Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 493, 2020 г.

М. М. Попов

НОВАЯ КОНЦЕПЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОГО ТИПА ДЛЯ ГЛАДКИХ СТРОГО ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ВЛОЖЕННЫХ В $\mathbb{R}^3$

§1. Введение

Работа посвящена поверхностным волнам типа шепчущей галереи и волнам соскальзывания, которые возникают в задачах дифракции и распространения коротких волн, т.е. когда геометрические характеристики поверхностей мало изменяются на протяжении длины волны. В этой статье мы подробно рассматриваем волны шепчущей галереи, котораые могут распространяться вдоль вогнутой части граничных поверхностей. Волны же соскальзывания, возникающие в задачах дифракции на строго выпуклых телах в окрестности границы свет-тень, будут рассмотрены позднее. Они наоборот распространяются вдоль выпуклой части граничной поверхности.

Математической теории интерференционных поверхностных волн в двумерном случае, когда граница области образована лежащей в плоскости гладкой выпуклой кривой, посвящено много работ, см., например, [1–3] и библиографию в них.

Однако, процесс распространения этих волн в трехмерном случае, когда они распространяются вдоль гладкой поверхности, оказывается более сложным. Действительно, поверхностные волны скользят по поверхности вдоль геодезических линий, которые, вообще говоря, образуют многочисленные каустики и, следовательно, возникает проблема с фокусировкой волнового поля в окрестности каустик. Кроме того, геодезические кривые обладают кручением и поэтому не лежат в одной плоскости.

Предлагаемая в работе теория позволяет преодолеть эти трудности трехмерных задач. Вкратце теория может быть описана следующим

Ключевые слова: поверхностные волны, коротковолновая асимптотика, волны шепчущей галереи, геодезические потоки.

Работа была поддержана грантом РФФИ No. 20-01-00627A.

образом. Обозначим через Σ гладкую выпуклую поверхность в $\mathbb{R}^3$. Исходным пунктом является поток геодезических кривых на Σ, порождаемый рассматриваемой поверхностный волной. Поток геодезических можно описать вектор-функцей $\vec{r}(s,\gamma)$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор в $\mathbb{R}^3$, s – длина дуги геодезической, и γ – параметр, фиксирующий геодезическую в потоке.

В окрестности каждый геодезической вводится локальная система координат. В ней строится асимптотическое решение уравнения Гельмгольца, сосредоточенное в трубчатой окрестности этой геодезической, не имеющее сингулярностей на каустиках, через которые эта геодезическая проходит. Полное волновое поле поверхностной волны представляется суперпозицией (интеграл по γ) этих сосредоточенных решений. В этом пункте предлагаемый подход аналогичен известному методу суммирования гауссовых пучков, см. [4, 6].

Препятствием к использованию излагаемого метода является наличие точек распрямления на геодезических линиях, где происходит разрушение поверхностных волн, см. по этому поводу [5].

§2. Локальные координаты в окрестности геодезической кривой

Поскольку поверхность Σ вложена в $\mathbb{R}^3$, каждая геодезическая на ней может рассматриваться как гладкая кривая в трехмерном эвклидовом пространстве. Выделим геодезическую $\vec{r}(s)$ из потока $\vec{r}(s,\gamma)$ при фиксированном значении параметра γ (в дальнейшем опустим γ с целью упрощения обозначений). В окрестности неё введём локальные координаты следующим образом.

В качестве репера возьмем три единичных вектора: $\vec{t}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}$ – вектор касательной, $\vec{n}(s)$ – вектор главной нормали и вектор бинормали $\vec{e}(s) = [\vec{t}(s), \vec{n}(s)]$, где $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ означает векторное произведение. Вектор $\vec{n}(s)$ считаем направленным в ту сторону Σ, где распространяется поверхностная волна шепчущей галереи, т.е. в сторону вогнутой части Σ.

Аффинная связность описывается уравнениями Френе

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{t}}{ds} &= K(s)\vec{n},\\
\frac{d\vec{n}}{ds} &= -K(s)\vec{t} + T(s)\vec{e},\\
\frac{d\vec{e}}{ds} &= -T(s)\vec{n},
\end{aligned} \tag{1}$$

где $K(s)$ – кривизна и T(s) – кручение геодезической $\vec{r}(s)$.

