

А. В. Попов, В. А. Баскаков, Д. В. Прокопович

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В ТЕОРИИ БРЭГГОВСКИХ ВОЛНОВОДОВ

§1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В последние десятилетия активно разрабатываются и испытываются мощные инфракрасные лазеры на основе кварцевых волокон, легированных итербием. Основное ограничение на мощность излучения накладывает порог разрушения кварца (порядка 1 МВт/см^2). Поэтому ключевым элементом конструкции является увеличение диаметра волокна без нарушения одномодового режима распространения излучения. Один из методов селективного ограничения мод в сердцевине оптического волокна заключается в квазипериодической модуляции показателя преломления в его оболочке путем создания контрастных слоев, легированных двуокисью германия. Такая слоистая оболочка образует интерференционное зеркало, удерживающее основную моду волновода. Этот эффект, аналогичный брэгговскому отражению в кристаллических решетках [1], открывает путь к созданию световодов с большой площадью моды [2]. Элементарная теория брэгговских зеркал хорошо известна [3]. Френелевские отражения падающей волны от границ раздела синфазно складываются, что приводит к экспоненциальному затуханию поля в периодической структуре интерференционного зеркала. Поскольку набег фазы зависит от частоты, коэффициент отражения падает с изменением длины волны и вне определенной полосы частот экспоненциальное затухание уступает место волновому режиму.

При проектировании оболочки брэгговского волновода возникает проблема обеспечения максимального ослабления поля при минимальном количестве диэлектрических слоев. Хотя диэлектрический контраст в кварцевой оболочке очень низок, в широких брэгговских волноводах может быть достигнуто почти идеальное удержание основной моды благодаря специально подобранному профилю диэлектрической

Ключевые слова: линейный осциллятор, фазовый параметр, точное решение, параметрический резонанс, волны в периодических средах, брэгговский волновод.

прозрачности [4–6]. Эта конструкция, развитая из схемы четверть-волнового меандра [3] путем численной оптимизации, снижает затухание оптического сигнала до нескольких децибел на километр [6]. Очевидно, этот эффект есть своего рода параметрический (анти)резонанс, связанный с периодической модуляцией показателя преломления. Однако оптимальная конструкция [4] разительно отличается от синусоидальной модуляции, обычно рассматриваемой при объяснении явления параметрического резонанса [7].

Эта работа, развивающая предложенную П. Руа, С. Феврье и др. (Научно-исследовательский институт XLIM, Лимож) концепцию дизайна, была выполнена в тесном сотрудничестве с А. В. Виноградовым (Физический институт им. П. Н. Лебедева), Е. М. Диановым, С. Л. Семеновым и М. Е. Лихачевым (Научный центр волоконной оптики РАН). Результаты были частично опубликованы в [8] и доложены на 9-й, 11-й и 13-й конференциях по прозрачным оптическим сетям (ICTON) [9, 10], включая обобщение на случай нелинейных колебаний.

Одномерное распространение волн в диэлектрической среде с показателем преломления описывается волновым уравнением

$$E(x, t) = u(x) \exp(-i\omega t), \quad u'' + k^2 n^2(x)u = 0, \quad k = \omega/c. \quad (1)$$

В классе периодических функций $n(x + \Lambda) = n(x)$ легко строится точное решение задачи для кусочно-постоянного профиля показателя преломления [1,3]. В общем случае теория предсказывает квазипериодическое решение $u(x) = \exp(\mu x)P(x)$, $P(x + \Lambda) = P(x)$. В соответствии с теоремой Флоке показатели $\rho_{1,2} = \exp(\mu_{1,2}\Lambda)$ двух фундаментальных решений взаимно обратные вещественные или комплексно-сопряженные величины.

Чтобы создать интерференционное зеркало, нужно реализовать экспоненциально убывающее решение. Очевидно, одномерное волновое уравнение с неоднородным показателем преломления $n(x)$ эквивалентно линейному осциллятору с переменной собственной частотой $\omega(t)$:

$$u'' + q^2(x)u = 0, \quad q(x) = kn(x) \Leftrightarrow u'' + \omega^2(t)u = 0. \quad (2)$$

В случае периодического изменения собственной частоты: $\omega(t + T) = \omega(t)$ может возникнуть экспоненциальный рост амплитуды колебаний. Элементарная теория параметрического резонанса [7] утверждает, что при малом периодическом возмущении: $\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h \cos \gamma t)$, $h \ll 1$ резонанс возбуждается наиболее интенсивно, если частота модуляции близка к удвоенной собственной частоте: $\omega_0 : \gamma = 2\omega_0 + \delta\omega$ (Рис. 1а).

