Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 493, 2020 г.

А. Б. Плаченов

ВЫРАЖЕНИЕ ЭНЕРГИИ АКУСТИЧЕСКОГО, ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО И УПРУГОГО ВОЛНОВОГО ПОЛЯ ЧЕРЕЗ ЕГО АСИМПТОТИКУ НА БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ И РАССТОЯНИЯХ

Работа посвящается Василию Михайловичу Бабичу

§1. Введение

В работах А. С. Благовещенского [1], Х. Е. Мозеса и Р. Н. Проссера [2] установлено, что достаточно быстро убывающее решение волнового уравнения, равно как и уравнений Максвелла (см. [2]), определяется своей асимптотикой в дальней зоне при больших временах. Использование этого результата позволило в параграфе 2 настоящей работы получить формулу, в которой энергия решения волнового уравнения выражена через указанную асимптотику. Далее, в параграфах 3 и 4 аналогичные формулы получены для решений уравнений электро- и эластодинамики, а в параграфе 5 эти формулы конкретизируются для случаев, когда такие решения выражены через скалярные или векторные потенциалы. В параграфе 6 рассмотрены частные случаи, когда поля или потенциалы специальным образом выражаются через некоторое решение волнового уравнения. Наконец, в параграфе 7 возможности предложенной в работе методики иллюстрируется на примере однонаправленных решений волнового уравнения и построенных на их основе решений уравнений Максвелла, которые могут быть полезны при моделировании ультракоротких (фемто- и аттосекундных) лазерных импульсов [3, 4].

§2. Волновое уравнение

Начнём с рассмотрения трёхмерного волнового уравнения [5]

$$\Box u = \Delta u - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = 0\,, \qquad (1)$$

Ключевые слова: волновое уравнение, уравнения Максвелла, уравнения теории упругости, энергия, асимптотика.

где функция (вообще говоря, комплексная) $u = u(t, \mathbf{R})$ зависит от времени t и трёх пространственных координат, объединённых в вектор $\mathbf{R} = (x, y, z)$, точка обозначает дифференцирование по переменной t, $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ – 3D оператор Лапласа, постоянная c характеризует скорость распространения волн. Под плотностью энергии решения понимается функция

$$w(t, \mathbf{R}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}|\dot{u}|^2 + |\nabla u|^2\right). \tag{2}$$

Решение u имеет конечную энергию, если сходится интеграл

$$\mathcal{E} = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} w(t, \mathbf{R})\, d^3\mathbf{R}\,, \tag{3}$$

где $d^3\mathbf{R} = dx\, dy\, dz$ – элемент объёма. Интеграл энергии (3) не зависит от t. Наша задача – получить представление для интеграла (3) в терминах, описывающих асимптотическое поведение функции $u(t, \mathbf{R})$ при больших временах и на больших расстояниях.

Рассмотрим решение уравнения (1), удовлетворяющее при $t = 0$ начальным условиям

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\, d^3\mathbf{k}\,, \\ \dot{u}|_{t=0} = \psi(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \widehat{\psi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\, d^3\mathbf{k}\,, \end{cases} \tag{4}$$

где $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$, $d^3\mathbf{k} = dk_x\, dk_y\, dk_z$, $\widehat{\varphi}$ и $\widehat{\psi}$ – Фурье-образы функций φ и ψ, которые будем считать гладкими и достаточно бысто убывающими на бесконечности, а точкой обозначено скалярное произведение: $\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} = k_x x + k_y y + k_z z$.

Тогда, обозначив $k = |\mathbf{k}|$, $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$,

$$\widehat{u}_{\pm}(\mathbf{k}) = \frac{\widehat{\varphi}(\mathbf{k}) \mp \widehat{\psi}(\mathbf{k})/(ikc)}{2}\,,$$

получаем:

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \left[\widehat{\varphi}(\mathbf{k})\cos kct + \widehat{\psi}(\mathbf{k})\frac{\sin kct}{kc}\right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\, d^3\mathbf{k} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint \left[\widehat{u}_-(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}+kct)} + \widehat{u}_+(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}-kct)}\right]\, d^3\mathbf{k} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \Bigg[\iint\limits_{|\mathbf{n}|=1} d^2\mathbf{n} \int\limits_0^\infty \widehat{u}_-(k\mathbf{n})e^{ik(\mathbf{n}\cdot\mathbf{R}+ct)}\, k^2\, dk \\
&\qquad + \iint\limits_{|\mathbf{n}|=1} d^2\mathbf{n} \int\limits_0^\infty \widehat{u}_+(k\mathbf{n})e^{ik(\mathbf{n}\cdot\mathbf{R}-ct)}\, k^2\, dk\Bigg]\,,
\end{aligned}
$$

где $d^2\mathbf{n}$ – элемент площади поверхности единичной сферы, $d^3\mathbf{k} = k^2\,dk\,d^2\mathbf{n}$.

Выполнив в первом интеграле замену $\mathbf{n} \mapsto -\mathbf{n}$, $k \mapsto -k$ и объединив его со вторым, получаем

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|\mathbf{n}|=1} d^2\mathbf{n} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(k\mathbf{n})e^{ik(\mathbf{n}\cdot\mathbf{R}-ct)}\, k^2\, dk\right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|\mathbf{n}|=1} U(\mathbf{n}\cdot\mathbf{R}-ct, \mathbf{n})\, d^2\mathbf{n}\,,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где

$$
\widehat{u}(k\mathbf{n}) = \begin{cases} \widehat{u}_-(k\mathbf{n}), & k < 0\,, \\ \widehat{u}_+(k\mathbf{n}), & k > 0\,, \end{cases}
$$

и

$$
U(s, \mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k^2 \widehat{u}(k\mathbf{n}) e^{iks}\, dk\,. \tag{6}
$$

Из равенства (6), между прочим, вытекает, что

$$
\int\limits_{-\infty}^{\infty} |k^2\widehat{u}(k\mathbf{n})|^2\, dk = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |U(s,\mathbf{n})|^2\, ds\,. \tag{7}
$$

При каждом фиксированном $\mathbf{n}$ функция $U(\mathbf{n}\cdot\mathbf{R}-ct,\mathbf{n})$ представляет собой плоскую волну, бегущую со скоростью c в направлении вектора $\mathbf{n}$.

