Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 493, 2020 г.

М. А. Лялинов

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА В ПОЛУПЛОСКОСТИ С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА ЛУЧЕ И С УСЛОВИЕМ НЕЙМАНА НА ГРАНИЦЕ

Посвящается Василию Михайловичу Бабичу

§1. Введение

В данной работе мы развиваем подход, предложенный в статье [1] для похожей задачи в R^3, и применяем его к задаче для оператора Лапласа с потенциалом в полуплоскости в ситуации, когда сингулярный потенциал сосредоточен на луче с началом на границе полуплоскости. На границе полуплоскости выполнено условие Неймана. Нашей целью является изучение собственных функций отрицательного спектра, который состоит из существенного (на самом деле, непрерывного) и дискретного спектра.[1] Для этого, используя неполное разделение переменных и интегральное представление Конторовича–Лебедева (КЛ), мы сводим задачу вычисления собственных функций к спектральной задаче для функционально-разностного уравнения второго порядка с мероморфным потенциалом. Дальнейшая редукция к интегральному уравнению позволяет исследовать спектр стандартными методами для самосопряженных ограниченных интегральных операторов. Для вычисления асимптотики собственных функций удобно перейти от интегрального представления КЛ к интегралу Зоммерфельда. При этом, трансформанты Зоммерфельда, т.е. функции в подынтегральном выражении интеграла Зоммерфельда, удовлетворяют системе функциональных уравнений Малюжинца, что, в частности, позволяет найти их

Ключевые слова: дискретный и существенный спектр, собственные функции, интегралы Конторовича–Лебедева, техника Зоммерфельда–Малюжинца, асимптотика, функционально-разностные уравнения.

Работа поддержана Российским Научным Фондом, грант 17-11-01126.

[1]Положительный спектр заполняет полуось и является существенным (и непрерывным).

особенности (полюсы). Асимптотика собственных функций дискретного (и обобщенных собственных функций непрерывного) спектра для больших расстояний вычисляется применением метода перевала к интегралам Зоммерфельда.

В последние десятилетия похожие задачи по описанию спектра исследовались на основе общих методов [2, 3] спектрального анализа самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, см. [4–6], а также [7]. Конечность спектра и оценки собственных функций для задачи в угле с условиями Робэна на гарнице рассмотрены в работе [6]. В этой задаче собственные числа и функции могут быть найдены явно [8] и, более того, в терминах элементарных функций. В математическом смысле с этой задачей тесно связана проблема вычисления локализованных волн вблизи наклонного берега в теории малых линейных колебаний жидкости (моды Урсела), [9, 10], раздел 5.2, [11]. Удовлетворительный обзор по данному вопросу можно найти в [10], в разделе 5.2. Известные локализованные моды (Ursell) напрямую соответствуют собственным функциям, получаемым с помощью техники Зоммерфельда-Малюжинца в работе [8]. Стоит отметить, однако, что в задаче о собственных малых колебаниях жидкости в прибрежном клине спектральным параметром является параметр в граничном условии, а ищутся значения этого параметра, для которых существуют локализованные решения (из H^1) модифицированного уравнения Гельмгольца с фиксированным волновым числом в угле. Собственные функции и числа из [6, 8] легко пересчитываются в их аналоги из [9, 10], раздел 5.2. Полезно заметить, что "‘полнота" построенных собственных функций [9] обсуждается в работе [12].

В следующем параграфе мы обсудим постановку задачи и введем самосопряженный оператор, спектр которого и собственные функции мы изучаем в данной работе. Для сравнения мы также напомним результаты, касающиеся собственных функций оператора Лапласа в клине с импедансными краевыми условиями (Робэна).

Мы используем интегральное представление КЛ и неполное разделение переменных [13] и сводим построение собственных функций к спектральной задаче для функционально-разностного уравнения с мероморфным потенциалом. С использованием преобразования Фурье функционально-разностное уравнение сводится к интегральному уравнению с самосопряженным ограниченным интегральным оператором K. Структура спектра этого положительного оператора полностью определяет отрицательный спектр и собственные функции исходного оператора. Существенный (непрерывный) спектр интегрального оператора K заполняет отрезок $[0,1]$, а дискретный спектр конечен и располагается правее единицы.

Мы исследуем поведение мероморфных решений функционально-разностного уравнения и их асимптотическое поведение вдоль мнимой оси. Для вычисления асимптотики собственных функций (или обобщенных с.ф. для непрерывного спектра) по расстоянию представление КЛ преобразуется к интегралу Зоммерфельда. Трансформанты Зоммерфельда подчиняются функциональным уравнениям Малюжинца [14,15] и являются мероморфными функциями. Положение полюсов этих трансформант играет ключевую роль при асимптотической оценке интегралов Зоммерфельда по методу перевала. Локализация полюсов и вычисление вычетов производится с использованием уравнений Малюжинца.

Асимптотическая оценка интегралов Зоммерфельда для собственных функций использует традиционный метод перевала [16] в случае, когда полюса трансформант Зоммерфельда отделены от точек перевала. В этом случае, в старшем порядке собственные функции ведут себя как убывающие экспоненты (или как ограниченные экспоненты в случае непрерывного спектра), причем скорость их убывания изменяется при переходе через так называемые сингулярные направления [17]. В окрестности этих направлений, которые соответствуют ситуации слияния полюса с точкой перевала, асимптотическое поведение описывается в терминах специальной функции типа интеграла Френеля [18]. В окрестности сингулярного направления происходит “переключение” скорости убывания собственной функции на бесконечности.

Отметим, что интегральные представления и асимптотическое поведение собственных функций на больших расстояниях являются основными новыми результатами, полученными в рамках нашего подхода. Насколько нам известно, такого сорта формулы для собственных функций дискретного и непрерывного спектра подробно не обсуждались в литературе для данного класса задач. Параллельно мы рассматриваем и явно решаемую модель – оператор Лапласа в угле с условиями Робэна на границе.

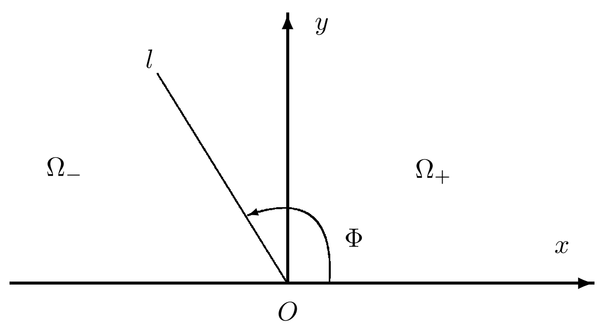

Рис. 1. Области $\Omega_\pm$ и границы.

§2. Постановка задачи

Рассмотрим верхнюю полуплоскость R^2_+ с границей $y = 0$ и выделим подобласти (Рис. 1)

$$\Omega_+ = \{(r, \varphi) : r > 0, 0 < \varphi < \Phi\} \quad \text{и} \quad \Omega_- = \{(r, \varphi) : r > 0, \Phi < \varphi < \pi\},$$

где $\pi/2 < \Phi < \pi$, а r, φ полярные координаты связанны с декартовыми $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$. Общая граница областей Ω_+ и Ω_- является лучом $l = \{(r, \varphi) : r > 0, \varphi = \Phi\}$. Мы ищем классические решения $u^\pm \in C^2(\Omega_\pm)$ уравнения

$$-\triangle u^\pm(x, y) = Eu^\pm(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_\pm, \tag{1}$$

где E спектральный параметр считается отрицательным, и только знаки $+$ или $-$ в формулах используются здесь и в дальнейшем одновременно. Краевое условие Неймана выполнено на границе полуплоскости,

$$\left.\frac{\partial u^+}{\partial y}\right|_{\varphi=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u^-}{\partial y}\right|_{\varphi=\Phi} = 0, \tag{2}$$

а условия типа Робэна на границе l

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_l - \frac{\gamma}{2}\left(u^+ + u^-\right)\Big|_l = 0, \tag{3}$$

$$u^+\big|_l = u^-\big|_l\,, \tag{4}$$

где $\gamma > 0$ и

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_l := \frac{1}{r}\frac{\partial u^+}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=\Phi+0} - \frac{1}{r}\frac{\partial u^-}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=\Phi-0}.$$

В приложениях условия вида (3),(4) называют условиями полупрозрачности тонкого импедансного листа (impedance sheet), моделирующего тонкий диэлектрический слой в задачах рассеяния электромагнитных волн, см. раздел 10.1 в [15]. Соответствующие граничные значения искомых функций $u^\pm$ и их нормальных производных считаются непрерывными вдоль границы. Классическая постановка задачи подразумевает также ограничения на решения в угловых точках (условия Мейкснера),

$$u^\pm(r,\varphi) = C^\pm + O(r^{\delta^\pm}), \quad \delta^\pm > 0 \tag{5}$$

при $r \to 0$ равномерно по $\varphi \in [0,\Phi]$ для u^+ и $\varphi \in [\Phi,\pi]$ для u_- соответсвенно.