Локальные координаты s, q, n в окрестности этой геодезической вводятся формулой

$$\vec{R}(M) = \vec{r}(s) + q\vec{e}(s) + n\vec{n}(s) \tag{2}$$

так что её уравнение приобретает вид $q = 0$, $n = 0$ тождественно по s. Из формул (1) и (2) получаем следующее выражение для метрического тензора g_{lm}:

$$dS^2 = \left(d\vec{R}(M), d\vec{R}(M)\right) = g_{lm}d\zeta^l d\zeta^m, \quad l, m = 1, 2, 3 \tag{3}$$

$$\zeta^1 = s, \quad \zeta^2 = q, \quad \zeta^3 = n \tag{4}$$

$$g_{lm} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & 1 & 0 \\ g_{13} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
&g_{11} = (1 - nK)^2 + \left(q^2 + n^2\right) T^2,\\
&g_{12} = nT,\\
&g_{13} = -qT,
\end{aligned} \tag{6}$$

Вычисления дают для контравариантного тензора G^{lm} следующую формулу

$$G^{lm} = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} 1 & -g_{12} & -g_{13} \\ -g_{12} & g_{11} - g_{13}^2 & g_{12}g_{13} \\ -g_{13} & g_{12}g_{13} & g_{11} - g_{12}^2 \end{pmatrix},$$
$$g = (1 - nK(s))^2.$$

Во вспомогательных переменных $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ уравнение Гельмгольца принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\zeta^l}\left(\sqrt{g}G^{lm}\frac{\partial U}{\partial\zeta^m}\right) + \boldsymbol{k}^2 U = 0, \tag{7}$$

В дальнейшем волновое число $\boldsymbol{k}$ будет считаться большим параметрам задачи.

§3. О постановке рассматриваемой задачи

В данной статье мы будем рассматривать поверхностные волны типа шепчущей галереи, которые распространяются вдоль строго вогнутой поверхности Σ. Хорошо известно, см., например [5], что эти волны разрушаются в окрестности точек уплощения границ, поэтому мы будем предполагать, что кривизны всех геодезических из потока $\vec{r}(s,\gamma)$ строго положительны $K(s) \geq \text{const} > 0$ при всех рассматриваемых значениях длины дуги s и параметра γ.

Мы полагаем, что волновое поле удовлетворяет уравнению Гельмгольца (7) и, для определенности, краевому условию Дирихле на поверхности Σ. Все построения легко переносятся на краевое условие Неймана. Ближайшая цель построить формальное асимптотическое (при $\boldsymbol{k} \to \infty$) решение задачи, локализованное в трубчатой окрестности геодезической $\vec{r}(s)$, т.е. быстро убывающее при $|q| \to \infty$ и при всех s.

В этой окрестности уравнение границы Σ можно представить в виде $n = \sigma(s,q)$, где $\sigma(s,q)$ также гладкая функция своих аргументов. Действительно, обратимся к нормальному расслоению Σ с базой $\vec{r}(s)$. В рассматриваемом случае нормальное сечение Σ в каждой точке s плоскостью, ортогональной к вектору $\vec{t}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}$, представляет собой в окрестности геодезической $\vec{r}(s)$ вогнутую, в направлении вектора главной нормали $\vec{n}$, гладкую кривую. Функцию $\sigma(s,q)$ в трубчатой окрестности геодезической можно рассматривать как объединение нормальных сечений. При этом её следует разложить в ряд по степеням q. В статье мы ограничимся построением двух первых членов асимптотики локализованных решений. Для этого достаточно взять лишь главный член тейлоровского разложения $\sigma(s,q)$ по степеням q. Таким образом, в наших построениях уравнение поверхности Σ вблизи $\vec{r}(s)$ берётся в виде

$$n = \sigma(s,q) \equiv \frac{1}{2}\varkappa(s)q^2 + O\left(q^3\right). \tag{8}$$

Здесь $\varkappa(s)$ есть кривизна нормального сечения в точке s на $\vec{r}(s)$ и должна быть положительной $\varkappa \geq \text{const} > 0$.