Выразим интеграл энергии (3) через функцию (6):

$$\mathcal{E}=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{|\psi|^2}{c^2}+|\nabla\varphi|^2\right)d^3\mathbf{R}=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{|\widehat{\psi}|^2}{c^2}+k^2|\widehat{\varphi}|^2\right)d^3\mathbf{k}$$
$$=\iint\limits_{|\mathbf{n}|=1}d^2\mathbf{n}\left[\int\limits_0^\infty k^2|\widehat{u}_-(k\mathbf{n})|^2\,k^2\,dk+\int\limits_0^\infty k^2|\widehat{u}_+(k\mathbf{n})|^2\,k^2\,dk\right].$$

Выполнив в первом интеграле замену $\mathbf{n}\mapsto-\mathbf{n}$, $k\mapsto-k$, получаем, с учётом (7):

$$\mathcal{E}=\iint\limits_{|\mathbf{n}|=1}d^2\mathbf{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|k^2\widehat{u}(k\mathbf{n})|^2\,dk=\iint\limits_{|\mathbf{n}|=1}d^2\mathbf{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|U(s,\mathbf{n})|^2\,ds\,. \tag{8}$$

Для завершения вывода окончательной формулы воспользуемся результатом, полученным Благовещенским [1] и, независимо, Мозесом и Проссером [2] (см. также [6]). В этих работах установлено, что для достаточно быстро убывающих при $|\mathbf{R}|\to\infty$ классических решений $u(t,\mathbf{R})$ волнового уравнения (1) для произвольного вещественного значения s и единичного вектора $\mathbf{n}$ существует предел

$$F(s,\mathbf{n})=\lim_{t\to\infty}\left[ct\cdot u(t,(ct+s)\mathbf{n})\right], \tag{9}$$

т.е. предел при больших временах t и расстояниях $|\mathbf{R}|$, когда вектор $\mathbf{R}$ направлен вдоль $\mathbf{n}$, а разность $s=|\mathbf{R}|-ct$ остаётся фиксированной. При этом справедливо равенство

$$u=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|\mathbf{n}|=1}F'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{R}-ct,\mathbf{n})\,d^2\mathbf{n}\,, \tag{10}$$

где штрихом обозначена производная по первому аргументу.

Сравнивая равенства (5) и (10), мы заключаем, что функции $U(s,\mathbf{n})$ (6) и $F(s,\mathbf{n})$ (9) связаны равенством

$$U(s,\mathbf{n})=F'(s,\mathbf{n})\,. \tag{11}$$

Отсюда, с учётом (8), вытекает искомая формула

$$\mathcal{E} = \iint\limits_{|\mathbf{n}|=1} d^2\mathbf{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F'(s,\mathbf{n})|^2 \, ds\,, \tag{12}$$

позволяющая вычислить полную энергию решения волнового уравнения (1) через её асимптотику при больших значениях времени и на больших расстояниях.

§3. Уравнения электродинамики в вакууме

Рассмотрим теперь систему уравнений Максвелла в вакууме в отсутствие зарядов и токов [7]

$$\begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{E} = 0\,, & \operatorname{div}\mathbf{H} = 0\,, \\ \frac{1}{c}\dot{\mathbf{E}} = \operatorname{rot}\mathbf{H}\,, & \frac{1}{c}\dot{\mathbf{H}} = -\operatorname{rot}\mathbf{E}\,. \end{cases} \tag{13}$$

Плотность энергии электромагнитного поля имеет вид

$$w(t,\mathbf{R}) = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2\right)\,,$$

т.е., в отличие от скалярного случая (2), выражается через сами поля, а не их производные. Мы предполагаем, что интеграл (3) сходится, его значение не зависит от времени t.

Рассмотрим решение системы уравнений (13), удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} \mathbf{E}|_{t=0} = \varphi(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\, d^3\mathbf{k}\,, \\ \mathbf{H}|_{t=0} = \psi(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \widehat{\psi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\, d^3\mathbf{k}\,, \end{cases}$$

причём, в отличие от скалярного случая (4), вектор-функции $\varphi(\mathbf{R})$ и $\psi(\mathbf{R})$ не могут быть выбраны произвольным образом: из первой пары уравнений Максвелла вытекает, что $\widehat{\varphi}(\mathbf{k})\perp\mathbf{k}$, $\widehat{\psi}(\mathbf{k})\perp\mathbf{k}$. Из второй пары уравнений следует, что

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{E}}\Big|_{t=0} = c\operatorname{rot}\psi(\mathbf{R}) = \frac{ic}{(2\pi)^{3/2}} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \mathbf{k}\times\widehat{\psi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\, d^3\mathbf{k}\,, \\ \dot{\mathbf{H}}\Big|_{t=0} = -c\operatorname{rot}\varphi(\mathbf{R}) = -\frac{ic}{(2\pi)^{3/2}} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \mathbf{k}\times\widehat{\varphi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\, d^3\mathbf{k}\,. \end{cases}$$

Поскольку каждая компонента как электрического, так и магнитного поля удовлетворяет волновому уравнению (1), мы можем, воспользовавшись результатами параграфа 2, представить функции $\mathbf{E}(t,\mathbf{R})$ и $\mathbf{H}(t,\mathbf{R})$ в виде

$$\{\mathbf{E},\mathbf{H}\}(t,\mathbf{R}) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|\mathbf{n}|=1} \mathbf{U}_{\{\mathbf{E},\mathbf{H}\}}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{R}-ct,\mathbf{n})\,d^2\mathbf{n}\,.$$

