Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 493, 2020 г.

В. Д. Лукьянов

О ТЕПЛОВОЙ ВОЛНЕ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ СТЕРЖНЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИ МЕНЯЮЩИМСЯ ВО ВРЕМЕНИ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Работа посвящается Василию Михайловичу Бабичу

§1. Введение

Исследуем периодическое во времени нестационарное распределение температуры – тепловую волну – в полубесконечном теплопроводящем стержне. На боковой поверхности стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с окружающей средой, температура которой не меняется со временем. На конце стержня ставится периодически изменяющееся во времени граничное условие. В течении первой половины временного периода конец стержня поддерживается при заданной температуре (неоднородное условие Дирихле), в течении второй половины периода конец стержня теплоизолирован (однородное условие Неймана). К подобной задаче при пренебрежении конвективным теплообменом с окружающей средой приходим в задаче о тепловом аккумуляторе. Предполагаем, что температура окружающей аккумулятор среды периодически меняется, становясь то положительной и здесь аккумулятор накапливает тепло, то отрицательной и здесь аккумулятор теплоизолируют от среды. Задача ставится для полупространства, заполненного теплопроводящим телом, которое аккумулирует тепло. Рассматриваем одномерную задачу, когда зависимость температуры в полупространстве от координат вдоль поверхности полупространства отсутствует. Граничные условия на поверхности тела периодически меняются во времени. На половине временного периода температура положительна и стержень нагревается (условие Дирихле). На второй половине периода, когда по предположению температура на поверхности тела становится отрицательной, поверхность тела

Ключевые слова: уравнение теплопроводность, тепловая волна, полубесконечный стержень, граничные условия, переменные во времени, метод Винера–Хопфа.

теплоизолируют (условие Неймана). Таким образом на одном промежутке времени стержень нагревают, а на втором промежутке тепло сберегают.

§2. Постановка задачи

Пусть $u = u\,(x, t)$ температура в стержне в точке с координатой x в момент времени t. Стержень расположен вдоль луча $x \geqslant 0$. На боковой поверхности стержня происходит конвективный теплообмен со средой по закону Ньютона. Функция $u\,(x, t)$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности с учетом теплообмена с окружающей средой, температуру которой примем за нулевую,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu, \tag{2.1}$$

где a – коэффициент температуропроводности материала стержня, $a = \Lambda/(c\rho)$, b – удельный коэффициент теплообмена, $b = \alpha P/(c\rho\sigma)$, Λ - коэффициент теплопроводности материала стержня, c – удельная теплоемкость материала стержня, ρ – плотность массы стержня, α – коэффициент теплообмена между поверхностью стержня и окружающей его средой, P – периметр поперечного сечения стержня, σ – площадь поперечного сечения стержня.

На конце стержня при $x = 0$ поддерживается периодический температурный режим с периодом $2T$, причем на половине периода $-T \leqslant t \leqslant 0$ задана температура стержня

$$u(0, t) = A\varphi(t), \tag{2.2}$$

где A – размерный коэффициент, имеющий размерность температуры. На другой половине периода при $0 \leqslant t \leqslant T$ конец стержня теплоизолирован

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0. \tag{2.3}$$

Граничные условия (2.2) и (2.3) поставлены на промежутке времени $[-T, T]$, на другие промежутки времени они переносятся по условию периодичности с периодом $2T$.

Требуется найти периодический во времени с периодом $2T$ температурный режим в стержне. Задача (2.1)–(2.3) представляет собой краевую задачу для одномерного уравнения теплопроводности с переменным граничным условием.

Решение задачи будем искать, используя теорию функции комплексной переменной. Введем комплексные температуры $U(x,t)$ и $\Phi(t)$, которые определяют температуру в стержне и на его конце согласно формулам

$$u(x,t) = \operatorname{Re}\left(U\left(x,t\right)\right) \tag{2.4}$$

и $\varphi(t) = \operatorname{Re}\left(\Phi(t)\right)$. Ввиду линейности задачи, функция $U(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности (2.1), начальному условию (2.3), граничному условию (2.3) при $0 \leqslant t \leqslant T$, которое здесь имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0,t) = 0, \tag{2.5}$$