Решение пропорционально экспоненте с показателем

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - (\delta\omega_0)^2}.$$

Максимальное усиление на периоде $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ равно $\exp\left(\frac{\pi}{2}h\right)$, полоса частот определяется как $|\delta\omega| < h\omega_0/2$. При другом выборе начальной фазы возникает убывающее решение пропорциональное $\exp(-st)$.

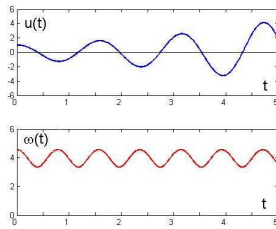


Рис. 1. (а) Параметрический резонанс; (б) пример из повседневной жизни.

Вне рамок метода возмущений не существует элементарной теории для описания квазипериодических решений уравнения (2). Для классического уравнения Матье (синусоидальная модуляция) разработано множество численных алгоритмов. Эти результаты имеют ограниченную область применения, так как в случае глубокой модуляции параметры генератора могут меняться более сложным образом. Обратная задача – поиск оптимального режима раскачки теоретически недостаточно изучена. Между тем, на примере раскачивания качелей можно сделать ряд полезных наблюдений:

- Ребенок интуитивно находит оптимальный режим параметрического возбуждения маятника (скорейший рост амплитуды колебаний);
- Он не пользуется секундомером, а координирует свои движения с текущей фазой колебаний;
- Эквивалентные параметры маятника меняются периодически, но далеко не по гармоническому закону.

Чтобы решить обратную задачу, желательно иметь аналитическое решение уравнения (2) описывающего ангармонические линейные колебания с произвольно изменяющейся собственной частотой $\omega(t)$. Основываясь на опыте раскачивания качелей, мы используем **фазу колебаний как новую независимую переменную**. Для периодической $\omega(t)$ мы построим континуум точных решений уравнения осциллятора (3) и найдем простую формулу для характеристического показателя Флоке. Ниже излагаются основы метода фазового параметра и его приложения к распространению волн в периодических средах.

§2. ЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР, ФАЗОВЫЙ ПАРАМЕТР, ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС

Мы даем определение фазы ангармонических колебаний: $\psi(t) = \arcsctg \frac{u'(t)}{\omega(t)u(t)}$ и рассматриваем ее как новую независимую переменную. Подстановка $\omega(t) = \Omega(\psi)$ преобразует уравнение (2) в пару нелинейных ОДУ для параметризованной функции $u = U(\psi)$, $t = T(\psi)$:

$$u'' + \omega^2(t)u = 0 \Leftrightarrow \dot{T}(\psi) = \frac{1}{\Omega(\psi)} - \frac{\dot{\Omega}(\psi)}{2\Omega^2(\psi)} \sin 2\psi, \quad (3)$$

$$\frac{\dot{U}(\psi)}{U(\psi)} = \text{ctg} \psi - \frac{\dot{\Omega}(\psi)}{\Omega(\psi)} \cos^2 \psi.$$

Довольно неожиданно оказывается, что эта задача имеет элементарное аналитическое решение для произвольной функции $\Omega(\psi)$:

$$\begin{cases} T(\psi) = \int \left(\frac{1}{\Omega} - \frac{\dot{\Omega}}{2\Omega^2} \sin 2\psi \right) d\psi = t_0 + \frac{1}{\bar{\omega}} \int e^{g(\psi)} \left[1 + \frac{1}{2} \dot{g}(\psi) \sin 2\psi \right] d\psi \\ U(\psi) = \sin \psi \exp \left(- \int \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \cos^2 \psi d\psi \right) \\ = \frac{1}{\bar{\omega}} \sin \psi \exp \left[g(\psi) \cos^2 \psi + \int_0^\psi g(\varphi) \sin 2\varphi d\varphi \right] \end{cases} \quad (4)$$