Собственные функции дискретного спектра, а они действительно существуют, выделим условием

$$\int\limits_{\Omega_\pm} |u^\pm(r,\varphi)|^2 \mathrm{e}^{2d_\pm r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty, \tag{6}$$

где $d_\pm$ некоторые положительные постоянные. Заметим, что этим оценкам (6) удовлетворяют только собственные функции дискретного спектра и, значит, они экспоненциально убывают, тогда как собственные функции существенного (непрерывного) спектра окажутся просто ограниченными в $\Omega_\pm$.

Классическую постановку задачи (1)–(6) естественно сопроводить явным описанием соответствующего самосопряженного оператора A (см. [5]), причем уравнение для собственных функций принимает вид

$$AU = EU,$$

где E спектральный параметр. Оператор A определяется своей полуторалинейной формой

$$a[U,V] = \int\limits_{\mathrm{R}^2_+} \nabla U \cdot \nabla\overline{V}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \gamma\int\limits_l U\overline{V}\mathrm{d}s.$$

Эта форма полуограничена и замкнута, если $\mathrm{Dom}[a] = H^1(y > 0)$. В соответствии с общей теорией [2, 3] существует отвечающий ей полуограниченный самосопряженный оператор $A = A^*$. Спектр этого оператора состоит из существенного спектра [5], совпадающего с лучом $[-\gamma^2/4, \infty)$, и непустой ограниченой дискретной компоненты, принадлежащей $(-\infty, -\gamma^2/4)$. Действительно, если рассмотреть симметричное продолжение областей $\Omega_\pm$ через границу $y = 0$ и четное по y продолжение решения, то провозглашенные результаты для оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом следуют из цитированных работ. Остается заметить, что у чётных собственных решений нормальная производная обращается в ноль при $y = 0$.

В дальнейшем мы изучаем собственные функции отрицательного спектра описанного самосопряженного оператора A, который также естественно ассоциировать с оператором Шрёдингера с сингулярным δ-потенциалом с носителем на луче l в верхней полуплоскости, $A = -\triangle_{\gamma,\delta}$, см. [5].

2.1. О спектре задачи Робэна для оператора Лапласа в угле . Поучительно рассмотреть родственную задачу, допускающую явное вычисление собственных функций и собственных чисел. Рассмотрим область Ω_*, которая симметрична Ω_- относительно оси Ox. Назовем клином угловую область $\overline{\Omega_* \cup \Omega_-}$ раствора $2\bar{\Phi} := 2(\pi - \Phi)$, причем $l \cup l_*$ является ее границей. Собственные функции v_m, $m = 1, 2, \ldots N(\bar{\Phi})$ самосопряженного оператора $A_w = -\triangle$ в клине с краевыми условиями Робэна на границе $l \cup l_*$ (см. детали в [6, 8])

$$\frac{\partial u}{\partial n} - \gamma u = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} \tag{7}$$

имеют вид [8]

$$v_n(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{n-1} C_m \left(\mathrm{e}^{-k_n r \cos[2\Phi m - \bar{\varphi}]} + \mathrm{e}^{-k_n r \cos[2\Phi m + \bar{\varphi}]} \right). \tag{8}$$

Постоянные C_m в (8) находятся явно подстановкой в краевое условие, $C_0 = 1$,

$$C_m = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{m} \frac{\sin(\Phi[2k-1]) - \gamma/k_n}{\sin(\Phi[2k-1]) + \gamma/k_n}.$$

Собственные функции четные по $\bar{\varphi}$ и, следовательно, удовлетворяют условию Неймана на оси Ox. Собственные числа имеют вид

$$E_n^w = -\frac{\gamma^2}{\sin^2(\bar{\Phi}[2n-1])}, \quad k_n = \sqrt{-E_n^w},$$

$n = 1, 2, \ldots N(\bar{\Phi})$. Их число $N(\bar{\Phi})$ конечно и зависит от величины раствора клина $2\bar{\Phi}$. Если $\bar{\Phi} \in [\pi/6, \pi/2)$, то собственное лишь одно $E_1^w = -\frac{\gamma^2}{\sin^2(\Phi)}$, $N(\bar{\Phi}) = 1$. При $\bar{\Phi} \in [\pi/10, \pi/6)$ их два, $N(\bar{\Phi}) = 2$. При переходе значения $\bar{\Phi}$ через величины $\frac{\pi}{2}\frac{1}{2k-1}$ $(k = 2, 3, \ldots)$ число собственных значений изменяется на единицу и $N(\bar{\Phi}) = \mathrm{ent}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2\bar{\Phi}} - 1\right)\right) + 1$ ($\mathrm{ent}(\cdot)$ – целая часть числа), замечая что функция $N(\bar{\Phi})$ кусочно постоянна и в точках $\frac{\pi}{2}\frac{1}{2k-1}$ непрерывна справа. Существенный (непрерывный) спектр задачи заполняет луч $[-\gamma^2, \infty)$. Мы используем известную информацию о спектре в этой задаче в дальнейшем.

§3. Представление Конторовича–Лебедева (КЛ) для собственных функций и задача для функционально-разностного уравненя

Используем неполное разделение переменных, ищем решение в виде интеграла КЛ ($\kappa = \sqrt{-E}$)

$$u^{\pm}(r, \varphi) = \frac{1}{\mathrm{i}\pi} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \sin \pi\nu K_\nu(\kappa r)\, u_\nu^{\pm}(\varphi) \mathrm{d}\nu. \tag{9}$$

Подстановкой представлений (9) в уравнения (1), учитывая, что

$$\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d}{dz} - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) \right\} K_\nu(z) = 0$$

(K_ν функция Макдональда) и $\left(\frac{d^2}{d\varphi^2} + \nu^2\right) u_\nu^{\pm}(\varphi) = 0$, формально находим

$$u_\nu^{+}(\varphi) = H^{+}(\nu)\, \frac{\cos(\nu\varphi)}{\cos(\nu\Phi)}$$

при $\varphi \in [0, \Phi]$ и

$$u_\nu^{-}(\varphi) = H^{-}(\nu)\, \frac{\cos(\nu\bar{\varphi})}{\cos(\nu\bar{\Phi})}$$

при $\varphi \in [\Phi, \pi]$, $\bar{\Phi} = \pi - \Phi, \bar{\varphi} = \pi - \varphi$. Сходимость интегралов КЛ может быть проверена и вычисления обоснованы, если мы выберем соответствующий задаче класс неизвестных пока мероморфных функций $H^{\pm}(\cdot)$, что мы вскоре и сделаем. Представления (9) принимают вид

$$u^+(r,\varphi) = \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \sin\pi\nu K_\nu(\kappa r)\, H^+(\nu)\,\frac{\cos(\nu\varphi)}{\cos(\nu\Phi)}\mathrm{d}\nu, \quad \varphi \in [0,\Phi], \tag{10}$$

$$u^-(r,\varphi) = \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \sin\pi\nu K_\nu(\kappa r)\, H^-(\nu)\,\frac{\cos(\nu\bar{\varphi})}{\cos(\nu\bar{\Phi})}\mathrm{d}\nu, \quad \varphi \in [\Phi,\pi]. \tag{11}$$

Отметим, что краевое условие Неймана (2) выполнено в силу выбора решений $u_\nu^{\pm}$. Подставим представления решений (10), (11) в краевое условие (4), тогда, если

$$H^+(\nu) = H^-(\nu), \tag{12}$$

то это краевое условие будет выполнено. Обратимся к граничному условию (3), имеем

$$\frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}\nu\,\sin\pi\nu$$

$$\times\left(\frac{K_\nu(\kappa r)}{\kappa r}\left(H^+(\nu)(-\nu)\tan(\nu\Phi)+H^-(\nu)(-\nu)\tan(\nu\bar{\Phi})\right)-\frac{\gamma}{\kappa}H^+(\nu)K_\nu(\kappa r)\right)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}\nu \sin\pi\nu\left(-\frac{1}{2}\right)(K_{\nu+1}(\kappa r) - K_{\nu-1}(\kappa r))$$

$$\times H^+(\nu)[\tan(\nu\Phi) + \tan(\nu\bar{\Phi})] - \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}\nu \sin\pi\nu\frac{\gamma}{\kappa}H^+(\nu) = 0,$$