§4. Анзац для локализованных асимптотических решений

При построении искомого анзаца используется теория шепчущей галереи в двумерном случае. Действительно, мы сохраняем масштабные множители для координат s и n, а именно, предполагается, что $s = O(1)$, $\boldsymbol{k}^{2/3}n = O(1)$ при $\boldsymbol{k} \to \infty$. Масштабный множитель для трансверсальный координаты q подсказан техникой гауссовых пучков и имеет вид $\boldsymbol{k}^{1/2}q = O(1)$. Растянутые координаты ξ и ν в окрестности геодезической $\vec{r}(s)$ вводятся следующими формулами

$$\xi = \sqrt{\boldsymbol{k}}q, \tag{9}$$

$$\nu = \eta(s)\boldsymbol{k}^{2/3}(n - \sigma(s,q)), \tag{10}$$

$$n = \frac{\nu}{\boldsymbol{k}^{2/3}\eta(s)} + \sigma(s,q), \tag{11}$$

где $\eta(s)$ остаётся пока неопределенной функцией длины дуги s. Обратим внимание, что растянутая нормаль определяется усложненный формулой (10) так, что $\nu = 0$ соответствует $n = \sigma(s,q)$, т.е. уравнению Σ вблизи геодезической $\vec{r}(s)$. Краевое условие на Σ поэтому должно выполняться при $\nu = 0$.

Быстро осциллирующий множитель сохраняется как и в двумерной задаче $\exp\left\{iks + i\omega^{1/3}h(s)\right\}$, где $h(s)$ подлежит определению.

Окончательно анзац берётся в следующем виде

$$U = \exp\left\{i\boldsymbol{k}s + i\boldsymbol{k}^{1/3}h(s)\right\} V(s, \xi(q), \nu(n, s, \xi(q))). \tag{12}$$

Дальнейшие построения связанны с подстановкой формулы (12) в уравнение Гельмгольца (7) в координатах s, q, n и разложением полученного выражения по степеням параметра $\boldsymbol{k}^{-1/6}$.

Мы опустим подробное изложение этих громоздких вычислений и остановимся лишь на ключевых моментах. Подчеркнем, что коэффициенты при одинаковых степенях большого параметра $\boldsymbol{k}$ дают асимптотическое представление оператора Гельмгольца в рассматриваемой задаче. Они позволяют получить рекуррентную систему уравнений для построения асимптотического разложения сосредоточенных решений.

Старший порядок образуют коэффициенты при $\boldsymbol{k}^{4/3}$. Обозначим их через $\widetilde{L}_0$, тогда

$$\boldsymbol{k}^{4/3}\widetilde{L}_0 V = k^{4/3}\eta^2(s)\left[\frac{\partial^2 V}{\partial\nu^2} - 2K(s)\frac{\nu}{\eta^3(s)}V - 2\frac{h'(s)}{\eta^2(s)}V\right] \tag{13}$$

Далее подберём функции $\eta(s)$ и $h'(s) = dh/ds$ так, чтобы в правой части равенства (13) получился оператор Эйри $L_0 = \frac{\partial^2}{\partial\nu^2} - (\nu - \zeta)$.

Для этого положим

$$\eta(s) = (2K(s))^{1/3}, \quad h(s) = -\frac{1}{2}\zeta\int\limits_0^s \eta^2(s)\,ds, \tag{14}$$

где ζ остаётся пока неопределенный постоянной.

Следующий порядок образует коэффициент при $\boldsymbol{k}^{7/6}$. Обозначим его через $\eta(s)L_1 V$, тогда

$$\boldsymbol{k}^{7/6}\eta(s)L_1 V = \boldsymbol{k}^{7/6}\eta(s)2i\xi T(s)\frac{\partial}{\partial\nu}V. \tag{15}$$

В статье мы ограничиваемся построением двух первых членов асимптотики сосредоточенного решения. Для этого оказывается необходимым рассмотреть уравнение для третьего члена асимптотики, имеющего порядок $\boldsymbol{k}^1$.

Обозначим через $L_2 V$ коэффициенты при $\boldsymbol{k}^1$. В результате вычислений получаем

$$\boldsymbol{k}L_2 V = \boldsymbol{k}\left\{2i\left(\frac{\eta'(s)}{\eta(s)}\nu\frac{\partial}{\partial\nu} + \frac{\partial}{\partial s}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \varkappa K\xi^2\right\}V. \tag{16}$$

Напомним, что производная по s в уравнении Гельмгольца есть полная производная, так что для функции V в равенстве (12) получаем $\frac{dV}{ds} = \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial\nu}\frac{\partial\nu}{\partial s}$ и $\frac{\partial\nu}{\partial s} = \frac{\eta'(s)}{\eta(s)}\nu + O\left(k^{-4/3}\right)$.