а граничное условие (2.2) при $-T \leqslant t \leqslant 0$ перепишется в виде

$$U(0,t) = \Phi(t). \tag{2.6}$$

§3. Частное решение задачи о температурной волне

Найдем сначала частное решение задачи (2.1)-(2.3), когда правая часть в условии (2.6) имеет вид

$$\Phi(t) = Ae^{-i\omega_n t} \tag{3.1}$$

при $-T \leqslant t \leqslant 0$, ω_n – частота гармонической временной зависимости нагрева конца стержня, $\omega_n = \pi n/T$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Как известно, если считать, что на всех промежутках времени при $-\infty < t < +\infty$ на конце стержня поддерживается температурный режим

$$U(0,t) = Ae^{-i\omega_n t}, \tag{3.2}$$

то решение этой задачи U_* имеет вид

$$U_* = U_*(x,t) = Ae^{i(\lambda_n x - \omega_n t)}, \tag{3.3}$$

где

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{i\omega_n - b}{a}}, \tag{3.4}$$

$\operatorname{Im}\lambda_n > 0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Поставленная задача при отказе от конвективного теплообмена с окружающей средой ($b = 0$) известна как задача Фурье о температурных колебаниях почвы [1]. Решением является температурная волна, которая затухает при удалении от конца стержня [1, 2]. Из формулы (2.4) следует, что при $|\lambda| \to \infty$

$$\lambda_n = O(n^{1/2}). \tag{3.5}$$

§4. Сведение задачи с периодически изменяющимися граничными условиями к интегральным уравнениям

С учетом периодичности задачи во времени с периодом $2T$ будем искать периодическое во времени с тем же периодом решение только на временно́м промежутке $[-T, T]$. Обозначим это решение через $U_n(x,t)$, где индекс n указывает на номер гармоники в выражении (3.1), стоящей в правой части граничного условия (2.6).

Для построения периодического решения потребуем дополнительно, чтобы при $x > 0$ выполнялось условие периодичности по времени

$$U_n(x,-T) = U_n(x,T). \tag{4.1}$$

Температурное поле в стержне ищем разлагая искомую функцию $U_n(x,t)$ в интегралы Фурье по переменной x. Причем на промежутке $-T \leqslant t \leqslant 0$ при $x > 0$ имеем

$$U_n(x,t) = \frac{A}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(\lambda) e^{i\lambda x-(t+T)\mu} d\lambda + U_*(x,t), \tag{4.2}$$

где

$$\mu = \mu(\lambda) = a\lambda^2 + b, \tag{4.3}$$

а слагаемое $U_*(x,t)$ определено формулой (3.3).

На промежутке $0 \leqslant t \leqslant T$ предполагаем, что

$$U_n(x,t) = \frac{A}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} q(\lambda) e^{i\lambda x-t\mu} d\lambda. \tag{4.4}$$

Функции $p(\lambda)$ и $q(\lambda)$, стоящие под знаком интеграла в (4.2) и (4.4), являются искомыми и ищутся в дальнейшем. Выбор подынтегральных функций в представлениях (4.2) и (4.4) сделан так, что функция $U_n(x,t)$, определяемая этими формулами на разных промежутках изменения аргумента t , удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности (2.1). Для сходимости интегралов в представлениях (4.2) и (4.4) достаточно потребовать, чтобы при $|\lambda| \to \infty$ выполнялись следующие оценки

$$p(\lambda) = O(\lambda^{-\varepsilon_1}), q(\lambda) = O(\lambda^{-\varepsilon_2}), \tag{4.5}$$

где $\varepsilon_1 > \frac{1}{2}$, $\varepsilon_2 > \frac{1}{2}$. Удовлетворение граничным условиям в задаче приводит к интегральным уравнениям. При $-T \leqslant t \leqslant 0$ граничное условие (2.6) с учетом представления (4.2) дает однородное интегральное уравнение

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(\lambda) e^{-(t+T)\mu} d\lambda = 0. \tag{4.6}$$

При получении уравнения (4.6) учтено, что функция $U_*(x,t)$ на этом временно́м промежутке удовлетворяет граничному условию (3.2).