Здесь

$$\mathbf{U}_{\{\mathbf{E},\mathbf{H}\}}(s,\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k^2\{\widehat{\mathbf{E}},\widehat{\mathbf{H}}\}(k\mathbf{n})e^{iks}\,dk = \mathbf{F}'_{\{\mathbf{E},\mathbf{H}\}}(s,\mathbf{n})\,,$$

где

$$\mathbf{F}_{\{\mathbf{E},\mathbf{H}\}}(s,\mathbf{n}) = \lim_{t\to\infty}\left[ct\cdot\{\mathbf{E},\mathbf{H}\}(t,(ct+s)\mathbf{n})\right]\,,$$

$$\widehat{\mathbf{E}}(k\mathbf{n}) = \begin{cases}\widehat{\mathbf{E}}_-(k\mathbf{n}) = [\widehat{\varphi}(k\mathbf{n}) + \mathbf{n}\times\widehat{\psi}(k\mathbf{n})]/2, & k<0\,,\\ \widehat{\mathbf{E}}_+(k\mathbf{n}) = [\widehat{\varphi}(k\mathbf{n}) - \mathbf{n}\times\widehat{\psi}(k\mathbf{n})]/2, & k>0\,,\end{cases}$$

$$\widehat{\mathbf{H}}(k\mathbf{n}) = \begin{cases}\widehat{\mathbf{H}}_-(k\mathbf{n}) = [\widehat{\psi}(k\mathbf{n}) - \mathbf{n}\times\widehat{\varphi}(k\mathbf{n})]/2, & k<0\,,\\ \widehat{\mathbf{H}}_+(k\mathbf{n}) = [\widehat{\psi}(k\mathbf{n}) + \mathbf{n}\times\widehat{\varphi}(k\mathbf{n})]/2, & k>0\,,\end{cases}$$

при этом

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{E}}(k\mathbf{n}) &= -\mathbf{n}\times\widehat{\mathbf{H}}(k\mathbf{n})\,, &\quad \widehat{\mathbf{H}}(k\mathbf{n}) &= \mathbf{n}\times\widehat{\mathbf{E}}(k\mathbf{n})\,,\\ \mathbf{U}_{\mathbf{E}}(s,\mathbf{n}) &= -\mathbf{n}\times\mathbf{U}_{\mathbf{H}}(s,\mathbf{n})\,, &\quad \mathbf{U}_{\mathbf{H}}(s,\mathbf{n}) &= \mathbf{n}\times\mathbf{U}_{\mathbf{E}}(s,\mathbf{n})\,,\\ \mathbf{F}_{\mathbf{E}}(s,\mathbf{n}) &= -\mathbf{n}\times\mathbf{F}_{\mathbf{H}}(s,\mathbf{n})\,, &\quad \mathbf{F}_{\mathbf{H}}(s,\mathbf{n}) &= \mathbf{n}\times\mathbf{F}_{\mathbf{E}}(s,\mathbf{n})\,.\end{aligned}$$

Вычислим интеграл энергии (3):

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{1}{2}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}(|\varphi|^2+|\psi|^2)\,d^3\mathbf{R} = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}(|\widehat{\varphi}|^2+|\widehat{\psi}|^2)\,d^3\mathbf{k}\\ &= \iint\limits_{|\mathbf{n}|=1} d^2\mathbf{n}\left[\int\limits_0^\infty |\widehat{\mathbf{E}}_-(k\mathbf{n})|^2\,k^2\,dk + \int\limits_0^\infty |\widehat{\mathbf{E}}_+(k\mathbf{n})|^2\,k^2\,dk\right] \qquad (14)\\ &= \iint\limits_{|\mathbf{n}|=1} d^2\mathbf{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|k\widehat{\mathbf{E}}(k\mathbf{n})|^2\,dk = \iint\limits_{|\mathbf{n}|=1} d^2\mathbf{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\mathbf{F}_{\mathbf{E}}(s,\mathbf{n})|^2\,ds\,,\end{aligned}$$

при последнем переходе мы учли, что

$$\mathbf{F}_{\mathbf{E}}(s,\mathbf{n}) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k\widehat{\mathbf{E}}(k\mathbf{n}) e^{iks}\, dk\,.$$

Очевидно, в формуле (14) вместо $\mathbf{F}_{\mathbf{E}}$ можно взять вектор-функцию $\mathbf{F}_{\mathbf{H}}$, поскольку $|\mathbf{F}_{\mathbf{E}}| = |\mathbf{F}_{\mathbf{H}}|$. Мы видим, что энергия электромагнитного поля, в отличие от скалярного случая, выражается не через производную предельной функции $\mathbf{F}$, а через саму эту функцию.

§4. Уравнения эластодинамики однородной изотропной упругой среды

Рассмотрим описывающее упругие колебания уравнение Навье [8], имеющее в случае однородной изотропной среды при отсутствии внешних сил вид

$$(\lambda + 2\mu)\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = 0\,, \tag{15}$$

где $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор смещения, ρ – плотность среды, а λ и μ – параметры Ламе, характеризующие упругие свойства среды. Решение уравнения (15), убывающее на бесконечности, единственным образом раскладывается в сумму потенциального $\mathbf{u}_\parallel$ и соленоидального $\mathbf{u}_\perp$ слагаемых:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\parallel + \mathbf{u}_\perp\,, \quad \operatorname{rot} \mathbf{u}_\parallel = 0\,, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_\perp = 0\,,$$

при этом каждое из слагаемых удовлетворяет своему волновому уравнению:

$$\Delta \mathbf{u}_{\parallel,\perp} - \frac{1}{c^2_{\parallel,\perp}} \ddot{\mathbf{u}}_\parallel = 0\,,$$

где $c_\parallel = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и $c_\perp = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорости распространения продольных и поперечных упругих волн (P- и S-волн) соответственно. Отсюда вытекает, что

$$\mathbf{u}_{\parallel,\perp} = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|\mathbf{n}|=1} \mathbf{U}_{\parallel,\perp}\left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{R} - c_{\parallel,\perp}t, \mathbf{n}\right)\, d^2\mathbf{n}\,,$$