После деления всех слагаемых на $\boldsymbol{k}^{4/3}\eta^2(s)$ получаем следующее асимптотическое представление оператора Гельмгольца в рассматриваемой задаче

$$L_0 + \boldsymbol{k}^{-1/6}\eta^{-1}(s)L_1 + \boldsymbol{k}^{-1/3}\eta^{-2}(s)L_2 + \dots. \tag{17}$$

§5. Рекуррентная система уравнений

Асимптотическое разложение искомого решения V ищем в виде

$$V = V_0 + \frac{1}{k^{1/6}}V_1 + \frac{1}{k^{1/3}}V_2 + O(k^{-\frac{1}{2}}). \tag{18}$$

Подставляя равенство (18) в (17) получаем рекуррентную цепочку дифференциальных уравнений

$$L_0 V_0 = 0, \tag{19}$$

$$L_0 V_1 = -\eta^{-1}(s) L_1 V_0, \tag{20}$$

$$L_0 V_2 = -\eta^{-1}(s) L_1 V_1 - \eta^{-2}(s) L_2 V_0, \tag{21}$$

$$\dots$$

В случае условия Дирихле на Σ возникают краевые условия к уравнениям (19)–(21) при $\nu = 0$:

$$V_0|_{\nu=0} = 0; \quad V_1|_{\nu=0} = 0; \quad V_2|_{\nu=0} = 0, . \tag{22}$$

Кроме этого мы отыскиваем решения, быстро убывающие при $\nu \to +\infty$, т.е. заведомо принадлежащие $L_2(0, +\infty)$.

Обратимся далее к уравненим (19)-(21). Первые два из них являются обыкновенными дифференциальными уравнениями по переменной ν.

Решение V_0 однородного уравнения (19) берём в виде

$$V_0 = \alpha(s)\Psi(s,\xi) v\left(\nu - \zeta_p\right), \tag{23}$$

где $v\left(\nu - \zeta_p\right)$ есть вещественная функция Эйри в определении В. А. Фока, а $-\zeta_p$ есть её корень с номером p. Таким образом V_0 удовлетворяет краевому условию (22) и экспоненциально убывает при $\nu \to +\infty$. Независящие от ν функции $\alpha(s)$ и $\Psi(s,\xi)$ играют роль постоянного множителя и остаются на этом шаге неопределёнными.

Решение V_1 ищем в виде произведения $\eta^{-1}(s)\widehat{V}_1$. После подстановки в (20) и сокращения на общий множитель $\eta^{-1}(s)$ получаем, очевидно, равносильное (20) уравнение для $\widehat{V}_1$.

$$L_0 \widehat{V}_1 = -L_1 V_0. \tag{24}$$

Непосредственный подстановкой в (24) проверяется, что решением этого неоднородного уравнения является следующая функция

$$\widehat{V}_1 = -i\alpha(s)\Psi(s,\xi) T(s) \xi \nu v\left(\nu - \zeta_p\right). \tag{25}$$

Очевидно, что $V_1 = \eta^{-1}(s)\widehat{V}_1$ удовлетворяет краевым условиям при $\nu = 0$ и $\nu \to +\infty$.

Обратимся к уравнению (21) для функции V_2. Неоднородные уравнения (20), (21) и так далее для последующих членов асимптотики разрешимы в том и только в том случае, когда неоднородности в правых частях ортогональны решению V_0 однородного уравнения (19).

В случае уравнения (20) оказалось, что правая часть L_1V_0 ортогональна с V_0, т.е. $\int\limits_0^\infty V_0L_1V_0\,d\nu = 0$, но в случае уравнения (21) это уже не имеет место.

Поэтому далее мы воспользуемся приемом, развитым в монографии [2] для подобных задач в двумерном случае. А именно, решение, построенное на предыдущем шаге, умножается на дополнительный множитель — в нашем случае функции $\alpha(s)$, $\Psi(s,\xi)$ в равенстве (23). Затем они подбираются так, чтобы неоднородный член последующего уравнения,— в нашем случае $\eta^{-2}(s)(L_1\widehat{V}_1 + L_2V_0)$, был ортогонален решению однородного уравнения.