где мы использовали условие (12) и соотношение

$$\frac{K_\nu(z)}{z} = \frac{K_{\nu+1}(z) - K_{\nu-1}(z)}{2\nu}$$

(см. [18]). Для дальнейшего удобно ввести новую неизвестную

$$D_+(\nu) = H^+(\nu)[\tan(\nu\Phi) + \tan(\nu\bar{\Phi})]. \tag{13}$$

Продолжая преобразование краевого условия (3), получаем ($\nu\pm 1\to\nu$)

$$\frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathrm{d}\nu\sin\pi\nu\left(-\frac{1}{2}\right)\left(K_{\nu+1}(\kappa r)-K_{\nu-1}(\kappa r)\right)D_+(\nu)$$

$$-\frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathrm{d}\nu\sin\pi\nu\frac{\gamma}{\kappa}\frac{D_+(\nu)}{[\tan(\nu\Phi)+\tan(\nu\bar{\Phi})]}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int\limits_{-\mathrm{i}\infty+1}^{\mathrm{i}\infty+1}\mathrm{d}\nu\sin\pi\nu\frac{1}{2}K_\nu(\kappa r)D_+(\nu-1)$$

$$-\frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int\limits_{-\mathrm{i}\infty-1}^{\mathrm{i}\infty-1}\mathrm{d}\nu\sin\pi\nu\frac{1}{2}K_\nu(\kappa r)D_+(\nu+1)$$

$$-\frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathrm{d}\nu\sin\pi\nu\frac{\gamma}{\kappa}\frac{D_+(\nu)}{[\tan(\nu\Phi)+\tan(\nu\bar{\Phi})]}$$

$$=-\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathrm{d}\nu\sin\pi\nu K_\nu(\kappa r)$$

$$\times\left(D_+(\nu+1)-D_+(\nu-1)+\frac{2\gamma}{\kappa}\frac{D_+(\nu)}{[\tan(\nu\Phi)+\tan(\nu\bar{\Phi})]}\right)=0,$$

где мы деформировали контуры интегрирования на мнимую ось, что оказывается возможным.

В результате, если неизвестная D_+ удовлетворяет уравнению

$$D_+(\nu+1)-D_+(\nu-1)-2\mathrm{i}\Lambda W(\nu)D_+(\nu)=0, \tag{14}$$

где

$$W(\nu)=\frac{2\mathrm{i}}{[\tan(\nu\Phi)+\tan(\nu\bar{\Phi})]},\quad \Lambda=\frac{\gamma}{2\kappa},$$

то граничное условие (3) выполнено. Легко проверить, что мероморфный потенциал $W(\cdot)$ является нечетной функцией, с простым полюсом в нуле и асимптотикой

$$W(\nu)=1+O(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\nu\bar{\Phi}})$$

при $\nu\to\mathrm{i}\infty$ вдоль мнимой оси и $W(\nu)\geqslant 0$ при $\nu\in\mathrm{iR}_+$.

Заметим, что нелокальный характер функционально-разностного уравнения (14) по переменной ν отражает факт неполного разделения переменных в задаче. Теперь естественно ввести класс $\mathcal{M}$ мероморфных функций D_+,

- $D_+(\nu) = D_+(-\nu)$ четная
- $D_+(\cdot)$ голоморфна в полосе $\Pi(-\varepsilon, \varepsilon) := \{\nu \in \mathrm{C} : -\varepsilon < \Re(\nu) < \varepsilon\}$ для некоторого $\varepsilon > 0$
- $\sin \pi\nu D_+(\nu - 1)$ голоморфна в полосе $\Pi(0, 1)$ и непрерывна в ее замыкании
- $\sin \pi\nu D_+(\nu + 1)$ голоморфна в $\Pi(-1, 0)$ и непрерывна в замыкании этой полосы
- $|D_+(\nu)| < C|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu[\pi/2+\delta_0]}|$, $\nu \to \mathrm{i}\infty$, $\nu \in \mathrm{iR}$ для некоторого $\delta_0 > 0$

Отметим, что последнее условие выполнено для собственных функций дискретного спектра. Для решений, отвечающих существенному спектру его надо заменить на $|D_+(\nu)| < C|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi/2}\nu^{-\delta_*}|$, $\nu \to \mathrm{i}\infty$, $\nu \in \mathrm{iR}$ для некоторого $\delta_* \geqslant 0$.

Легко проверить, что ввиду оценки

$$K_\nu(z) \sim \mathrm{const}\frac{\nu^{-1/2}\cos(\nu[\pi/2 + |\arg(z)|])}{\sin(\pi\nu)},$$

при $\nu \to \mathrm{i}\infty$ и $\mathrm{Re}\,(\nu) = 0$ для $|\arg z| \leqslant \pi/2$, где $|z|$ фиксировано, для решений D_+ уравнения (14) из класса $\mathcal{M}$ интегралы КЛ (10),(11) равномерно сходятся и, более того, наши формально проведенные вычисления вполне обоснованы.

Лемма 3.1. *Если $D_+ \in \mathcal{M}$ и выполнены соотношения* (14)*,* (13) *и* (12)*, то интегральные представления КЛ* (10)*,* (11) *удовлетворяют уравнению* (1) *и краевым условиям* (2)–(4) *в классическом смысле.*

Заметим, что проверка условия Мейкснера (5) также возможна и вполне аналогична предложенной в [13], в параграфе 5.2.2. Далее мы изучим вопрос существования нетривиальных решений D_+ уравнения (14) для соответствующих характеристических значений Λ, а затем, вычислим асимптотику решений $u^{\pm}$ при $r \to \infty$. Оценка (6) в случае дискретного спектра является простым следствием полученной асимптотики. Аналогично исследуется асимптотическое поведение обобщенных собственных функций существенного (непрерывного) спектра.

3.1. Функционально-разностное уравнение для задаче Робэна в угле. Для задачи Робэна в угле (см. раздел 2.1) представление КЛ для решений, удовлетворяющих условию Неймана на Ox имеет вид

$$u(r,\bar\varphi)=\frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\sin\pi\nu K_\nu(kr)H(\nu)\frac{\cos(\nu\bar\varphi)}{\cos(\nu\bar\Phi)}\mathrm{d}\nu,\quad \bar\varphi\in[0,\bar\Phi],$$

причем

$$D(\nu)=H(\nu)\tan(\nu\bar\Phi)$$

и

$$D(\nu+1)-D(\nu-1)-2\mathrm{i}\Lambda V(\nu)D(\nu)=0, \tag{15}$$

где

$$V(\nu)=\frac{\mathrm{i}}{\tan(\nu\bar\Phi)},\quad \Lambda=\frac{\gamma}{k}.$$

Соответствующие вычисления и описание класса функций повторяет изложенные выше. Отметим, что функционально-разностное уравнение (15) второго порядка с мероморфным потенциалом $V(\nu)=\mathrm{i}\cot(\nu\bar\Phi)$ является прямым аналогом функционально-разностного уравнения Мерилендской модели [19], допускающей эффективное построение решений в квадратурах и их исследование. Это обстоятельство отражает тот факт, что мы смогли найти собственные функции и собственные числа в явной форме (8). Нетрудно получить и явные выражения для v_n в виде интеграла КЛ, а именно, вычислить $D=D_n^w$ и $\Lambda=\Lambda_n^w$, удовлетворяющие уравнению (15).

Для этого воспользуемся известным интегральным представлением 6.795(1) в [18]

$$\mathrm{e}^{-a\cosh(b)}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \mathrm{d}x\cos(bx)\,K_{\mathrm{i}x}(a),$$

$a>0,\quad |\Im b|<\pi/2$. Представив экспоненты в выражении для v_n в виде интеграла, после несложных преобразований найдем

$$D_n^w(\nu)=2\,\frac{\sin\bar\Phi\nu}{\sin\pi\nu}\sum_{m=0}^{n-1}C_m\cos(2m\bar\Phi\nu)$$

и $\Lambda_n^w=\sin(\bar\Phi t_n)$, $t_n=2n-1$, $\bar\Phi t_n<\pi/2$. [2] Очевидна следующая оценка

$$|D_n^w(\nu)|<C\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu[\pi-t_n]}\right|,$$

[2] Непосредственная подстановка выражений для D_n^w и Λ_n^w в уравнение (15) может служить проверкой их правильности.