где

$$\mathbf{U}_{\parallel,\perp}(s,\mathbf{n}) = \mathbf{F}'_{\parallel,\perp}(s,\mathbf{n})\,,$$
$$\mathbf{F}_{\parallel,\perp}(s,\mathbf{n}) = \lim_{t\to\infty}\left[c_{\parallel,\perp}t \cdot \mathbf{u}_{\parallel,\perp}(t, (c_{\parallel,\perp}t + s)\mathbf{n})\right]\,,$$

причём из условий потенциальности и соленоидальности следует, что векторы $\mathbf{U}_\parallel(s,\mathbf{n})$ и $\mathbf{F}_\parallel(s,\mathbf{n})$ коллинеарны вектору $\mathbf{n}$, а $\mathbf{U}_\perp(s,\mathbf{n})$ и $\mathbf{F}_\perp(s,\mathbf{n})$ ему ортогональны, что и оправдывает введённые обозначения.

Перейдём к вычислению энергии. Выражение для плотности энергии упругой волны имеет вид [8]

$$w(t,\mathbf{R}) = \frac{1}{2}\left[\rho|\dot{\mathbf{u}}|^2 + (\lambda+2\mu)(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})^2 \right.$$
$$\left. -4\mu(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}+\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}+\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}-\varepsilon_{12}^2-\varepsilon_{13}^2-\varepsilon_{23}^2)\right], \quad (16)$$

где ε_{mn} – элементы тензора деформации $\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n}+\frac{\partial u_n}{\partial x_m}\right)$, а $(x_1,x_2,x_3)=(x,y,z)$. Первое слагаемое в (16) отвечает кинетической энергии, а все остальные – потенциальной. Мы считаем, что интеграл (3) сходится, его значение не зависит от времени t.

После некоторых преобразований формула (16) приводится к виду [9]

$$w(t,\mathbf{R}) = \frac{1}{2}\left\{\rho|\dot{\mathbf{u}}|^2+(\lambda+2\mu)|\operatorname{div}\mathbf{u}|^2+\mu|\operatorname{rot}\mathbf{u}|^2+2\mu\operatorname{div}[(\mathbf{u},\nabla)\mathbf{u}-\mathbf{u}\operatorname{div}\mathbf{u}]\right\}.$$

Очевидно, в первом слагаемом плотности потенциальной энергии $\operatorname{div}\mathbf{u}=\operatorname{div}\mathbf{u}_\parallel$, во втором $\operatorname{rot}\mathbf{u}=\operatorname{rot}\mathbf{u}_\perp$, последнее не влияет на полную энергию, поскольку интеграл от него равен нулю.

Покажем, что полная энергия решения $\mathbf{u}$ равна сумме энергий его потенциального $\mathbf{u}_\parallel$ и соленоидального $\mathbf{u}_\perp$ слагаемых. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (15). Пусть заданы гладкие квадратично интегрируемые вектор-функции

$$\varphi(\mathbf{R})=\varphi_\parallel(\mathbf{R})+\varphi_\perp(\mathbf{R}) \quad \text{и} \quad \psi(\mathbf{R})=\psi_\parallel(\mathbf{R})+\psi_\perp(\mathbf{R}),$$

определяющие начальные смещения и скорости в среде:

$$\begin{cases} \mathbf{u}\big|_{t=0}=\varphi(\mathbf{R})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\widehat{\varphi}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\,d^3\mathbf{k}\,, \\ \dot{\mathbf{u}}\big|_{t=0}=\psi(\mathbf{R})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\widehat{\psi}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\,d^3\mathbf{k}\,, \end{cases}$$

тогда

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{\parallel,\perp}\big|_{t=0}=\varphi_{\parallel,\perp}(\mathbf{R})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\widehat{\varphi}_{\parallel,\perp}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\,d^3\mathbf{k}\,, \\ \dot{\mathbf{u}}_{\parallel,\perp}\big|_{t=0}=\psi_{\parallel,\perp}(\mathbf{R})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\widehat{\psi}_{\parallel,\perp}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\,d^3\mathbf{k}\,, \end{cases}$$

при этом для любого $\mathbf{k}$ векторы $\widehat{\varphi}_\parallel(\mathbf{k})$ и $\widehat{\psi}_\parallel(\mathbf{k})$ коллинеарны $\mathbf{k}$, а $\widehat{\varphi}_\perp(\mathbf{k})$ и $\widehat{\psi}_\perp(\mathbf{k})$ ортогональны $\mathbf{k}$.

Выразим интеграл энергии (3) через $\widehat{\varphi}_{\parallel,\perp}(\mathbf{k})$ и $\widehat{\psi}_{\parallel,\perp}(\mathbf{k})$:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\rho|\psi|^2 + (\lambda+2\mu)(\operatorname{div}\varphi)^2 + \mu|\operatorname{rot}\varphi|^2\right)\, d^3\mathbf{R}$$

$$= \frac{1}{2}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \Big(\rho(|\widehat{\psi}_\parallel|^2 + |\widehat{\psi}_\perp|^2) + (\lambda+2\mu)k^2|\widehat{\varphi}_\parallel|^2 + \mu k^2|\widehat{\varphi}_\perp|^2\Big)\, d^3\mathbf{k}$$

$$= \frac{\lambda+2\mu}{2}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\widehat{\psi}_\parallel|^2}{c_\parallel^2} + k^2|\widehat{\varphi}_\parallel|^2\right) d^3\mathbf{k} + \frac{\mu}{2}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\widehat{\psi}_\perp|^2}{c_\perp^2} + k^2|\widehat{\varphi}_\perp|^2\right) d^3\mathbf{k}$$

$$= \mathcal{E}_\parallel + \mathcal{E}_\perp\,.$$

Мы видим, что полная энергия распадается в сумму энергий для потенциальной и соленоидальной части решения, и их можно рассмотреть отдельно. Повторяя рассуждения параграфа 2, получаем:

$$\mathcal{E}_\parallel = (\lambda+2\mu)\iint\limits_{|\mathbf{n}|=1} d^2\mathbf{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{U}_\parallel(s,\mathbf{n})|^2\, ds = (\lambda+2\mu)\iint\limits_{|\mathbf{n}|=1} d^2\mathbf{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}'_\parallel(s,\mathbf{n})|^2\, ds\,,$$

$$\mathcal{E}_\perp = \mu\iint\limits_{|\mathbf{n}|=1} d^2\mathbf{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{U}_\perp(s,\mathbf{n})|^2\, ds = \mu\iint\limits_{|\mathbf{n}|=1} d^2\mathbf{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}'_\perp(s,\mathbf{n})|^2\, ds\,.$$