Используя равенства (15), (16), (23), (25) получаем последовательно

$$L_1\widehat{V}_1 = 2\alpha(s)\Psi(s,\xi)\xi^2T^2(s)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu v(\nu-\zeta_p)\right), \tag{26}$$

и затем

$$\begin{aligned}L_2V_0 = 2i\alpha(s)\Psi(s,\xi)\frac{\eta'(s)}{\eta(s)}\nu\frac{\partial}{\partial\nu}v\left(\nu-\zeta_p\right)&\\ +\alpha(s)\left\{2i\frac{\partial\Psi}{\partial s}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2}-\varkappa(s)K(s)\xi^2\Psi(s,\xi)\right\}v\left(\nu-\zeta_p\right)&\\ +2i\alpha'(s)\Psi\left(s,\xi\right)v\left(\nu-\zeta_p\right).&\end{aligned} \tag{27}$$

Далее нам потребуются следующие вспомогательные формулы

$$\begin{aligned}I_1 &= \int\limits_0^\infty v\left(\nu-\zeta_p\right)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu v\left(\nu-\zeta_p\right)\right)d\nu = \frac{1}{2}(v'(-\zeta_p))^2,\\ I_2 &= \int\limits_0^\infty v\left(\nu-\zeta_p\right)\nu\frac{\partial}{\partial\nu}v\left(\nu-\zeta_p\right)d\nu = -\frac{1}{2}\left(v'\left(-\zeta_p\right)\right)^2,\\ I_3 &= \int\limits_0^\infty v^2\left(\nu-\zeta_p\right)d\nu = \left(v'\left(-\zeta_p\right)\right)^2.\end{aligned} \tag{28}$$

Для полноты изложения их доказательства приводятся в приложении.

Наконец из равенств (26)–(28) вытекает следующий результат для скалярного произведения

$$\int_0^\infty v\,(\nu-\zeta_p)\left(L_1\widehat{V}_1+L_2V_0\right)d\nu$$

$$= \left(v'\,(-\zeta_p)\right)^2\left\{\Psi(s,\xi)\left[2i\alpha'(s)-i\frac{\eta'(s)}{\eta(s)}\alpha(s)\right]\right.$$

$$\left.+\alpha(s)\left[2i\frac{\partial\Psi}{\partial s}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2}-\big(\varkappa(s)K(s)-T^2(s)\big)\,\xi^2\Psi\right]\right\}=0 \quad (29)$$

при следующих условиях на $\alpha(s)$

$$2\frac{d\alpha}{ds}-\frac{\alpha}{\eta}\frac{d\eta}{ds}=0;\quad \alpha(s)=\sqrt{\eta(s)}, \quad (30)$$

и на $\Psi(s,\xi)$

$$2i\frac{\partial\Psi}{\partial s}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2}-\big(\varkappa(s)K(s)-T^2(s)\big)\,\xi^2\Psi=0. \quad (31)$$

Таким образом, условие разрешимости неоднородного уравнения (21) позволяет фиксировать обе неизвестные функции α и Ψ, введённые в решение однородного уравнения (19).

§6. Локализованное решение уравнения для Ψ

Полученное уравнение (31) для функции $\Psi(s,\xi)$ представляет собой нестационарное уравнение типа Шрёдингера с квадратичным по ξ потенциалам, роль времени играет длина дуги s центральной геодезической $\vec{r}(s)$ пучка. Хорошо известно, что такое уравнение имеет решение экспоненциально убывающее при $\xi\to\pm\infty$, которое мы и будем называть локализованным (сосредоточенным) в окрестности геодезической $\vec{r}(s)$. Напомним способ построения этого решения.