Здесь для удобства сделана замена $\Omega(\psi) \equiv \bar{\omega} \exp[-g(\psi)]$. Формулы (4) представляют континуум аналитических решений уравнения (2) с произвольной зависимостью. При периодическом изменении параметра $g(\psi) = g(\psi + \pi)$ интегралы, входящие в (4), содержат линейно растущие «секулярные» члены. Возвращаясь к временной переменной, получаем решение Флоке $u(t) = \tilde{u}(t) \exp\left(\frac{\nu}{\tau} t\right)$, $\tilde{u}(t + 2\tau) = \tilde{u}(t)$ и явные

формулы для его квазипериода и инкремента:

$$\tau = \frac{2}{\bar{\omega}} \int_0^{\pi} e^{g(\psi)} \sin^2 \psi d\psi, \quad \nu = \int_0^{\pi} g(\psi) \sin 2\psi d\psi \quad (5)$$

Выявляя элементарную связь между характеристическим показателем Флоке и законом модуляции параметров осциллятора, формулы (5) дают явное описание параметрического резонанса за пределами применимости теории малых возмущений. Раскладывая периодическую функцию $g(\psi)$ в ряд Фурье, получаем элементарное соотношение:

$$g(\psi) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos 2m\psi + b_m \sin 2m\psi), \quad \nu = \int_0^{\pi} g(\psi) \sin 2\psi d\psi = \frac{\pi}{2} b_2 \quad (6)$$

Мы видим, что параметрический резонанс определяется **одной нечетной гармоникой показателя экспоненты** $g(\psi) \sim \log \Omega(\psi)$!

Метод фазового параметра дает конструктивное решение задачи выбора параметров осциллятора для получения искомого решения. Так, если нас интересует максимальный рост линейных колебаний, элементарное неравенство, вытекающее из уравнения (6), показывает, что в заданных пределах изменения частоты ω^{\pm} максимальная скорость нарастания амплитуды: $\nu = 2\delta = \log \frac{\omega^+}{\omega^-}$ достигается для ступенчатого изменения параметров, постоянных в каждой четверти периода: $\Omega(\psi) = \omega_0 \exp[-\delta \operatorname{sign}(\sin 2\psi)]$ – ср. [3]. Полученное решение, построенное по параметрическим формулам (4), показано на Рис. 2. Сравнивая с Рис. 1а, мы можем заметить разительное отличие вариаций частоты и решения от гармонического закона, рассматриваемого при стандартном описании параметрического резонанса [7].

Хотя ступенчатое изменение параметров осциллятора обеспечивает наиболее быстрое увеличение амплитуды колебаний, в реальной жизни это вряд ли осуществимо (например, даже самый опытный ребенок не может мгновенно менять эффективную длину качелей). Поэтому реальный практический интерес представляет плавный режим возбуждения параметрического генератора. Наша теория фазового параметра предлагает оптимальное гладкое решение, соответствующее единственной второй гармонике в формуле (6): $g(\psi) = \delta \sin 2\psi$,

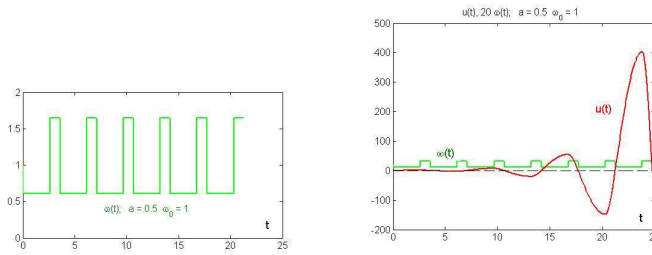


Рис. 2. Оптимальные параметрические колебания: (а) ступенчатое изменение частоты $\omega(t) = \Omega(\psi)$; (б) параметрическое решение $u(t)$ в физических переменных.

$\Omega(\psi) = \omega_0 \exp(-\delta \sin 2\psi)$. Формулы (4) мгновенно дают явное параметрическое решение:

$$U(\psi) = A \sin \psi \exp \left[\frac{\delta}{2} \left(\psi + \sin 2\psi = \frac{1}{4} \sin 4\psi \right) \right],$$

$$T(\psi) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^\psi \exp(\delta \sin 2\psi) \left(1 + \frac{\delta}{2} \sin 4\psi \right) d\psi. \quad (7)$$

Плавно меняющаяся частота осциллятора и соответствующее решение в физических переменных изображены на Рис. 3. Сравнение с Рис. 2 показывает, что форма и скорость нарастания колебаний близки к оптимальным ($\nu = \frac{\pi}{2}\delta$ вместо $\nu = 2\delta$), а кривая изменения мгновенной частоты осциллятора – Рис. 3а напоминает оптимальный профиль диэлектрической проницаемости оболочки брэгговского волокна, полученный численным расчетом [5].