Мы получили формулы, выражающие энергию локализованной упругой волны через её асимптотику при больших временах и на больших расстояниях.

§5. Энергия электромагнитного и упругого импульса в терминах асимптотики потенциалов

В случаях, когда решения уравнений электро- и эластодинамики выражаются через потенциалы (скалярные или векторные), удовлетворяющие волновому уравнению, можно выразить энергию решения через асимптотику этих потенциалов.

- **Энергия электромагнитного импульса в терминах асимптотики векторного потенциала в случае кулоновской калибровки.** Решение системы уравнений Максвелла

(13) в кулоновской калибровке представляется в виде [7]

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}\,, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}\,,$$

где $\mathbf{A}$ – векторный потенциал, в отсутствии зарядов и токов удовлетворяющий волновому уравнению (1) и дополнительному условию $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$. В этом случае

$$\mathbf{F}_{\mathbf{E}}(s, \mathbf{n}) = \mathbf{F}'_{\mathbf{A}}(s, \mathbf{n})\,,$$

где

$$\mathbf{F}_{\mathbf{A}}(s, \mathbf{n}) = \lim_{t\to\infty}\left[ct \cdot \mathbf{A}(t, (ct+s)\mathbf{n})\right]\,,$$

и поэтому

$$\mathcal{E} = \iint\limits_{|\mathbf{n}|=1} d^2\mathbf{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}'_{\mathbf{A}}(s, \mathbf{n})|^2\, ds\,.$$

- **Энергия электромагнитного импульса в терминах асимптотики электрического вектора Герца.** Пусть решение системы уравнений Максвелла (13) представляется в виде

$$\mathbf{E} = \nabla(\operatorname{div}\mathbf{\Pi}^e) - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{\Pi}}^e\,, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{\Pi}}^e\,,$$

где $\mathbf{\Pi}^e$ – электрический вектор Герца [10], удовлетворяющий в отсутствии зарядов и токов волновому уравнению (1).

Обозначим

$$\mathbf{F}_{\mathbf{\Pi}^e}(s, \mathbf{n}) = \lim_{t\to\infty}\left[ct \cdot \mathbf{\Pi}^e(t, (ct+s)\mathbf{n})\right]\,,$$

тогда

$$\mathbf{F}_{\mathbf{H}}(s, \mathbf{n}) = -\mathbf{n} \times \mathbf{F}''_{\mathbf{\Pi}^e}(s, \mathbf{n})\,,$$

и

$$\mathcal{E} = \iint\limits_{|\mathbf{n}|=1} d^2\mathbf{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{n} \times \mathbf{F}''_{\mathbf{\Pi}^e}(s, \mathbf{n})|^2\, ds\,.$$

- **Энергия электромагнитного импульса в терминах асимптотики магнитного вектора Герца (вектора Риги).** Пусть решение системы уравнений Максвелла (13) представляется в виде

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{\Pi}}^m\,, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}^m\,,$$

где $\mathbf{\Pi}^m$ – магнитный вектор Герца (вектор Риги) [10], удовлетворяющий в отсутствии зарядов и токов волновому уравнению (1).

Обозначим

$$\mathbf{F}_{\mathbf{\Pi}^m}(s,\mathbf{n}) = \lim_{t\to\infty} \left[ct \cdot \mathbf{\Pi}^m(t,(ct+s)\mathbf{n})\right] ,$$

тогда

$$\mathbf{F}_{\mathbf{E}}(s,\mathbf{n}) = \mathbf{n} \times \mathbf{F}''_{\mathbf{\Pi}^m}(s,\mathbf{n}) ,$$

и

$$\mathcal{E} = \iint\limits_{|\mathbf{n}|=1} d^2\mathbf{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{n} \times \mathbf{F}''_{\mathbf{\Pi}^m}(s,\mathbf{n})|^2 \, ds .$$

- **Энергия потенциального упругого импульса в терминах скалярного потенциала.** Потенциальное решения уравнения Навье (15) представляется в виде

$$\mathbf{u}_\parallel = \nabla\Phi ,$$

где скалярный потенциал Φ удовлетворяет волновому уравнению $\Delta\Phi - \frac{1}{c_\parallel^2}\ddot{\Phi} = 0$. В этом случае

$$\mathbf{F}_\parallel(s,\mathbf{n}) = \mathbf{n}F'_\Phi(s,\mathbf{n}) ,$$

где

$$F_\Phi(s,\mathbf{n}) = \lim_{t\to\infty} \left[c_\parallel t \cdot \Phi(t,(c_\parallel t+s)\mathbf{n})\right] ,$$

и тогда

$$\mathcal{E}_\parallel = (\lambda + 2\mu) \iint\limits_{|\mathbf{n}|=1} d^2\mathbf{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F''_\Phi(s,\mathbf{n})|^2 \, ds .$$

- **Энергия соленоидального упругого импульса в терминах векторного потенциала.** Соленоидальное решения уравнения Навье (15) представляется в виде

$$\mathbf{u}_\perp = \operatorname{rot}\Psi ,$$

где векторный потенциал Ψ удовлетворяет волновому уравнению $\Delta\Psi - \frac{1}{c_\perp^2}\ddot{\Psi} = 0$. В этом случае

$$\mathbf{F}_\perp(s,\mathbf{n}) = \mathbf{n} \times \mathbf{F}'_\Psi(s,\mathbf{n}) ,$$