при $\nu \to \mathrm{i}\infty$, $\nu \in \mathrm{iR}$.

Естественно назвать Λ_n^w характеристическими числами, а $D_n^w(\nu)$ собственными функциями уравнения. Далее мы придадим точный смысл этим терминам, связав их с некоторым самосопряженным интегральным оператором K_w.

§4. Редукция к интегральному уравнению и спектральные свойства интегрального оператора

Наша задача в этом параграфе свести задачу построения решений однородного уравнения (14) к изучению решений интегрального уравнения, связанного с (14). Для этого воспользуемся следующим утверждением (см., например, раздел 1.6.5 в [1, 13]), которое равносильно использованию преобразования Фурье по мнимой оси.

Лемма 4.1. *Пусть $q(\nu)$ голоморфна при $\nu \in \Pi(-\delta, \delta)$ за исключением нуля, где она имеет простой полюс, $|q(\nu)| \leqslant c_H \mathrm{e}^{-\varkappa|\nu|}, |\nu| \to \infty, \varkappa > 0$ в этой полосе, $q(\nu) = -q(-\nu)$. Тогда четное решение $s(\nu)$ уравнения*

$$s(\nu+1) - s(\nu-1) = 2\mathrm{i}q(\nu),$$

которое регулярно (голоморфно) в полосе $\nu \in \Pi(-1-\delta, 1+\delta) \setminus \{\pm 1\}$ и экспоненциально убывает при $|\nu| \to \infty$ в ней, имеет вид

$$s(\nu) = -\frac{1}{2} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} d\tau q(\tau) \frac{\sin \pi\tau}{\cos \pi\tau + \cos \pi\nu}, \quad \nu \in \Pi(-1-\delta, 1+\delta).$$

Воспользуемся этим утверждением, и уравнение (14) преобразуется к

$$D_+(\nu) = -\frac{\Lambda}{2} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} d\tau \frac{W(\tau) \sin \pi\tau}{\cos \pi\tau + \cos \pi\nu} D_+(\tau), \quad \nu \in \Pi(-1, 1). \tag{16}$$

Представление (16) позволяет вычислить D_+ в полосе $\Pi(-1, 1)$, если мы нашли D_+ на мнимой оси. Однако, полагая $\nu \in \mathrm{iR}$ и учитывая четность D_+ , мы приходим к интегральному уравнению

$$D_+(\nu) = -\Lambda \int\limits_{0}^{\mathrm{i}\infty} d\tau \frac{W(\tau) \sin \pi\tau}{\cos \pi\tau + \cos \pi\nu} D_+(\tau), \quad \nu \in \mathrm{iR}_+. \tag{17}$$

Решив уравнение (17), продолжим его решение по четности на мнимую ось, а затем с помощью (16) в полосу $\Pi(-1,1)$ как голоморфную функцию. Использование (14) позволяет продолжить решение этого уравнения как мероморфную функцию на всей комплексной плоскости.

Теперь мы обратимся к существованию нетривиальных решений интегрального уравнения (17) для некоторых Λ. Предварительно преобразуем интегральное уравнение к более удобному виду с самосопряженным интегральным оператором. Введем

$$\mathcal{D}(\nu) = \frac{D_+(\nu)}{\sqrt{W(\nu)}}, \quad \nu \in \mathrm{iR}_+,$$

тогда

$$\mathcal{D}(\nu) + \Lambda \int\limits_0^{\mathrm{i}\infty} d\tau \frac{\sqrt{W(\nu)W(\tau)}\sin\pi\tau}{\cos\pi\tau + \cos\pi\nu}\mathcal{D}(\tau) = 0, \quad \nu \in \mathrm{iR}_+. \tag{18}$$

Введем новую неизвестную и новые переменные в (18)

$$x = \frac{1}{\cos\pi\nu}, \quad y = \frac{1}{\cos\pi t}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\pi} = \frac{\sin\pi t}{\cos^2\pi t}\mathrm{d}t,$$
$$\rho(x) = \cos\pi\nu\mathcal{D}(\nu)|_{x=\frac{1}{\cos\pi\nu}},$$

$x, y \in [0,1]$,

$$\rho(x) - \frac{\Lambda}{\pi}\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \frac{\sqrt{v(x)v(y)}}{x+y}\rho(y) = 0, \tag{19}$$

где

$$v(y) = W(t)|_{y=\frac{1}{\cos\pi t}}$$

и

$$v(y) = 1 + O(y^b) y \to 0, \quad b = \frac{2\bar{\Phi}}{\pi} < 1, \quad v(y) = O(1/\sqrt{1-y}), \quad y \to 1-0.$$

Интегральный оператор K в интегральном уравнении (19) ограничен $\|K\| \leqslant V^*$, самосопряжен в $L_2(0,1)$ и положителен,[3]

$$(K\rho)(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \frac{\sqrt{v(x)v(y)}}{x+y}\rho(y).$$

[3]Этот оператор относится к известным в литературе операторам Ханкеля.

Характеристический параметр Λ связан со спектральным параметром $\lambda = \Lambda^{-1}$, $K\rho = \lambda\rho$.

4.1. Интегральное уравнение для задачи Робэна в угле и спектр интегрального оператора. Легко провести аналогичную редукцию функционально-разностного уравнения (15) к интегральному,

$$x = \frac{1}{\cos \pi\nu}, \quad y = \frac{1}{\cos \pi t}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\pi} = \frac{\sin \pi t}{\cos^2 \pi t}\mathrm{d}t,$$

$$s(x) = \cos \pi\nu D(\nu)|_{x=\frac{1}{\cos \pi\nu}},$$

$x, y \in [0, 1]$,

$$s(x) - \frac{\Lambda}{\pi}\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \frac{\sqrt{v_w(x)v_w(y)}}{x+y}s(y) = 0, \tag{20}$$

где

$$v_w(y) = V(t)|_{y=\frac{1}{\cos \pi t}}.$$

Собственные функции и собственные числа оператора

$$(K_w s)(x) := \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \frac{\sqrt{v_w(x)v_w(y)}}{x+y}s(y)$$

имеют вид

$$d_n(x) = \cos \pi\nu D_n^w(\nu)|_{x=\frac{1}{\cos \pi\nu}}, \quad \lambda_n^w = [\Lambda_n^w]^{-1} = \frac{1}{\sin(\bar{\Phi}t_n)},$$
$$t_n = 2n-1, \quad \bar{\Phi}t_n < \pi/2.$$

Из явного выражения для D_n^w следует, что $d_n \in L_2(0,1)$. Отметим, что дискретный спектр $\sigma_d(K_w)$ оператора K_w конечен и состоит из $N(\bar{\Phi})$ собственных чисел $\lambda_n^w \in \left(1, \frac{1}{\sin(\bar{\Phi})}\right]$, $n = 1, 2, \dots N(\bar{\Phi})$, собственные числа занумерованы в порядке убывания их величины. С уменьшением раствора клина $2\bar{\Phi}$ их число $N(\bar{\Phi})$ неограниченно возрастает. Существенный (непрерывный) спектр $\sigma_e(K_w)$ совпадает с отрезком $[0, 1]$. Соответсвующие собственные функции непрерывного спектра также могут быть выписаны явно.

4.2. Спектр и собственные функции интегрального оператора K. Изучение спектра интегрального оператора K требует дополнительных усилий, хотя его структура вполне аналогична структуре спектра оператора K_w. Для этого удобно представить оператор в виде

$$K = K_d + [K - K_d],$$

где[4]

$$(K_d s)(x) := \frac{1}{\pi}\int_0^1 \mathrm{d}y \frac{s(y)}{x+y}$$

оператор Диксона (см. раздел 11.18 в [21] и [20]),

$$([K - K_d]\rho)(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \mathrm{d}y \frac{\sqrt{v(x)v(y)} - 1}{x+y}\rho(y).$$

Оператор Диксона представляет собой явно решаемую модель. Его спектр представляет собой отрезок существенного спектра $\sigma(K_d) = [0,1]$. Действительно, основываясь на явном выражении резольвенты оператора Диксона, можно построить спектральную меру самосопряженного оператора K_d, интегрируя по контуру в комплексной плоскости [1], см. приложение. Для любого $\mu \in [0,1]$ явно строится сингулярная вейлевская последовательность [2], гл.9, поэтому существенный спектр $\sigma_e(K_d)$ оператора Диксона совпадает с отрезком $[0,1]$.