§3. Волны в ПЕРИОДИЧЕСКИХ СРЕДАХ, ОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ, БРЭГГОВСКИЙ СВЕТОВОД

Результаты, полученные для линейного осциллятора, могут быть заменой переменных применены к задачам распространения волн в периодических средах. Рассмотрим гармоническую электромагнитную волну, движущуюся в неоднородной среде. Она описывается одномерным волновым уравнением (2), эквивалентным уравнению линейного осциллятора (3), с заменой $t \rightarrow x$, $\omega(t) \rightarrow q(x)$. Мы вводим фазовый параметр ψ и переменное волновое число $Q(\psi)$ по формулам

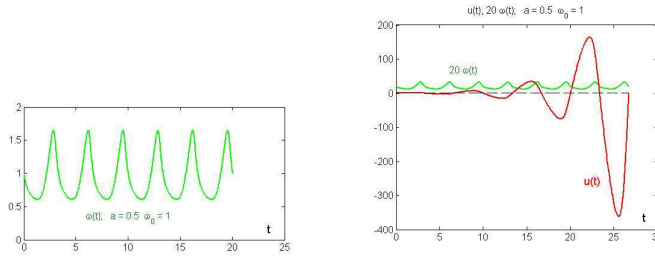


Рис. 3. Плавное изменение параметров осциллятора. (а) оптимальные вариации мгновенной частоты $\omega(t) = \Omega(\psi)$; б) параметрическое решение в физических переменных: $t = T(\psi)$, $u(t) = U(\psi)$.

$\frac{u'(x)}{q(x)u(x)} = \text{ctg } \psi(x)$, $q(x) = Q(\psi)$ и получаем нелинейные ОДУ, аналогичные уравнениям (3) и имеющие точное аналитическое решение $x \equiv X(\psi)$, $u \equiv U(\psi)$ для произвольной функции $Q(\psi) = kN(\psi)$ [8–9]. Для периодического показателя преломления $n * \psi + \pi = N(\psi)$ получаем аналитическое описание блоховских волн в “запрещенной” зоне: $u(x) = y(x) \exp(-\mu x)$, $y(x + \Lambda) = y(x)$ и находим явные выражения для их квазипериода и затухания:

$$\Lambda = \frac{2}{k\bar{n}} \int_0^\pi e^{-g(\psi)} \sin^2 \psi d\psi, \quad \nu \equiv \mu\Lambda = \int_0^\pi g(\psi) \sin 2\psi d\psi N(\psi) = \bar{n} \exp[g(\psi)] \quad (8)$$

Это аналитическое решение может быть использовано для оптимального синтеза брэгговских волноводов. В модельной двумерной задаче мы строим периодическую оболочку $n(x)$, окружающую однородную сердцевину волокна n_0 . Цель оптимизации состоит в максимальном затухании волнового поля в оболочке волновода. Распространяющаяся ТЕ-волноводная мода имеет вид $E_y = u(x) \exp(i\beta z)$. Поперечное распределение волнового поля $u(x)$ определяется одномерным волновым уравнением (2) с заменой $q(x) \Rightarrow \sqrt{k^2 n^2(x) - \beta^2}$. Оптимальное гладкое

решение легко находится по формулам (7):

$$q(x) = q_0 \exp[\delta(\sin 2\psi - \sin 2\psi_0)];$$

$$x = a + \frac{1}{q_0} \int_{\psi_0}^{\psi} \exp[\delta(\sin 2\psi_0 - \sin 2\varphi)] \left(1 - \frac{\delta}{2} \sin 4\varphi\right) d\varphi, \quad (9)$$

$$u(x) = \begin{cases} \cos q_0 x, & x < a; \\ -\sin \psi \exp \left[-\frac{\delta}{2} \left((\psi - \psi_0) + (\sin 2\psi - \sin 2\psi_0) + \frac{1}{4} (\sin 4\psi - \sin 4\psi_0) \right) \right], & x > a. \end{cases}$$

Здесь a – полуширина сердцевины, а плавное согласование волновой функции на границе $x = a$ достигается выбором константы $\psi_0 = q_0 a - \pi/2$. Сравнивая рис. 4 (а) и (б), мы можем заметить близкое сходство между этим аналитическим решением и оптимальным профилем показателя преломления, найденным с помощью численных расчетов [5-6].