где

$$\mathbf{F}_\Psi(s,\mathbf{n}) = \lim_{t\to\infty} \left[c_\perp t \cdot \Psi(t,(c_\perp t+s)\mathbf{n})\right] ,$$

и тогда

$$\mathcal{E}_\perp = \mu \iint\limits_{|\mathbf{n}|=1} d^2\mathbf{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{n} \times \mathbf{F}''_\Psi(s, \mathbf{n})|^2 \, ds \,.$$

§6. Частные случаи

Большинство известных автору явных решений системы уравнений Максвелла строится на основе некоторого скалярного решения u волнового уравнения (1) с помощью одной из стандартных процедур. Это позволяет выразить энергию результирующего поля через асимптотику функции u. Аналогичные формулы могут быть получены и для энергии упругих импульсов.

Некоторые из приведённых ниже формул будут использованы в следующем разделе при рассмотрении конкретных примеров.

- Пусть

$$\mathbf{E} = \mathbf{l} \times \nabla u = -\operatorname{rot}(\mathbf{l}\, u)\,,$$

где $\mathbf{l}$ – постоянный вектор, а u – решение уравнения (1). Такая функция удовлетворяет волновому уравнению, её дивергенция равна нулю, поэтому она описывает электрическую компоненту некоторого электромагнитного поля. Тогда

$$\mathbf{F}_\mathbf{E}(s, \mathbf{n}) = \mathbf{l} \times \mathbf{n}\, F'(s, \mathbf{n})\,,$$

и

$$\mathcal{E} = \iint\limits_{|\mathbf{n}|=1} |\mathbf{l} \times \mathbf{n}|^2 \, d^2\mathbf{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F'(s, \mathbf{n})|^2 \, ds \,. \tag{17}$$

- Пусть

$$\mathbf{A} = \mathbf{l} \times \nabla u = -\operatorname{rot}(\mathbf{l}\, u)\,,$$

где $\mathbf{l}$ – постоянный вектор, а u – решение уравнения (1). Тогда

$$\mathbf{F}_\mathbf{A}(s, \mathbf{n}) = \mathbf{l} \times \mathbf{n}\, F'(s, \mathbf{n})\,,$$

и

$$\mathcal{E} = \iint\limits_{|\mathbf{n}|=1} |\mathbf{l} \times \mathbf{n}|^2 \, d^2\mathbf{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F''(s, \mathbf{n})|^2 \, ds \,. \tag{18}$$

- Пусть
$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{l}\, u\,,$$
где $\mathbf{\Pi}$ – электрический или магнитный вектор Герца, $\mathbf{l}$ – постоянный вектор, а u – решение уравнения (1). Тогда
$$\mathbf{F}_{\mathbf{\Pi}}(s,\mathbf{n}) = \mathbf{l}\, F(s,\mathbf{n})\,,$$
и
$$\mathcal{E} = \iint\limits_{|\mathbf{n}|=1} |\mathbf{l}\times\mathbf{n}|^2\, d^2\mathbf{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F''(s,\mathbf{n})|^2\, ds\,.$$

- Пусть
$$\mathbf{u}_\perp = \mathbf{l}\times\nabla v = -\,\mathrm{rot}(\mathbf{l}\, v)\,,$$
где v – скалярное решение уравнения $\Delta v - \frac{1}{c_\perp^2}\ddot{v} = 0$, тогда $\Psi = -\mathbf{l}\, v$,
$$\mathbf{F}_\Psi(s,\mathbf{n}) = -\mathbf{l}F_v(s,\mathbf{n}) = -\mathbf{l}\lim_{t\to\infty}\left[c_\perp t\cdot v(t,(c_\perp t + s)\mathbf{n})\right]\,,$$
и
$$\mathcal{E}_\perp = \mu\iint\limits_{|\mathbf{n}|=1} |\mathbf{n}\times\mathbf{l}|^2\, d^2\mathbf{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F_v''(s,\mathbf{n})|^2\, ds\,.$$

§7. Примеры

В настоящем разделе приведённая выше общая схема применяется для нахождения энергии конкретных решений волнового уравнения и системы уравнений Максвелла. Для решений, которые здесь рассматриваются, функции $F(s,\mathbf{n})$ и $U(s,\mathbf{n})$ обращаются в нуль на полусфере. Это означает, что такие решения обладают свойством однонаправленности, что делает их удобным инструментом для моделирования ультракоротких лазерных импульсов.

- Рассмотрим функцию Со [11] – решение уравнения (1), имеющее вид
$$u(t,\rho,z) = \frac{1}{S(z_* - S)}\,. \tag{19}$$
Здесь
$$S = \sqrt{c^2 t_*^2 - \rho^2}\,, \tag{20}$$

при этом $\rho^2 = x^2 + y^2$, $z_* = z + i\zeta$, $t_* = t + i\tau$, где ζ и $\tau \neq 0$ – вещественные параметры, а ветвь квадратного корня в (20) выбирается из условия $S|_{\rho=0} = ct_*$. Будем считать также выполненным неравенство $\zeta/\tau < c$, обеспечивающее регулярность функции (19) при всех значениях пространственных координат и времени.