При $0 < t \leqslant T$ граничное условие (4.4) также приводит к однородному интегральному уравнению

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda q(\lambda) e^{-\mu t} d\lambda = 0. \tag{4.7}$$

Требование непрерывности температуры в момент времени $t = 0$ при $x > 0$

$$U_n(x, 0+0) = U_n(x, 0-0) = U_n(x, 0)$$

приводит к третьему интегральному уравнению уже неоднородному

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [p(\lambda) e^{-\mu T} - q(\lambda) + \chi(\lambda)] e^{i\lambda x} d\lambda = 0, \tag{4.8}$$

При получении уравнения (4.8) учтено, что при $x > 0$ справедливо равенство

$$e^{i\lambda_n x} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda,$$

где использовано обозначение

$$\chi(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \lambda_n}. \tag{4.9}$$

Четвертое, также неоднородное интегральное уравнение, получим из условия периодичности решения (4.1) при $x > 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [p(\lambda) - q(\lambda) e^{-\mu T} + \chi(\lambda)(-1)^n] e^{i\lambda x} d\lambda = 0. \tag{4.10}$$

Таким образом первоначальная краевая задача для уравнения теплопроводности (2.1) с граничными условиями (2.5), (2.6) с правой частью, задаваемой выражением (3.1), с учетом периодичности решения во времени свелась к системе интегральных уравнений (4.6)–(4.8) и (4.10).

§5. Задача Римана для аналитических функций

Уравнения (4.6) и (4.7) будут удовлетворены, если потребовать, чтобы подынтегральные функции, стоящие под знаком интегралов в левых частях этих уравнениях, были нечетными функциями по переменной λ. Из этого требования следует, что функция $p(\lambda)$ должна быть нечетной, а $q(\lambda)$ – четной функцией по переменной λ

$$p(\lambda) = -p(-\lambda), \tag{5.1}$$

$$q(\lambda) = q(-\lambda). \tag{5.2}$$

Используя теорему Винера-Пели [3] заключаем, что для удовлетворения уравнениям (4.8) и (4.10) необходимо и достаточно, чтобы трансформанты Фурье в подынтегральных выражениях в левых частях этих уравнений, должны быть функциями аналитическими в верхней полуплоскости комплексной переменной λ ($\mathrm{Im}\lambda > 0$). Обозначим эти функции через $F_1^+(\lambda)$ и $F_2^+(\lambda)$. Будем иметь

$$p(\lambda)e^{-\mu T} - q(\lambda) + \chi(\lambda) = F_1^+(\lambda), \tag{5.3}$$

$$p(\lambda) - q(\lambda)e^{-\mu T} + \chi(\lambda)(-1)^n = F_2^+(\lambda). \tag{5.4}$$

Согласно оценкам (4.5) заключаем, что

$$F_1^+(\lambda) = O(\lambda^{-\delta}), \quad F_2^+(\lambda) = O(\lambda^{-\delta}), \tag{5.5}$$

где

$$\delta = \min\left(1, \varepsilon_1, \varepsilon_2\right).$$

Перепишем систему уравнений (5.1), (5.2) и (5.3), (5.4) в матричном виде

$$\mathbf{P}(\lambda) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(-\lambda), \tag{5.6}$$

$$\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{P}(\lambda) + \mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{F}^+(\lambda), \tag{5.7}$$

где введены следующие матричные обозначения

$$\mathbf{P}(\lambda) = \begin{bmatrix} p(\lambda) \\ q(\lambda) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} e^{-\mu T} & -1 \\ 1 & -e^{-\mu T} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{F}^{+}(\lambda) = \begin{bmatrix} F_1^{+}(\lambda) \\ F_2^{+}(\lambda) \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{B}(\lambda) = \chi(\lambda) \begin{bmatrix} 1 \\ (-1)^n \end{bmatrix}.$$

Преобразуем уравнение (5.7) к виду

$$\mathbf{P}(\lambda) = \mathbf{A}^{-1}(\lambda)[\mathbf{F}^{+}(\lambda) - \mathbf{B}(\lambda)], \tag{5.8}$$

где

$$\mathbf{A}^{-1}(\lambda) = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}(\mu T)} \begin{bmatrix} -1 & e^{\mu T} \\ -e^{\mu T} & 1 \end{bmatrix}.$$

Из равенства (5.8) получим еще одно соотношение, изменив в нем знак у аргумента λ

$$\mathbf{P}(-\lambda) = \mathbf{A}^{-1}(\lambda)\left(\mathbf{F}^{+}(-\lambda) - \mathbf{B}(-\lambda)\right), \tag{5.9}$$