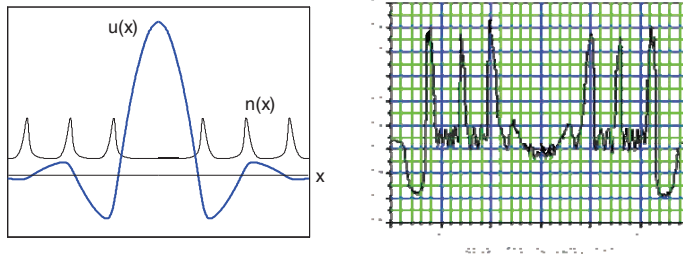


Рис. 4. (а) Оптимальный профиль $n(x)$ и основная мода брэгговского волновода $u(x)$; (б) Реальный профиль показателя преломления [5-6].

§4. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ БЕГУЩИХ ВОЛН. ЧАСТОТНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

Для завершения нашей теории необходимо исследовать зоны прозрачности периодической среды $q(x) = q(x + \Lambda)$ и частотную зависимость решения. Чтобы описать распространяющуюся волну $u(x) = e^{\mu x} P(x)$, $P(x + \Lambda) = P(x)$ с чисто мнимым показателем μ , определим фазу колебаний как однородную (вещественную!) функцию от $u(x)$ и

$u'(x)$:

$$\Psi(x) = \frac{1}{2i} \ln \frac{u' + iqu}{u^{*'} - iqu^*} \sim \int \left(q + \frac{q'}{2} \frac{uu^{*'} + u'u^*}{2|u'|^2 + q^2|u|^2} \right) dx. \quad (10)$$

Чтобы проинтегрировать уравнения (3) в зоне прозрачности, вводим комплексный адмитанс [10–11]:

$$H(\Psi) = Q\rho \exp(i\Phi) = \frac{u'[X(\Psi)]}{u[X(\Psi)]} \equiv \frac{\dot{U}(\Psi)}{\dot{X}(\Psi)U(\Psi)}. \quad (11)$$

Его амплитуда и фаза удовлетворяют системе нелинейных дифференциальных уравнений, которые подстановкой

$$\rho(\Psi) = \sqrt{\frac{1 + \dot{I}(\Psi)}{1 - \dot{I}(\Psi)}}, \quad \frac{\dot{Q}}{Q} = \dot{g}(\Psi) = M'(I)/M(I)$$

сводятся к ОДУ первого порядка [10]:

$$\dot{I}^2 = 1 - 4I^2 - M^2(I). \quad (12)$$

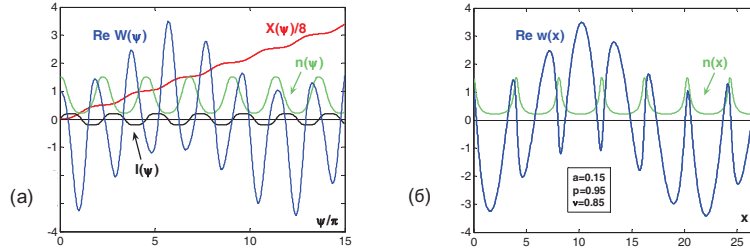


Рис. 5. Квазипериодические колебания в зоне прозрачности: (а) как функция фазового параметра; (б) в физических переменных.