Заметим теперь, что оператор $[K - K_d]$ вполне непрерывен в $L_2(0,1)$, так как является оператором Гильберта–Шмидта ввиду оценок

$$|v(x)v(y) - 1| = O\left(x^b + y^b\right),\ x,\ y \to 0,$$
$$\sqrt{v(x)v(y)} = O\left((1-x)^{-\frac{1}{4}}(1-y)^{-\frac{1}{4}}\right),\ x \to 1-0,\ y \to 1-0.$$

Используя теорему Вейля об устойчивости существенного спектра при компактных возмущениях, мы может утверждать, что существенный спектр оператора K совпадет с отрезком $[0,1]$, $\sigma_e(K) = [0,1]$.

Обратимся к существованию дискретной компоненты $\sigma_d(K) \subset [1, V^*]$, т.е. к существованию нетривиальных решений $\rho_m \in L_2(0,1)$ и λ_m таких, что

$$K\rho_m = \lambda_m \rho_m.$$

[4] Такое разбиение использовалось в задаче дифракции на импедансном конусе [20].

Мы установим непустоту дискретной компоненты спектра, используя принцип минимакса [2], если покажем, что существует такое $\rho \in L_2(0,1)$ и $d > 0$, что

$$\frac{(K\rho,\rho)}{(\rho,\rho)} \geqslant 1 + d.$$

В качестве тестовой функции возьмем

$$h(x) = [v(x)]^{-1/2}.$$

Нормируем ее $\rho(x) = \frac{h(x)}{\|h(x)\|}$, $\|h(x)\|^2 = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{v(x)}$. Тогда

$$(K\rho,\rho) = \frac{1}{\pi\|h(x)\|^2}\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^1 \mathrm{d}y \frac{1}{x+y} = \frac{2\log 2}{\pi \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{v(x)}}.$$

Предположим теперь, что

$$\frac{2\log 2}{\pi} > \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{v(x)}, \tag{21}$$

тогда

$$(K\rho,\rho) > 1.$$

Условие на потенциал $v(x)$ запишем в виде

$$\pi\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\cosh^2(\pi t)}\frac{\sinh(\pi t)}{W(\mathrm{i}t)} < \frac{2\log 2}{\pi}.$$

Последнее условие может быть проверено численно. Оказывается, что оно выполнено только если $\bar{\Phi}$ достаточно мало и, значит, дискретный спектр K не пуст. Стоит отметить, однако, что условие (21) на потенциал является достаточным. В действительности, дискретный спектр не пустой для всех $\Phi \in (\pi/2, \pi)$, что следует из результатов непустоты дискретного спектра в исходной задаче для оператора A, [5].

Обсудим теперь конечность дискретного спектра для оператора K. Для этого сравним его с оператором K_w, который имеет конечный спектр. Последнее следует из конечности спектра оператора A_w в задаче Робэна для угла. Ввиду неравенства для потенциалов

$$\frac{2\mathrm{i}}{[\tan(\nu\Phi) + \tan(\nu\bar{\Phi})]} \leqslant \frac{\mathrm{i}}{\tan(\nu\bar{\Phi})}$$

и $W(\nu) \leqslant V(\nu)$, заключаем

$$0 \leqslant K \leqslant K_w.$$

Используя вариационный принцип и его следствия [2], заключаем, что для функций распределения собственных значений справедливо неравенство

$$\pi_K(\lambda) \leqslant \pi_{K_w}(\lambda), \quad \lambda \geqslant 1,$$

а также аналогичные неравенства для собственных чисел $\lambda_m(K) \leqslant \lambda_m(K_w) = \frac{1}{\sin(\Phi t_m)}$. Отсюда следует конечность дискретного спектра оператора K, а также справедлива

Лемма 4.2. *При* $\bar{\Phi} \in (0, \pi/2)$ *спектр оператора* K *состоит из существенного спектра* $\sigma_e(K) = [0, 1]$ *и конечной дискретной части* $\sigma_d(K) = \cup_m \lambda_m(K) \subset \left(1, \frac{1}{\sin(\bar{\Phi})}\right]$.

§5. О мероморфных решениях уравнения (14)

Используя соотношение

$$D_+(\nu) = \frac{\sqrt{W(\nu)}}{\cos \pi\nu}\, \rho(x)|_{x=\frac{1}{\cos \pi\nu}},$$

а также описанную процедуру мероморфного продолжения D_+ на всю комплекную плоскость, мы получаем из (13)

$$H^+(\nu) = \frac{D_+(\nu)}{[\tan(\nu\Phi) + \tan(\nu\bar{\Phi})]}$$

искомую неизвестную в представлении КЛ.

Принадлежность D_+ классу $\mathcal{M}$ следует их наших построений. Наиболее содержательной является проверка оценки

$$|D_+(\nu)| < C \left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu[\pi - \tau]} \right|,$$

$\nu \to \mathrm{i}\infty$, $\nu \in \mathrm{iR}$ и при некоторых $\tau, \Re\tau \in (0, \pi/2]$. Введем параметризацию для характеристического параметра

$$\Lambda_m = \sin \tau_m, \quad \tau_m \in (0, \pi/2)$$

если $\lambda_m = (\Lambda_m)^{-1} \in \sigma_d(K) \subset (1, 1/\sin \bar{\Phi}]$ и

$$\Lambda = \sin \tau, \quad \tau = \pi/2 + \mathrm{i}t, \ t \geqslant 0,$$

если $\lambda = (\Lambda)^{-1} \in \sigma_e(K) = [0, 1]$.

Собственные решения $D_{+,m}(\nu)$ уравнения (14) при $\Lambda_m = \sin\tau_m$ таковы, что ($\rho_m \in L_2(0,1)$)

$$\int\limits_0^{i\infty} \left|H_m^+(\nu)\right|^2 |\sin(\pi\nu)W(\nu)|\,|d\nu| < \infty, \tag{22}$$

и допускают оценку

$$|D_{+,m}(\nu)| < C\left|e^{i\nu[\pi-\tau_m]}\right|,$$

$\nu \to i\infty$, $\nu \in i\mathrm{R}$. Эта оценка может быть получена следующим образом. Используем преобразование Фурье по мнимой оси

$$F_m(\alpha) = \frac{1}{i}\int\limits_{iR} D_{+,m}(\nu)e^{i\nu\alpha}d\nu,$$

где, принимая во внимание оценку (22), $F_m(\cdot)$ голоморфна в полосе $\Pi_{\pi/2}$ и четная. Применим преобразование Фурье уравнению (14) при $\Lambda_m = \sin\tau_m$ и после некоторых вычислений получим

$$F_m(\alpha) = \frac{-\sin\tau_m}{\sin\alpha - \sin\tau_m}\,\frac{v.p.}{i}\int\limits_{iR}[W(\nu)+1]D_{+,m}(\nu)e^{i\nu\alpha}d\nu.$$

Можно показать, что интеграл в последней формуле голоморфен в полосе $\alpha \in \Pi(-\pi+\tau_m-d, \pi-\tau_m+d)$ для $d > 0$, что требует некоторой работы. Очевидно, что ближайший к мнимой оси полюс $F_m(\cdot)$ расположен в точке $\pi-\tau_m$ и, в силу четности, в $-\pi+\tau_m$. Используя обратное преобразование Фурье, приходим к требуемой оценке. Вполне аналогично, при $\Lambda = \sin\tau$ и $\tau = \pi/2 + it$, $t \geqslant 0$ получаем

$$|D_+(\nu)| < C\left|e^{i\nu[\pi-\tau]}\right| = \left|e^{i\nu\pi/2}\right|, \quad |H^+(\nu)| < C\left|\frac{1}{\sin\nu[\pi-\tau]}\right|,$$
$$\nu \to i\infty, \quad \nu \in i\mathrm{R}.$$ [5]

§6. Асимптотика собственных функций на больших расстояниях

Мы убедились в существовании собственных функций и получили их интегральное представление КЛ

$$u_m^+(r,\varphi) = \frac{1}{i\pi}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \sin(\pi\nu)K_\nu(\kappa_m r)\,H_m^+(\nu)\,\frac{\cos(\nu\varphi)}{\cos(\nu\Phi)}d\nu, \quad \varphi \in [0,\Phi], \tag{23}$$

$$u_m^-(r,\varphi) = \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \sin(\pi\nu)K_\nu(\kappa_m r)\, H_m^-(\nu)\frac{\cos(\nu\bar\varphi)}{\cos(\nu\bar\Phi)}\mathrm{d}\nu, \quad \bar\varphi\in[0,\bar\Phi], \quad (24)$$

где m произвольно фиксировано,

$$\kappa_m = \sqrt{-E_m} = \frac{\gamma}{2\sin\tau_m}.$$

Аналогичное представление справедливо для функций непрерывного спектра, $\kappa = \sqrt{-E} = \frac{\gamma}{2\sin\tau}$, $\tau = \pi/2 + \mathrm{i}t,\ t \geqslant 0$.