Функцию $\Psi(s,\xi)$ ищем в виде

$$\Psi(s,\xi)=B(s)\exp\left(\frac{i}{2}\Gamma(s)\xi^2\right). \quad (32)$$

Для $B(s)$ и $\Gamma(s)$ получаем систему уравнений

$$\frac{d}{ds}\Gamma+\Gamma^2+(\varkappa K-T^2)=0,\quad \frac{d}{dS}B(s)=-\frac{1}{2}\Gamma(s)B(s). \quad (33)$$

Подстановка $\Gamma = P/Q$ линеаризует уравнение Риккати для Γ:

$$\frac{d}{ds}Q(s) = P(s),$$
$$\frac{d}{ds}P(s) = \left(-\varkappa(s)K(s) + T^2(s)\right)Q(s). \tag{34}$$

Система линейных уравнений (34) представляет собой уравнения в вариациях для функционала Ферма, полученные в работе автора [7].

Далее комплексифицируем функцию Ψ, следуя процедуре изложенной в этой работе. Введём две комплекснозначеные функции $Q(s) = Q_1(s) + iQ_2(s)$ и $P(s) = P_1(s) + iP_2(s)$, образованные двумя вещественными линейно независимыми решениями уравнений в вариациях, $Q_m(s)$, $P_m(s)$, $m = 1, 2$ и подчиним их следующим начальным условиям при $s = 0$

$$Q(0) = 1 + i0, \quad P(0) = 0 + i1. \tag{35}$$

При этом обе комплекснозначные функции $Q(s)$ и $P(s)$ не обращаются в нуль ни при каких значениях s и справедливы следующие формулы

$$\begin{gathered}\operatorname{Im}\Gamma(s) = \frac{1}{|Q(s)|^2} \geq \mathrm{const} > 0; \quad B(s) = \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{Q(s)}};\\ |\Psi(s,\xi)| = |B(s)|\exp\left(-\frac{\xi^2}{2|Q(s)|^2}\right).\end{gathered} \tag{36}$$

Существенно, что функция $\Psi(s,\xi)$ не имеет сингулярностей при всех допустимых значениях длины дуги s геодезической $\vec{r}(s)$. Это справедливо и для всего анзаца (12), если кривизна геодезической $K(s)$ не обращается в нуль.

§7. Заключение

Построенные два члена асимптотики локализованного в окрестности геодезической $\vec{r}(s)$ решения приводят к следующей формуле для волнового поля $U^{(2)}$ поверхностной волны

$$\begin{aligned}U^{(2)} = \exp\left\{iks - ik^{1/3}\frac{1}{2}\zeta_p\int_0^s \eta^2(s)ds\right\}\\ \times\alpha(s)\Psi(s,\xi)v\left(\nu-\zeta_p\right)\left[1 - \frac{i}{k^{1/6}}\eta^{-1}(s)\xi\nu T(s)\right],\end{aligned} \tag{37}$$

где $\alpha(s) = \sqrt{\eta(s)}$, $\eta(s) = (2K(s))^{1/3}$.

Заметим прежде всего, что формула (37) содержит некий произвол. Это касается, в частности, функции $\Psi(s,\xi)$. Так при построении комплекснозначеной функции $\Gamma(s)$ со свойствами (36) начальные условия (35) не являются единственными. Это приводит к тому, что $U^{(2)}$ может содержать дополнительные свободные параметры так же, как в методе суммирования гауссовых пучков, см. [4].

Для однозначности построения асимптотики волнового поля поверхностной волны требуется согласовать её с источником, порождающим волны шепчущей галереи на Σ. Это предполагается рассмотреть в последующих работах.

Чтобы описать глобально поверхностную волну на Σ нужно построить локальную асимптотику (37) для каждой геодезической из потока $\vec{r}(s,\gamma)$, где γ и s являются лучевыми координатами на Σ: параметр γ фиксирует геодезическую, а длина дуги s – точку на ней.

В результате все функции в формуле приобретают зависимость от γ, т.е. $U^{(2)}(s,\xi,\nu;\gamma)$. Глобальная асимптотика поверхностной волны описывается интегралом по γ

$$W = \int d\gamma U^{(2)}(s,\xi,\nu;\gamma), \tag{38}$$

в котором s, ξ, ν остаются, разумеется, локальными координатами в окрестности той геодезической, которая определяется значением параметра γ. Алгоритм рассчета волнового поля, вытекающий из формулы (38), совпадает с тем, что используется в методе суммирования гауссовых пучков, см. [4], и включает следующие пункты.