Уравнение (12) при произвольной функции $M(I)$ имеет периодическое решение $I(\Psi) = I(\Psi + \Theta)$, определяемое интегралом

$$\Psi = \pm \int \frac{dl}{\sqrt{1 - 4I^2 - M^2(I)}}, \quad \Theta = 2 \int_{I_-}^{I_+} \frac{dl}{\sqrt{1 - 4I^2 - M^2(I)}}. \quad (13)$$

Таким образом, интегрируя уравнение (12), мы строим комплекснозначное решение $u(x) \equiv U(\psi) = Y(\psi) \exp[(\chi + i\nu)\psi]$, $Y(\psi + \Theta) = Y(\psi)$. Для четных функций $M(I) = M(-I)$ решение не имеет экспоненциального роста ($\chi = 0$), остается лишь периодическая модуляция с периодом $T = \frac{2\pi}{\nu}\Theta$, где

$$\nu = 4 \int_0^{I^+} \frac{M(I) - IM'(I)}{4I^2 + M^2(I)} \frac{dl}{\sqrt{1 - 4I^2 - M^2(I)}}. \quad (14)$$

В приведенном ниже примере, для $M(I) = \sqrt{1 - 4a^2 - c^2I^4}$, показано поведение волнового поля в зоне прозрачности одномерной периодической структуры. В полном согласии с теорией Флоке, решение демонстрирует двоякопериодические биения с периодами $T_{1,2} = \frac{2\pi}{\nu \pm 2\pi}\Theta$. Сравнение графиков, построенных в физических переменных и в зависимости от фазового параметра, показывает более регулярное поведение решения в нашей параметризации.

Для завершения анализа остается решить проблему равномерного описания частотной зависимости волнового поля – как в запрещенной полосе, так и в полосе пропускания фотонной структуры. Отметим возникающую трудность: чтобы построить решение волнового уравнения $u'' + k^2 n_2(x)u = 0$, $k = \omega/c$ методом фазового параметра, мы должны выразить $u(x, \omega)$ через переменные (ψ, k) . Необходимость гарантировать частотную независимость профиля показателя преломления $n(x)$ накладывает ограничения на множество модельных функций $g(\psi, k) = \log \frac{n(x)}{\bar{n}}$, приводя к нелинейному уравнению в частных производных [9]. Оно может быть сведено методом характеристик к ОДУ на торе $g[\Phi(\varphi, k)] = g_0(\varphi)$:

$$\Psi'(\varphi, k) = \chi + \frac{1}{2}g_0'(\varphi)(\sin 2\Psi - \chi \sin 2\varphi), \quad \chi = \frac{k}{k_0}. \quad (15)$$

В узкой полосе частот вокруг $\omega_0 = k_0$ находим простое приближенное решение, зависящее от двух произвольных функций – $g_0(\varphi)$ и $\alpha(k)$:

$$g(\psi, k) = g_0 \left\{ \frac{k_0}{k} [\psi + \alpha(k)] \right\}, \quad \alpha(k_0) = 0. \quad (16)$$

Эта аналитическая теория позволяет качественно объяснить частотную зависимость потерь излучения брэгговского волокна, растущих в

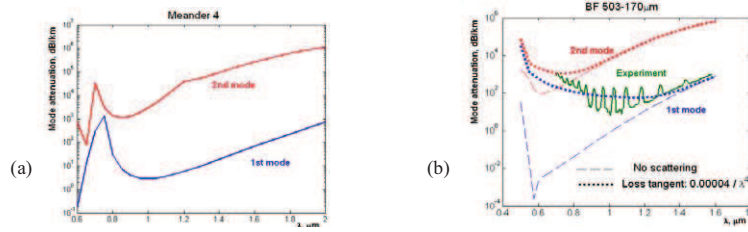


Рис. 6. (а) Теоретическая частотная зависимость затухания двух брэгговских мод; (б) экспериментально найденные радиационные потери.

сторону больших длин волн из-за дифракционных эффектов, а в обратном направлении из-за вырождения брэгговской моды – см. Рис. 6 (а, б).

§5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аналитический подход, развитый для поиска оптимальной конструкции брэгговских оптических волноводов, дает аналитическое описание параметрических колебаний при произвольном периодическом изменении параметров системы. Использование фазы колебаний как независимой переменной позволяет получить новые результаты в теории линейных и нелинейных колебаний. По аналогии строится аналитическое описание распространения электромагнитных волн в периодических неоднородных средах. Явные формулы для периода и скорости раскачки параметрических колебаний используются для решения задачи оптимального синтеза. Для эффективного описания частотной зависимости блоховских волн в периодических средах необходимо дальнейшее развитие теории. Возможно обобщение на случай 2D фотонных кристаллов. Развитый метод фазового параметра может быть применен далеко за пределами рассмотренных выше задач механики детских качелей или волоконной оптики - включая физику ранней Вселенной [12].