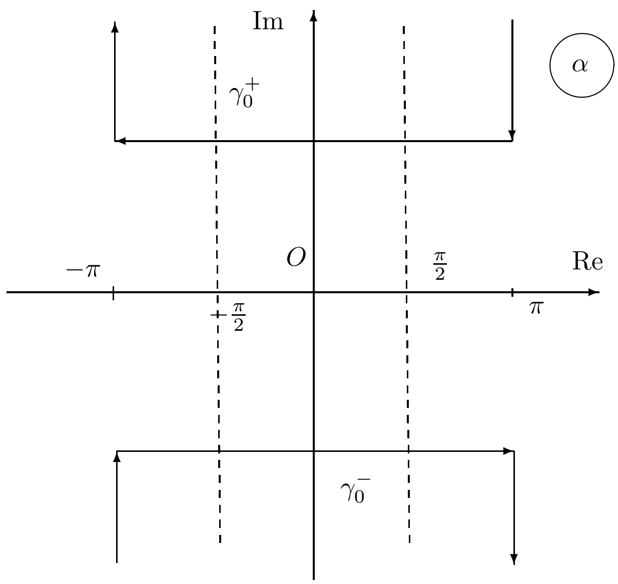

Рис. 2. Контур Зоммерфельда $\gamma_0 = \gamma_0^+ \cup \gamma_0^-$.

Использование асимптотики функции Макдональда при $\kappa_m r \to \infty$

$$K_\nu(\kappa r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\exp(-\kappa r)}{\sqrt{\kappa r}}\,(1 + O(1/[\kappa r]))$$

не приведет к искомой асимптотике собственной функции, так как интегралы в (23),(24) окажутся расходящимися. В связи с этим, приходится действовать более изощренно, а именно, перейти к так называемому интегральному представлению Зоммерфельда.

6.1. Интегралы Зоммерфельда и свойства трансформант Зоммерфельда. Воспользуемся представлением Зоммерфельда для функции Макдональда в (23), (24)

$$K_\nu(z) = \frac{1}{4\mathrm{i}} \int\limits_{\gamma_0} \mathrm{e}^{z\cos\alpha} \frac{\sin(\nu\alpha)}{\sin(\pi\nu)} \mathrm{d}\alpha, \quad \Re z > 0,$$

где контур интегрирования γ_0 состоит из двух петель, Рис. 2. Переставим порядки интегрирования, что может быть обосновано. Получим

$$u_m^\pm(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\gamma_0} \mathrm{d}\alpha \mathrm{e}^{\kappa_m r\cos\alpha} F_m^\pm(\alpha,\varphi), \tag{25}$$

где

$$F_m^+(\alpha,\varphi) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \sin(\nu\alpha) H_m^+(\nu) \frac{\cos(\nu\varphi)}{\cos(\nu\Phi)} \mathrm{d}\nu = f_m^+(\alpha+\varphi) + f_m^+(\alpha-\varphi),$$

$$f_m^+(\alpha) = \frac{1}{4\mathrm{i}} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} H_m^+(\nu) \frac{\sin(\nu\alpha)}{\cos(\nu\Phi)} \mathrm{d}\nu = \frac{v.p.}{4\mathrm{i}} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} H_m^+(\nu) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\alpha}}{\mathrm{i}\cos(\nu\Phi)} \mathrm{d}\nu \tag{26}$$

и

$$F_m^-(\alpha,\varphi) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \sin(\nu\alpha) H_m^-(\nu) \frac{\cos(\nu\bar\varphi)}{\cos(\nu\bar\Phi)} \mathrm{d}\nu = f_m^-(\alpha+\bar\varphi) + f_m^-(\alpha-\bar\varphi),$$

$$f_m^-(\alpha) = \frac{1}{4\mathrm{i}} \int\limits_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} H_m^-(\nu) \frac{\sin(\nu\alpha)}{\cos(\nu\bar\Phi)} \mathrm{d}\nu. \tag{27}$$

Отметим, что эти представления (25), (26), (27) справедливы и для функцций нерерывного спектра, т. е. с заменой $\kappa_m \to \kappa = \gamma/(2\sin\tau)$, $\tau = \pi/2 + \mathrm{i}t,\ t \geqslant 0$. В силу установленных оценок для $H^\pm$, нечетные мероморфные функции $f^\pm$ голоморфны соответсвенно в основных полосах $\Pi_{\pi+\Phi-\Re\tau} := \Pi(-[\pi-\Re\tau+\Phi], \pi-\Re\tau+\Phi)$ для $+$ и $\Pi_{\pi+\bar{\Phi}-\tau} := \Pi(-[\pi-\Re\tau+\bar{\Phi}], \pi-\Re\tau+\bar{\Phi})$ для $-$. Для дискретного спектра надо заменить $\tau \to \tau_m$.

Интеграл Зоммерфельда

$$\begin{aligned} u^\pm(r,\varphi) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_0} \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{e}^{\kappa r\cos\alpha}(f^\pm(\alpha+\varphi^\pm)+f^\pm(\alpha-\varphi^\pm)) \\ &= \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_0} \mathrm{d}\alpha \mathrm{e}^{\kappa r\cos\alpha} f^\pm(\alpha+\varphi^\pm), \end{aligned} \tag{28}$$

(здесь $\varphi^+ := \varphi$, $\varphi^- := \bar{\varphi} = \pi - \varphi$) хорошо приспособлен к вычислению асимптотики при $\kappa r \to \infty$ и является решением уравнения (1). Действительно, деформируя контур интегрирования γ_0 в перевальные $\gamma_0^\pi = \{\alpha : \Re\alpha = \pi\}$ и $\gamma_0^{-\pi} = \{\alpha : \Re\alpha = -\pi\}$, пересекаем особенности особенности трансформант Зоммерфельда $f^\pm$, т.е. полюсы. Вклад от полюсов, а также от точек перевала $\pm\pi$, определяет асимптотику интегралов Зоммерфельда [8]. (Заметим, что точки перевала решают уравнение $(\cos\alpha)' = 0$.) В связи с этим, принципиальное значение имеет вычисление полюсов трансформант $f^\pm$. Для этого, подставляя представления (28) в краевые условия, мы выведем функциональные уравнения (Малюжинца) для трансформант, которые голоморфны в указанных выше полосах и допускают мероморфное продолжение на всю комплесную плоскость.

Лемма 6.1. *Пусть нечетные функции $f^\pm$, определенные равенствами* (26), (27) *в основных полосах $\Pi_{\pi+\Phi-\Re\tau}$, $\Pi_{\pi+\bar{\Phi}-\Re\tau}$ соответственно, ограничены в этих полосах и аналитически продолжаются на комплексную плоскость как мероморфные функции. Тогда, если $f^\pm$ удовлетворяют функциональным уравнениям (Малюжинца)*

$$\begin{aligned} &(\sin\alpha-\sin\tau)f^+(\alpha+\Phi)-(\sin\alpha+\sin\tau)f^+(\alpha-\Phi) \\ &\quad = -(\sin\alpha-\sin\tau)f^-(\alpha+\bar{\Phi})+(\sin\alpha+\sin\tau)f^-(\alpha-\bar{\Phi}), \end{aligned} \tag{29a}$$

$$f^+(\alpha+\Phi)+f^+(\alpha-\Phi) = f^-(\alpha+\bar{\Phi})+f^-(\alpha-\bar{\Phi}), \tag{29b}$$

то представления Зоммерфельда (28) *удовлетворяют краевым условиям* (3), (4) *в классическом смысле.*

Заметим, что условие Неймана (2) выполнено в силу четности интеграла по φ. Проверка этого утверждения вполне традиционна и сводится к подстановке в краевые условия, интегрировании по частям, если необходимо, а также с учетом того, что интеграл $\frac{1}{4\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\gamma_0} \mathrm{d}\alpha\, S(\alpha)$ в указанном классе функций обращается в ноль, если четная часть подынтегрального выражения $\{S(\alpha)\}$ равна нулю, $S(\alpha) - S(-\alpha) = 0$, [15].