где λ принадлежит уже нижней полуплоскости ($\mathrm{Im}\lambda \leqslant 0$) и учтено, что $\mathbf{A}^{-1}(-\lambda) = \mathbf{A}^{-1}(\lambda)$, так как функция $\mu(\lambda)$ согласно формуле (4.3) есть четная функция. При $\mathrm{Im}\lambda = 0$ уравнения (5.8) и (5.9) выполняются одновременно. Воспользуемся этим обстоятельством, а также соотношением (5.6), исключим искомую матрицу-функцию $\mathbf{P}(\lambda)$. После элементарных преобразований получим для матриц-функций $\mathbf{F}^{+}(\lambda)$ и $\mathbf{F}^{+}(-\lambda)$ линейное соотношение, которое выполнено на вещественной оси переменной λ

$$\mathbf{F}^{+}(\lambda) - \mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{A}(\lambda)\mathbf{Q}\mathbf{A}^{-1}(\lambda)(\mathbf{F}^{+}(-\lambda) - \mathbf{B}(-\lambda)). \tag{5.10}$$

Умножим правую и левую часть уравнения (5.10) на матрицу $\mathbf{Q}$ и введем следующие обозначения

$$\mathbf{G}(\lambda) = \mathbf{Q}\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{Q}\mathbf{A}^{-1}(\lambda) = \frac{1}{\mathrm{sh}(\mu T)} \begin{bmatrix} -\mathrm{ch}(\mu T) & 1 \\ 1 & -\mathrm{ch}(\mu T) \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{U}^{+}(\lambda) = \mathbf{Q}\mathbf{F}^{+}(\lambda),$$
$$\mathbf{U}^{-}(\lambda) = \mathbf{F}^{+}(-\lambda),$$
$$\mathbf{H}(\lambda) = \mathbf{Q}\mathbf{B}(\lambda) - \mathbf{G}(\lambda)\mathbf{B}(-\lambda),$$

где матрицы-функции $\mathbf{U}^+(\lambda)$ и $\mathbf{U}^-(\lambda)$ предельные значения на вещественной оси переменной λ матриц-функций $\mathbf{QF}^+(\lambda)$ и $\mathbf{F}^+(-\lambda)$ аналитических соответственно в верхней и нижней полуплоскости этой переменной. Уравнение (5.10) запишется тогда в стандартном виде как краевая задача Римана [4, 5] для двух пар функций на вещественной оси переменной λ

$$\mathbf{U}^+(\lambda) = \mathbf{G}(\lambda)\mathbf{U}^-(\lambda) + \mathbf{H}(\lambda). \tag{5.11}$$

Для решения функционального уравнения (5.11) приведем матрицу $\mathbf{G}(\lambda)$ к диагональному виду $\mathbf{G}(\lambda) = \mathbf{TD}(\lambda)\mathbf{T}^{-1}$, где $\mathbf{D}(\lambda)$ – диагональная матрица с диагональными элементами

$$d_{11} = (d_{22})^{-1} = g(\lambda) = -\operatorname{th}(\mu T/2),$$

а матрица преобразования

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

После умножения правой и левой части уравнения (5.11) на матрицу $\mathbf{T}^{-1}$ приходим к матричному уравнению

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{U}^+(\lambda) = \mathbf{D}(\lambda)\mathbf{T}^{-1}\mathbf{U} - (\lambda) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}(\lambda). \tag{5.12}$$

Перепишем матричное равенство (5.12) в виде двух скалярных уравнений. Одно из этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} F_2^+(\lambda) - F_1^+(\lambda) = g(\lambda)(F_1^+(-\lambda) + F_2^+(-\lambda) \\ -\chi(-\lambda)((-1)^n + 1)) + \chi(\lambda)((-1)^n - 1)). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Второе уравнение не приводится, так как оно является следствием уравнения (5.13) и получается из этого уравнения заменой λ на $-\lambda$. Ключевым моментом решения скалярной задачи Римана (5.13) является факторизация функции $g(\lambda)$ [4–8], т.е. представление этой функции в виде

$$g(\lambda) = g^+(\lambda)g^-(\lambda), \tag{5.14}$$

где $g^+(\lambda)$, $g^-(\lambda)$ – функции аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскости комплексной переменной λ и не имеющие в этой полуплоскости нулей. Учитывая, что $g(\lambda)$ – мероморфная функция, искомое представление получим, используя теорию бесконечных произведений [9, 10]. Имеем согласно [9]

$$g^{+}(\lambda) = i\sqrt{\operatorname{th}\left(\frac{bT}{2}\right)}\left(1+\frac{\lambda}{\alpha_0^{+}}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{\lambda}{\alpha_n^{+}}\right)\left(1+\frac{\lambda}{\alpha_n-}\right)}{\left(1+\frac{\lambda}{\beta_n+}\right)\left(1+\frac{\lambda}{\beta_n^{-}}\right)}, \tag{5.15}$$