Мы благодарны коллегам из Физического института им. П. Н. Лебедева и Научного центра волоконной оптики РАН за многолетнее плодотворное сотрудничество.

Эту публикацию мы посвящаем славному юбилею В. М. Бабича – одного из основателей современной теории волновых процессов. Будучи выдающимся представителем ленинградской школы математической физики, Василий Михайлович внес неоценимый вклад в использование асимптотических методов для решения задач дифракции и распространения электромагнитных, акустических и сейсмических волн. Эти работы превратили волновую теорию из небольшого набора канонических точных решений в универсальный инструмент прикладной физики. Его семинары, выросшие в знаменитые “Дни Дифракции,” стали международной площадкой для общения специалистов и отличной школой для молодых ученых. Незабываема неформальная дружеская обстановка, мягкий юмор организатора. Один из авторов этого обзора был приглашен к Бабичу с докладом. Перед семинаром Василий Михайлович предложил выпить кофе, сказав: “А я выпью две чашки, чтобы не заснуть – очень хочется тебя послушать.”

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Yariv, P. Yeh, *Optical Waves in Crystals*, 2002.
2. E. M. Dianov, M. E. Likhachev, S. Février, *Solid-core photonic bandgap fibers for high-power fiber lasers*. — IEEE J. Selected Topics in Quantum Electronics **15**, No. 1 (2009), 20–29.
3. P. Yeh, A. Yariv, E. Marom, *Theory of Bragg fiber*. — J. Opt. Soc. Amer. **68**, No. 9 (1978), 1196–1201.
4. S. Février, P. Viale, F. Gerome, P. Leproux, P. Roy, J.-M. Blondy, B. Dussardier, G. Monnom, *Very large effective area singlemode photonic bandgap fiber*. — Electronics Letters **39**, No. 17 (2003), 1240–1242.
5. S. Février, R. Jamier, J.-M. Blondy, S. L. Semjonov, M. E. Likhachev, M. M. Bubnov, E. M. Dianov, V. F. Khopin, M. I. Salganskii, A. N. Gurianov, *Low-loss singlemode large mode area all-silica photonic bandgap fiber*. — Opt. Express **14** (2006), 562–569.
6. M. Likhachev, S. Semjonov, A. Popov, A. Vinogradov, E. M. Dianov, *Depressed core Bragg waveguides: experiment and simulation*. — ICTON 2004. Proceedings of 6th International Conference on Transparent Optical Networks, **2**, pp. 117–120, Wroclaw, Poland, 2004.
7. L. D. Landau, E. M. Lifszitz, *Mechanics*, Elsevier, 1982, 224 p.
8. A. V. Vinogradov, A. V. Popov, D. V. Prokopovich, *On the explicit parametric description of waves in periodic media*. — Comput. Math. Math. Phys. **49**, No. 6 (2009), 1069–1079.
9. A. Popov, *Parametric resonance and waves in periodic media*. Proc. 11th Internat. Conf. on Transparent Optical Networks, Th.A4.4, pp.1-4. Ponta Delgada, Portugal, 2009.

10. A. Popov, M. Popova, *Parametric representation of traveling waves in periodic media*. Proc. Internat. Conf. on Transparent Optical Networks, pp. We.A2.2 1-4. Stockholm, 2011.
11. A. V. Popov, V. Kovalchuk, *Parametric representation of wave propagation in non-uniform media (both in transmission and stop bands)*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, DOI:10.1002/mma.2687. Wiley, 2012.
12. A. D. Dolgov, A. V. Popov, A. S. Rudenko, *Shape of the inflaton potential and the efficiency of the universe heating*. — Eur. Phys. J. C. **437**, No. 75 (2015). DOI 10.1140/epjc/s10052-015-3666-4.

Popov A. V., Baskakov V. A., Prokopovich D. V. Parametric resonance and theory of bragg waveguides.

This review paper summarizes a new analytical approach to the theory of waves in periodic media developed in relation with the problems of fiber optics. An adequate definition of the oscillation phase, used as an independent variable, allows us to construct an infinite set of exact solutions describing excitation and damping of parametric oscillations, beyond perturbation theory.

ИЗМИРАН, г. Троицк, Москва, 108480, Россия
E-mail: popov@izmiran.ru

Поступило 2 ноября 2020 г.