Систему функциональных уравнений Малюжинца (29a), (29b) удобно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} f^+(\alpha+\Phi) \\ f^-(\alpha+\bar{\Phi}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin\tau}{\sin\alpha-\sin\tau} & \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha-\sin\tau} \\ \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha-\sin\tau} & \frac{\sin\tau}{\sin\alpha-\sin\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^+(\alpha-\Phi) \\ f^-(\alpha-\bar{\Phi}) \end{pmatrix}, \qquad (30)$$

что позволяет продолжить $f^{\pm}$ из основных полос на комплексную плоскость как мероморфные функции. Более того, несложно найти ближайшие к мнимой оси полюсы трансформант, которые и могут дать основной вклад в асимптотику для некоторых направлений φ при $\kappa r \to \infty$. Действительно, записав первое уравнение в (30) в виде

$$f^+(\alpha+2\Phi) = \frac{\sin\tau}{\sin(\alpha+\Phi)-\sin\tau}\, f^+(\alpha) - \frac{\sin(\alpha+\Phi)}{\sin(\alpha+\Phi)-\sin\tau}\, f^-(\alpha+\Phi-\bar{\Phi}),$$

нетрудно установить, что ближайшие к мнимой оси полюсы трансформанты f^+ находится на границе полосы ее голоморфности при $\alpha = \pm a^+$, $a^+ = (\pi + \Phi - \tau)$. Если $\tau = \tau_m$, то это полюсы вещественные, а иначе $\tau = \pi/2 + \mathrm{i}t$, $t \geqslant 0$ для непрерывного спектра. Аналогично, для f^- ближайшие к мнимой оси полюсы расположены в $\alpha = \pm a^-$, $a^- = (\pi + \bar{\Phi} - \tau)$. При деформации контура Зоммерфельда в перевальные, вообще говоря, могут быть захвачены и другие полюсы. Однако, старший вклад в асимптотику дают полюса ближайшие к мнимой оси, которые мы также назовем главными. Как мы установим далее для собственных функций дискретного спектра ($\tau = \tau_m$), в области Ω_+ есть направления, для которых старший вклад определяется точками перевала и, тем самым, главные полюсы f^+ не захватываются и не дают вклада в асимптотику. С другой стороны, для собственных функций непрерывного спектра ($\tau = \pi/2 + \mathrm{i}t$) полюсы $\alpha = \pm(\pi + \bar{\Phi} - \tau)$ всегда захватываются и определяют старший член асимптотики собственной функции. В окрестности главных полюсов имеем

$$f^+(\alpha) = \frac{A^+}{\alpha - a^+} + \ldots, \quad f^-(\alpha) = \frac{A^-}{\alpha - a^-} + \ldots, \qquad (31)$$

где $A^{\pm} = \mathrm{res}_{\alpha=a^{\pm}}\{f^{\pm}(\alpha)\}$, а точки означают регулярную часть.

6.2. Асимптотика собственных функций. Пусть $\tau = \pi/2 + \mathrm{i}t$, $t \geqslant 0$ и $E = -\frac{\gamma^2}{4\sin^2\tau} \in [-\gamma^2/4, 0)$ принадлежит отрицательному непрерывному спектру, тогда деформируя контур Зоммерфельда в перевальные, для обобщенных собственных функций находим старший член асимптотики

$$u^{+}(r,\varphi) = 2A^{+}\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2\sin\tau} r\cos[\Phi-\varphi-\tau]}\left(1+o(1)\right), \tag{32}$$

$$u^{-}(r,\varphi) = 2A^{-}\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2\sin\tau} r\cos[\bar{\Phi}-\bar{\varphi}-\tau]}\left(1+o(1)\right), \tag{33}$$

где учтено, что $\kappa(\tau) = \frac{\gamma}{2\sin\tau}$.

Очевидно, что $\cos[\dots]$ в асимптотике (32), (33) является чисто вещественным на границе l, разделяющей области Ω_+ и Ω_-, а экспоненты ограничены, не убывают по κr, так как $\cos[\Phi - \varphi - \tau] = \sin(\Phi - \varphi)\cosh(t) - \mathrm{i}\cos(\Phi - \varphi)\sinh(t)$. Для остальных направлений, экспоненты убывают при $\kappa r \to \infty$. Это означает, что в асимптотическом смысле собственные функции непрерывного спектра сосредоточены в окрестности носителя сингулярного потенциала на больших расстояниях.

Вычисление асимптотики собственных функций дискретного спектра ($\tau = \tau_m$, $E = -\frac{\gamma^2}{4\sin^2\tau_m} < -\gamma^2/4$) требует выделения окрестности так называемых сингулярных направлений в Ω_+ и Ω_-, которые отвечают слиянию полюса и точки перевала при изменении угла φ. Это слияние оказывается возможным, так как полюсы расположены на вещественной оси и смещаются вдоль оси при вариации φ. Вне окрестности сингулярных направлений, асимптотика в старшем порядке описывается либо вкладом соответствующего полюса, либо вкладом точек перевала, и описывается разными, но элементарными выражениями. В окрестности сингулярных направлений роль переходной функции, отвечающей за ‘переключение’ асимптотического поведения собственной функции, играет интеграл Френеля.

Если обсуждать вклад в асимптотику главных полюсов, то стоит различать для области Ω_+ две ситуации. В первом случае направление φ таково, что либо главный полюс захвачен и находится вне окрестности точки перевала π

$$\pi - (a_m^{+} - \varphi) \geqslant \frac{\mathrm{const}}{(\kappa_m r)^{1/2-\epsilon}} > 0$$

либо когда главный полюс не захватывается при деформации контура в перевальные и расположен вне узкой окрестности точки перевала

$$-\pi + (a_m^+ - \varphi) \geqslant \frac{\text{const}}{(\kappa_m r)^{1/2-\epsilon}} > 0.$$

Во втором случае

$$|\pi - (a_m^+ - \varphi)| \leqslant \frac{\text{const}}{(\kappa_m r)^{1/2-\epsilon}},$$

φ таково, что главный полюс находится в асимптотически малой окрестности точки перевала.

В первом случае при деформации контура в перевальные вклад главного полюса дает

$$u_m^+(r,\varphi) = 2A_m^+ \mathrm{e}^{-\kappa_m r \cos[\Phi-\varphi-\tau_m]} + \delta u_m^+, \tag{34}$$

тогда как седловая точка отвечает за поправочный член

$$\delta u_m^+ = O\left(\frac{\mathrm{e}^{-\kappa_m r}}{\sqrt{\kappa_m r}}\right),$$

если другие полюсы трансформанты не захвачены. Однако, если захватываются и следующий полюс, то именно его вклад определяет поправку δu_m^+ в (34).[6]

С другой стороны, если полюсы $f_m^+(\alpha+\varphi)$ находятся вне полосы $\alpha \in \Pi_\pi$, то есть φ таково, что $\pi < a_m^+ - \varphi$ и $-\pi > -a_m^+ - \varphi$, основной вклад в асимптотику собственной функции определяется седловыми точками $\pm\pi$

$$u_m^+(r,\varphi) = 2[f_m^+(-\pi+\varphi) - f_m^+(\pi+\varphi)]\frac{\mathrm{e}^{-\kappa_m r}}{\sqrt{2\pi\kappa_m r}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\kappa_m r}\right)\right). \tag{35}$$

Рассмотрим теперь второй случай, главный полюс расположен в узкой окрестности точки перевала. Мы лишь кратко наметим соответствующие вычисления. В малой круговой окрестности $B_\pi([\kappa r]^{-1/2+\epsilon})$ точки перевала π апроксимируем $\cos\alpha$ в экспоненте интеграла (28) для u_m^+, $\cos\alpha = -1 + \frac{1}{2}(\alpha-\pi)^2 + \ldots$ и используем новую переменную

[6] Если этот следующий полюс находится в асимптотически малой окрестности точки перевала, то эта угловая область определяет аналогичную окрестность сингулярного направления для данного полюса.