Пусть χ – угол между положительным направлением оси z и вектором $\mathbf{n}$, тогда

$$F(s,\theta) = \lim_{t\to\infty} \left[ct \cdot u(t, (ct+s)\sin\chi, (ct+s)\cos\chi)\right] . \qquad (21)$$

В рассматриваемом случае $S \sim ct|\cos\chi|$, $z_* - S \sim 2ct\cos\chi$ при $\chi > \pi/2$, а при $\chi < \pi/2$

$$\begin{aligned} z_* - S &= i\zeta + \frac{z^2 + \rho^2 - c^2 t_*^2}{z + S} \\ &= i\zeta + \frac{(ct+s)^2 - c^2(t+i\tau)^2}{z+S} \sim i\zeta + \frac{s - i\tau}{\cos\chi} . \end{aligned}$$

Поэтому при $\chi \neq \pi/2$

$$F(s,\mathbf{n}) = \frac{\theta(\cos\chi)}{s - i(c\tau - \zeta\cos\chi)} ,$$

где θ – функция Хевисайда, равная единице, когда её аргумент положителен, и нулю, когда он отрицателен. Отсюда

$$\begin{aligned} F'(s,\mathbf{n}) &= -\frac{\theta(\cos\chi)}{[s - i(c\tau - \zeta\cos\chi)]^2} , \\ \mathcal{E} &= 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\chi\, d\chi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{[s^2 + (c\tau - \zeta\cos\chi)^2]^2} \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\chi\, d\chi}{|c\tau - \zeta\cos\chi|^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds'}{(s'^2+1)^2} \\ &= \frac{\pi^2}{2|\zeta|} \left| \frac{1}{(c\tau - \zeta)^2} - \frac{1}{(c\tau)^2} \right| = \frac{\pi^2 |2c\tau - \zeta|}{2(c\tau)^2 (c\tau - \zeta)^2} . \end{aligned}$$

При вычислении внутреннего интеграла сделана замена $s = s'|c\tau - \zeta\cos\chi|$, которую мы будем применять и в других примерах, а далее использована формула [12]

$$I_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2} \frac{\pi}{2^{2n-2}} . \tag{22}$$

В частности, $I_2 = \pi/2$, $I_3 = 3\pi/8$, $I_4 = 5\pi/16$, $I_5 = 35\pi/128$, $I_6 = 63\pi/256$. Эти значения нам понадобятся в дальнейшем.

- Пусть теперь u – мнимая часть рассмотренного выше комплексного решения (19):

$$u(t,\rho,z) = \mathrm{Im}\,\frac{1}{S(z_* - S)} , \tag{23}$$

тогда

$$\begin{aligned}
F(s,\theta) &= \mathrm{Im}\,\frac{\theta(\cos\chi)}{s - i(c\tau - \zeta\cos\chi)} ,\\
F'(s,\theta) &= -\frac{2s(c\tau-\zeta\cos\chi)}{[s^2+(c\tau-\zeta\cos\chi)^2]^2}\theta(\cos\chi) ,\\
\mathcal{E} &= 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\chi\, d\chi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{4s^2(c\tau-\zeta\cos\chi)^2}{[s^2+(c\tau-\zeta\cos\chi)^2]^4}\, ds\\
&= 8\pi \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin\chi\, d\chi}{|c\tau-\zeta\cos\chi|^3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s'^2\, ds'}{(s'^2+1)^4}\\
&= \frac{4\pi}{|\zeta|}\left|\frac{1}{(c\tau-\zeta)^2} - \frac{1}{(c\tau)^2}\right|(I_3 - I_4) = \frac{\pi^2|2c\tau-\zeta|}{4(c\tau)^2(c\tau-\zeta)^2}
\end{aligned}$$

(опять воспользовались формулой (22)). Как видим, эта величина оказалась ровно вдвое меньше, чем энергия решения (19). Тот же результат будет и в случае, если мы рассмотрим вещественную часть функции (19).

- Пусть теперь

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x \times \nabla u ,$$

где $\mathbf{e}_z$ – единичный вектор, направленный вдоль положительного направления оси x, а u – мнимая часть (23) функции Co (19).

Для вычисления энергии воспользуемся формулой (17), при этом

$$|\mathbf{e}_x \times \mathbf{n}|^2 = 1 - (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n})^2 = 1 - \sin^2\chi \cos^2\phi\,,$$

где $\mathbf{n} = (\sin\chi\cos\phi, \sin\chi\sin\phi, \cos\chi)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \int\limits_0^{\pi/2} \sin\chi\,d\chi \int\limits_{-\pi}^{\pi} (1-\sin^2\chi\cos^2\phi)\,d\phi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{4s^2(c\tau-\zeta\cos\chi)^2}{[s^2+(c\tau-\zeta\cos\chi)^2]^4}\,ds \\ &= 4\pi \int\limits_0^{\pi/2} \frac{(2-\sin^2\chi)\sin\chi\,d\chi}{|c\tau-\zeta\cos\chi|^3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s'^2\,ds'}{(s'^2+1)^4} = \frac{\pi^2}{4}\left|\int\limits_0^1 \frac{(1+v^2)\,dv}{(c\tau-\zeta v)^3}\right| \\ &= \frac{\pi^2}{4}\left|\frac{-2(c\tau)^3+3(c\tau)^2\zeta+2c\tau\zeta^2-\zeta^3}{2\zeta^2(c\tau)^2(c\tau-\zeta)^2} + \frac{1}{\zeta^3}\ln\frac{c\tau}{c\tau-\zeta}\right|\end{aligned}$$

(при вычислении сделана замена $v = \cos\chi$).

- Пусть задан векторный потенциал

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x \times \nabla u\,,$$

где снова u – функция (23). Для вычисления энергии воспользуемся формулой (18), предварительно вычислив $F''(s,\theta)$:

$$\begin{aligned}F''(s,\theta) &= \operatorname{Im}\frac{2\theta(\cos\chi)}{[s-i(c\tau-\zeta\cos\chi)]^3} \\ &= 2\theta(\cos\chi)\frac{3s^2(c\tau-\zeta\cos\chi)-(c\tau-\zeta\cos\chi)^3}{[s^2+(c\tau-\zeta\cos\chi)^2]^3}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= 4\int\limits_0^{\pi/2} \sin\chi\,d\chi \int\limits_{-\pi}^{\pi}(1-\sin^2\chi\cos^2\phi)\,d\phi \\ &\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{[3s^2(c\tau-\zeta\cos\chi)-(c\tau-\zeta\cos\chi)^3]^2}{[s^2+(c\tau-\zeta\cos\chi)^2]^6}\,ds \\ &= 4\pi\int\limits_0^{\pi/2}\frac{(2-\sin^2\chi)\sin\chi\,d\chi}{(c\tau-\zeta\cos\chi)^6}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{[3(s'^2+1)-4]^2\,ds'}{(s'^2+1)^6}\end{aligned}$$

$$= 4\pi(9I_4 - 24I_5 + 16I_6) \int\limits_0^1 \frac{(1+v^2)\,dv}{(c\tau - \zeta v)^6}$$

$$= \frac{40(c\tau)^4 - 65(c\tau)^3\zeta + 61(c\tau)^2\zeta^2 - 30c\tau\zeta^4 + 6\zeta^4}{40(c\tau)^5(c\tau-\zeta)^5}\pi\,.$$