$$g^{-}(\lambda) = g^{+}(-\lambda), \tag{5.16}$$

где

$$\alpha_n^{\pm} = \sqrt{-\frac{b}{a} \pm \frac{2i\pi n}{aT}}, \tag{5.17}$$

$$\beta_n^{\pm} = \sqrt{-\frac{b}{a} \pm \frac{i\pi(2n-1)}{aT}}. \tag{5.18}$$

В формулах (5.17) и (5.18) одновременно берутся либо верхние, либо нижние знаки, а значения радикалов выбраны так, чтобы $\operatorname{Im}\alpha_n^{\pm} > 0$ и $\operatorname{Im}\beta_n^{\pm} > 0$. Из формул (5.15) и (5.16) следуют оценки

$$g^{+}(\lambda) = O(1), \quad g^{-}(\lambda) = O(1) \tag{5.19}$$

при $|\lambda| \to \infty$. С учетом представления (5.14) перепишем уравнение (5.13) в виде

$$\frac{1}{g^{+}(\lambda)}\left(F_2^{+}(\lambda) - F_1^{+}(\lambda)\right) = g^{-}(\lambda)\left(F_1^{+}(-\lambda) + F_2^{+}(-\lambda)\right) + h(\lambda), \tag{5.20}$$

где

$$h(\lambda) = \frac{\chi(\lambda)((-1)^n - 1)}{g^{+}(\lambda)} - g^{-}(\lambda)\chi(-\lambda)((-1)^n + 1).$$

Разложим функцию $h(\lambda)$ в уравнении (5.20) суммой функций, аналитических соответственно в верхней ($h^{+}(\lambda)$) и нижней ($h^{-}(\lambda)$) полуплоскости переменной λ

$$h(\lambda) = h^{+}(\lambda) + h^{-}(\lambda),$$

где

$$\begin{aligned} h^{+}(\lambda) = &- g^{+}(\lambda_n)\chi(-\lambda)\left(1 + (-1)^n\right) \\ &+ \chi(\lambda)\left((-1)^n - 1\right)\left(\frac{1}{g^{+}(\lambda)} - \frac{1}{g^{+}(\lambda_n)}\right), \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$h^{-}(\lambda) = \left(g^{+}(\lambda_n) - g^{-}(\lambda)\right)\chi(-\lambda)\left(1 + (-1)^n\right) + \frac{\chi(\lambda)\left((-1)^n - 1\right)}{g^{+}(\lambda_n)}. \tag{5.22}$$

С учетом обозначения (4.9) и оценки (5.19) имеем из формул (5.21) и (5.22) для

$$h^{\pm}(\lambda) = O(\lambda^{-1}) \tag{5.23}$$

при $|\lambda| \to \infty$.

Преобразуем теперь уравнение (5.20) к виду

$$\frac{1}{g^{+}(\lambda)}\left(F_2^{+}(\lambda)-F_1^{+}(\lambda)\right)-h^{+}(\lambda)=g^{-}(\lambda)(F_1^{+}(-\lambda)+F_2^{+}(-\lambda)+h^{-}(\lambda). \tag{5.24}$$

Согласно теореме об аналитическом продолжении через контур левая и правая части равенства (5.24) задают некоторую единую функцию, аналитическую на всей комплексной плоскости переменной λ. Ввиду оценок (5.5) и (5.19) эта функция будет тождественно равна нулю. Следовательно, из уравнения (5.24) будем иметь

$$F_2^{+}(\lambda) - F_1^{+}(\lambda) = g^{+}(\lambda)h^{+}(\lambda), \tag{5.25}$$

$$F_1^{+}(-\lambda) + F_2^{+}(-\lambda) = -\frac{h^{-}(\lambda)}{g^{-}(\lambda)}. \tag{5.26}$$

Заменив аргумент λ в уравнении (5.24) на $-\lambda$ получим с учетом тождества (5.16)

$$F_1^{+}(\lambda) + F_2^{+}(\lambda) = -\frac{h^{-}(-\lambda)}{g^{+}(\lambda)}. \tag{5.27}$$

Искомые функции $F_1^{+}(\lambda)$ и $F_2^{+}(\lambda)$ найдем из системы линейных уравнений (5.25) и (5.27)

$$F_1^{+}(\lambda) = -\frac{1}{2}\left(\frac{h^{-}(-\lambda)}{g^{+}(\lambda)} + g^{+}(\lambda)h^{+}(\lambda)\right), \tag{5.28}$$

$$F_2^{+}(\lambda) = \frac{1}{2}\left(g^{+}(\lambda)h^{+}(\lambda) - \frac{h^{-}(-\lambda)}{g^{+}(\lambda)}\right). \tag{5.29}$$