интегрирования $t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}(\alpha - \pi)$. Имеем

$$\frac{A_m^+}{\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma_0^\pi \cap B_\pi([\kappa r]^{-1/2+\epsilon})} \mathrm{d}\alpha \frac{\mathrm{e}^{\kappa r \cos\alpha}}{(\alpha+\varphi) - a_m^+}$$

$$= \frac{A_m^+ \mathrm{e}^{-\kappa_m r}}{\pi \mathrm{i}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\kappa_m r t^2}}{(t - \mathrm{i}[(a_m^+ - \varphi) - \pi])} \left(1 + O([\kappa_m r]^{-1/2+\epsilon})\right),$$

где пределы интегрирования заменены на $\pm\infty$, что дает экспопенциально малую относительную ошибку при $\kappa_m r \to \infty$. Заметим, что, если полюс знаменателя находится в верхней полуплоскости переменной t, контур интегрирования проходит по вещественной оси. Однако, если $\mathrm{i}[(a_m^+ - \varphi) - \pi]$ в нижней полуплоскости, то контур охватывает его снизу. Полученный интеграл выражается в терминах интеграла Френеля в соответствии с разделом 6.3.1 в [16]

$$\Psi(z; s) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{e}^{-zt^2}}{(z-s)} = \pi \mathrm{i} \mathrm{e}^{-s^2 z}[1 - \mathcal{F}(-\mathrm{i}s\sqrt{z})]$$

где $\mathcal{F}(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\zeta \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$.

В итоге, из (35) находим для окрестности сингулярных направлений

$$u_m^+(r, \varphi) = \frac{A_m^+ \mathrm{e}^{-\kappa_m r}}{\pi \mathrm{i}} \Psi\left(\frac{1}{2}\kappa_m r; \mathrm{i}[(\Phi - \varphi) - \tau_m]\right) + \delta u^\pm(r, \varphi), \qquad (36)$$

причем поправка $\delta u^\pm(r, \varphi) = O\left(\frac{\mathrm{e}^{-\kappa_m r}\Psi}{[\kappa_m r]^{1/2-\epsilon}}\right)$.

Изучение асимптотики собственной функции в области Ω_- вполне аналогично предложенному выше для Ω_+. В области Ω_-, где $\pi - (a_m^- - \bar{\varphi}) \geqslant \frac{\mathrm{const}}{(\kappa_m r)^{1/2-\epsilon}} > 0$, вычет в главном полюсе $a_m^- - \bar{\varphi}$ дает основной вклад

$$u_m^-(r, \varphi) = 2A_m^- \mathrm{e}^{-\kappa_m r \cos[\bar{\Phi} - \bar{\varphi} - \tau_m]} \left(1 + o(1)\right). \qquad (37)$$

Поправочный член в (37) определяется либо вкладом следующего полюса, если он захвачен при деформации контура в перевальные, либо вкладом точек перевала в противном случае.

Старший член асимптотики определяется вкладом точек перевала и имеет вид

$$u_m^-(r,\varphi) = 2[f_m^-(-\pi+\bar\varphi) - f_m^-(\pi+\bar\varphi)]\frac{\mathrm{e}^{-\kappa_m r}}{\sqrt{2\pi\kappa_m r}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\kappa_m r}\right)\right), \quad (38)$$

если полюсы не захватыватся, то есть $\pi < (a_m^- - \bar\varphi) + \frac{\mathrm{const}}{(\kappa_m r)^{1/2-\epsilon}}$, $-\pi > -(a_m^- + \bar\varphi) + \frac{\mathrm{const}}{(\kappa_m r)^{1/2-\epsilon}}$. Если старший полюс может находится в асимптотичеси малой окрестности порядка $O\left(\frac{1}{\kappa_m r}\right)$ точки перевала, то старший член асимптотики выражается в терминах интеграла Френеля. Отметим, что конкретная реализация асимтотического поведения собственной функции, т. е. (34), (35) или (36) для Ω_+ или (37), (38) для Ω_-, зависит от величины τ_m и, следовательно, в конце концов определяется значением $\Phi \in (\pi/2, \pi)$.

Список литературы

1. M. A. Lyalinov, *Functional difference equations and eigenfunctions of a Schrödinger operator with δ'−interaction on a circular conical surface.* — Proc. Royal Soc. A, V. **476** (2020) 20200179, 2020. `http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2020.0179`
2. M. Sh .Birman, M. Z. Solomjak, *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert spaces.* — Dordrecht, Holland (1987).
3. T. Kato *Perturbation theory for linear operators.* — Springer-Verlag, Berlin (1995).
4. P. Exner, *Leaky quantum graphs: a review.* In:*Analysis on graphs and its applications.* — Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI., **77** (2008), 523–565.
5. B. Behrndt, P. Exner, V. Lotoreichik, *Schrödinger operators with δ- and δ'-interactions on Lipschitz surfaces and chromatic numbers of associated partitions.* — Reviews Math. Phys., **26**(08) (2014), 1450015–1450058. `DOI: 10.1142/S0129055X14500159`.
6. M. Khalile, K. Pankrashkin *Eigenvalues of Robin Laplacians in infinite sectors.* — Math. Nachrichten (2018) 928–965. `DOI: 10.1002/mana.201600314`
7. V. M. Babich, *A class of topographical waveguides.* — St. Petersburg Math. J., **22** (2011), 73–79.
8. М. А. Лялинов, *Комментарий о собственных функциях и собственных числах оператора Лапласа в угле с краевыми условиями Робэна.* — Запис. научн. семин. ПОМИ РАН, **483** (2019), 116–127.
9. F. Ursell, *Waves on a sloping beach.* — Proc. Royal Soc. London A , **214** (1952), 79–97.
10. N. Kuznetsov, V. Maz'ya, B. Vainberg, *Linear Water Waves.* — Cambridge Univ. Press, Cambridge (2002).
11. M. Roseau, *Short waves parallel to the shore over a sloping beach.* — Comm. Pure Appl. Math. 11 A958 (1958), 433–493.

12. A. I. Komech, A. E. Merzon, P. N. Zhevandrov, *On the completeness of Ursell's trapping modes.* — Russian J. Math. Phys., No. 4 (1997), 457–486.
13. M. A. Lyalinov, N. Y. Zhu, *Scattering of Waves by Wedges and Cones with Impedance Boundary Conditions* (Mario Boella Series on Electromagnetism in Information Communication). — Edison, NJ: SciTech-IET (2012).
14. G. D. Maliuzhinets [Malyuzhinets]. *Excitation, reflection and emission of surface waves from a wedge with given face impedances. — Soviet Physics: Doklady*, **3**, No. 4 (1958), 752–755.
15. V. M. Babich, M.A. Lyalinov, V. E. Grikurov, *Diffraction Theory. The Sommerfeld-Malyuzhinets Technique.* — Alpha Science Ser. Wave Phenom. Alpha Science, Oxford (2008).
16. М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды.* — Наука, Москва (1987).
17. V. M. Babich, D. B. Dement'ev, B. A. Samokish, V. P. Smyshlyaev, *On evaluation of the diffraction coefficients for arbitrary "Nonsingular" directions of a smooth convex cone.* — SIAM J. Appl. Math., **60**, (2) (2000), 536–573.
18. I. S. Gradstein , .I. M. Ryzhik, *Tables of integrals, series and products.* — 4th ed., Academic Press, Orlando (1980).
19. A. A. Fedotov, F. Sandomirskiy, *An exact renormalization formula for the Maryland model.* — Commun. Math. Phys., **334** (2015), 1083–1099.
20. Bernard JML. 1997 *Méthode analytique et transformées fonctionnelles pour la diffraction d'ondes par une singularité conique: équation intégrale de noyau non oscillant pour le cas d'impédance constante*, rapport CEA-R-5764. Editions Dist-Saclay. (erratum in J. Phys. A, vol.32, p.L45), an extended version in Bernard JML. *Advanced Theory of Diffraction by a Semi-infinite Impedance Cone.* Oxford, UK: Alpha Science Ser. Wave Phenom, Alpha Science, 2014.
21. E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals.* — Oxford Press (1937).

Lyalinov M. A. Eigenfunctions of negative spectrum for the Schrödinger operator in a halfplane having singular potential on a ray and with Neumann boundary condition.

In this work eigenfunctions of essential and discrete spectrum are constructed. Integral representations and asymptotics of the eigenfunctions at far distances are obtained.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: lyalinov@yandex.ru

Поступило 28 октября 2020 г.