- Рассмотрим теперь функцию Лекнера [13] – решение уравнения (1), имеющее вид

$$u(t,\rho,z) = \frac{a^4\widetilde{a}}{3}\frac{3(\widetilde{a}^2+\rho^2)^2 - 6z^2(\widetilde{a}^2+\rho^2) - z^4 + 8iz(\widetilde{a}^2+\rho^2)^{3/2}}{(\widetilde{a}^2+\rho^2)^{3/2}(\widetilde{a}^2+\rho^2+z^2)^3}\,, \quad (24)$$

где a – вещественный параметр, $\widetilde{a} = a + ict$, ветвь квадратного корня выбирается из условия $(\widetilde{a}^2+\rho^2)^{3/2}\big|_{\rho=0} = \widetilde{a}^3$. Снова вычисляем функцию (21). В рассматриваемом случае при больших значениях t и $\chi \neq \pi/2$

$$\widetilde{a} \sim ict\,,\ \widetilde{a}^2 + \rho^2 \sim -(ct)^2\cos^2\chi\,,$$

$$(\widetilde{a}^2+\rho^2)^{3/2} \sim -i(ct)^3|\cos^3\chi|\,,\ \widetilde{a}^2+\rho^2+z^2 \sim 2ct(ia+s)\,,$$

и тогда

$$F(s,\theta) = -\frac{2a^4\cos\chi}{3(ia+s)^3}\theta(\cos\chi)\,,$$

$$F'(s,\theta) = \frac{2a^4\cos\chi}{(ia+s)^4}\theta(\cos\chi)\,,$$

$$\mathcal{E} = 2\pi\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\chi\sin\chi\,d\chi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{4a^8\,ds}{(a^2+s^2)^4}$$

$$= \frac{8\pi}{3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{ds'}{(1+s'^2)^4} = \frac{8\pi}{3}I_4 = \frac{5\pi^2}{6}$$

(использована замена $s = as'$ и формула (22)).

§8. Заключение

Из приведённых примеров видно, что использование предложенных формул позволяет вычислять энергию волновых пакетов в случаях, когда аналитическое представление решений является достаточно громоздким, и непосредственное интегрирование плотности энергии могло бы вызвать затруднения.

Автор выражает признательность А.П.Киселеву, обратившему его внимание на работы [1, 2], за полезные обсуждения и конструктивную критику.

Список литературы

1. А. С. Благовещенский, *О некоторых новых корректных задачах для волнового уравнения.* Тр. V Всес. симп. по дифракции и распространению волн. Наука, Л. 1971, 29–35.
2. H. E. Moses,R. N. Prosser, *Acoustic and electromagnetic bullets: derivation of new exact solutions of the acoustic and Maxwell's equations.* — SIAM J. Appl. Math. **50**, No. 5 (1990), 1325–1340.
3. Р. М. Архипов, М. В. Архипов, А. А. Шимко, А. В. Пахомов, Н. Н. Розанов, *Предельно короткие оптические импульсы и их генерация в резонансных средах. (Миниобзор)* — Письма в ЖЭТФ **110**, No. 1 (2019), 9–20.
4. И. А. Артюков, А. В. Виноградов, Н. В. Дьячков, Р. М. Фещенко, *Плотность энергии и спектр электромагнитных импульсов с одним и менее периодами поля.* — Квантовая электроника **20**, No. 2 (2020), 187–194.
5. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики. Т.*2. БХВ-Петербург, СПб, 2008, с. 848.
6. А. П. Киселев, *Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения (обзор).* — Опт. и спектр. **102**, No. 4 (2007), 661–681.
7. А. Н. Васильев, *Классическая электродинамика. Краткий курс лекций.* БХВ-Петербург, СПб, 2010, с. 288.
8. В. М. Бабич, А. П. Киселев, *Упругие волны. Высокочастотная теория.* БХВ-Петербург, СПб, 2014, с. 320.
9. А. П. Киселев, *Поток энергии упругих волн.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **89** (1979), 120–123.
10. A. Nisbet, *Hertzian electromagnetic potentials and associated gauge transformations.* — Proc. of the Royal Soc. of London. Ser. A **231**, No. 1185 (1955), 250–263.
11. И. А. Со, А. Б. Плаченов, А. П. Киселев, *Однонаправленные одноцикловые и субцикловые импульсы.* — Опт. и спектр. **128**, No. 12 (2020), 1865–1867.
12. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики. Т.*3*, Ч.*2. БХВ-Петербург, СПб, 2010, с. 817.
13. J. Lekner, *Theory of electromagnetic pulses.* Calif. Morgan & Claypo, 2018, p. 100.

Plachenov A. B. Acoustic, electromagnetic and elastic wavefield energy expression via its asymptotics at large times and distances.

Simple formulae expressing whole energy of solutions of 3D wave equation, electro- and elastodynamics equations via their asymptotics at large times and distances are obtained. Some examples are considered.

МИРЭА Российский технологический
университет, пр. Вернадского 78,
119454, Москва, Россия
E-mail: a_plachenov@mail.ru

Поступило 29 октября 2020 г.