(1) Из потока геодезических $\vec{r}(s,\gamma)$ отбираются те, что попадают в окрестность точки наблюдения M на Σ. Величина окрестности зависит от степени убывания функций Ψ с ростом координат ξ.

(2) Вычисляются локальные координаты точки M для каждой из отобранных геодезических, попавших в выбранную окрестность точки M.

(3) Суммируются вклады в точку M всех отобранных геодезических.

Существенно, что алгоритм не зависит от того, находится ли M на каустике или нет.

§8. Благодарности

Автор глубоко благодарен Н. М. Семченку за оказанную помощь в подготовке статьи к публикации.

Приложение §A. Приложение

Для вычисления интегралов (28) существенным является то, что функция Эйри $v(\nu-\zeta_p)$ экспоненциально убывает при $\nu\to\infty$, $-\zeta_p$ – есть корень этой функции, а также то, что она есть решение уравнения $v''(\nu-\zeta_p)=(\nu-\zeta_p)v(\nu-\zeta_p)$.

Интегрированием по частям легко устанавливается, что $I_1=-I_2$.

Далее введем новую переменную интегрирования $t=\nu-\zeta_p$, тогда интеграл I_1 преобразуется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
I_1 = (t+\zeta_p)v^2(t)\big|_{\nu=-\zeta_p}^{\nu=\infty} - \zeta_p \int\limits_{-\zeta_p}^{\infty} v(t)v'(t)dt - \int\limits_{-\zeta_p}^{\infty} tv(t)v'(t)dt \\
= - \int\limits_{-\zeta_p}^{\infty} v'(t)v''(t)dt = \frac{1}{2}\left(v'(-\zeta_p)\right)^2.
\end{aligned}
$$

После однократного интегрирования по частям в I_3 получаем

$$
I_3 = -2\int\limits_{-\zeta_p}^{\infty} tv\,(t)\,v'\,(t)\,dt = -\int\limits_{-\zeta_p}^{\infty} d\left(v'\,(t)\right)^2 = \left(v'(-\zeta_p)\right)^2
$$

в силу уравнения Эйри.

Список литературы

1. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн*, Советское радио, Москва, 1970.
2. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции*, Ленинградский университет, Ленинград, 1974.
3. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн: Метод эталонных задач.*, Ленинградский университет, Ленинград 1972.
4. М. М. Попов, *Новый метод расчета волновых полей в высокочастотном приближении.* — Зап. научн. сем. ЛОМИ, **104** (1981), 195–216.

5. М. М. Попов, *К задаче о волнах шепчущей галереи в окрестности простого нуля эффективной кривизны границы.* — Зап. научн. сем. ЛОМИ, **62** (1976), 197–206.
6. M. M. Popov, N. M.Semtchenok, P. M. Popov, A. R. Verdel, *Depth migration by the Gaussian beam summation method.* — Geophysics, **75(2)**(2010), 1MA–Z39.
7. М. М. Попов, *Об индексе Морса геодезических на гладких поверхностях, вложенных в* $\mathbb{R}^3$. — Зап. научн. сем. ПОМИ, **471** (2018), 211–224.

Popov M. M. New concept of surface waves of interference nature on smooth, strictly convex surfaces embedded in $\mathbb{R}^3$.

The new concept of surface waves of interference nature is described in detail for the case of whispering gallery waves propagating along a smooth strictly concave surface embedded in 3D Euclidean space. In a numerous articles devoted to surface waves of whispering gallery and creeping waves it is assumed that they propagate along boundaries formed by a smooth plane curves. However, the process of surface waves propagation along smooth surfaces is mush more complicated then along plane curves. Indeed, the surface waves slide along geodesic lines on the surface where they normally form numerous caustics. Besides, the geodesic lines itself are not plane curves in 3D and therefore their torsion has to be taken into account. Our approach enables resolving both these peculiar problems of waves propagation along smooth surfaces imbedded in 3D Euclidian space. It is based on consideration of geodesic flow on the surface which is associated with the surface wave generated by a source. For each geodesic line we construct an asymptotic solution of the Helmholtz equation localized in a tube vicinity of the geodesic line and having no singularities on caustics. The surface wave under consideration is then presented as a superposition (integral) of the localized solutions.

С.-Петербургское Отделение
Математического Института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: mmpopov@gmail.com

Поступило 27 июля 2020 г.