. Попов, Л. Г. Тюриков *О двух подходах к вычислению геометрического расхождения в неоднородной изотропной среде*, "Наука", Ленинград (1981), Сб. 20, 61–68.
7. M. M. Popov, *Ray theory and Gaussian beam method for geophysicists*, EDUFBA, Salvador-Bahia, 2002.
8. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн: Метод эталонных задач*, "Ленинградский университет", Ленинград, 1972.

Popov M. M. On matching of the integral asymptotics for a surface wave of interference type with the wavefield of the source.

The paper is devoted to development of new conception of surface waves propagation along smooth surfaces in $\mathbb{R}^3$. Matching of integral asymptotics with the source of surface waves provides single-valued form of the integral of localized, in a vicinity of geodesic lines, solutions of the wave equation.

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
192288, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д.27
E-mail: mpopov@pdmi.ras.ru

Поступило 10 октября 2020 г.