Из формул (5.28) и (5.29) и оценок (5.16) и (5.23) следует выполнение оценок (5.5) с показателем

$$\delta = 1. \tag{5.30}$$

После определения функций $F_1^{+}(\lambda)$ и $F_2^{+}(\lambda)$ матричное соотношение (5.8) позволяет найти функции $p(\lambda)$ и $q(\lambda)$. Выполняя действия, имеем

$$p(\lambda) = \frac{1}{2\mathrm{sh}(\mu T)}\left[F_2^{+}(\lambda)e^{\mu T} - F_1^{+}(\lambda) + \chi(\lambda)\left(1-(-1)^n e^{\mu T}\right)\right], \tag{5.31}$$

$$q(\lambda) = \frac{1}{2\mathrm{sh}(\mu T)}\left[F_2^{+}(\lambda) - F_1^{+}(\lambda)e^{\mu T} + \chi(\lambda)\left(e^{\mu T} - (-1)^n\right)\right]. \tag{5.32}$$

Из формул (5.31), (5.32) и (4.9), а также оценок (5.5) с учетом равенства (5.30), следует при $|\lambda| \to \infty$, что оценки (4.6) для функций $p(\lambda)$ и $q(\lambda)$ выполнены, причем $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$.

§6. Распределение температуры в стержне

Получим формулы для распределения температуры в стержне. Для этого, используя полученные представления (5.31) и (5.32) для функций $p(\lambda)$ и $q(\lambda)$, вычислим интегралы в (4.2) и (4.3) по вычетам подынтегральных функций, замыкая контуры интегрирования в интегралах в верхней полуплоскости комплексной переменной λ. Будем иметь при $0 \leqslant x < +\infty$ и $-\infty < t < +\infty$

$$U_n(x,t) = A\left(v_n e^{i(\lambda_n x - \omega_n t)} + \sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq n}}^{\infty} v_m e^{i(\lambda_m x - \omega_m t)}\right). \tag{6.1}$$

Для коэффициентов разложения в представлении (6.1) получим

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8aT\lambda_n^2}\left(\left(g^+(\lambda_n)\right)^2(1+(-1)^n) + \frac{1-(-1)^n}{\left(g^+(\lambda_n)\right)^2}\right),\\ v_m &= \frac{1}{4aT\lambda_m}\left((-1)^m F_2^+(\lambda_m) - F_1^+(\lambda_m) + \frac{(1-(-1)^{n+m})}{(\lambda_m-\lambda_n)}\right) \end{aligned} \tag{6.2}$$

при $m \neq n$.

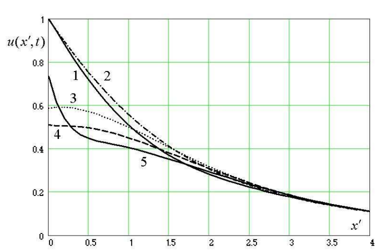

Рис 1.

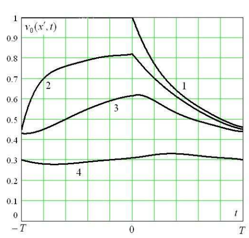

Рис 2.

С учетом представления (6.2), оценок (3.5) и (5.5) и значением из (4.30) имеем $v_m = O(m^{-1})$. В силу этого распределение температуры на конце стержня $U_n(0,t)$ представляет собой разрывную функцию времени. При $x > 0$ коэффициенты ряда Фурье в разложении

(6.1) приобретают экспоненциально убывающий с ростом m множитель $\exp(-\sqrt{\pi m/aT}x)$ и распределение температуры в каждой точке стержня представляет собой непрерывную функция от времени. На рис. 1 и 2 показаны результаты численных расчетов зависимости распределения безразмерной температуры стержня

$$u(x', t) = \mathrm{Re}\,(U_0\,(x,t)/A)$$

от времени в различных точках стержня (рис. 1) и от безразмерной координаты $x' = x\Big/\sqrt{aT}$ в некоторые моменты времени. Вычисления проводились при значении безразмерного параметра $bT = 0.25$. Здесь при периодическом режиме с периодом $2T$ на конце стержня на промежутке времени $(-T, 0)$ поддерживается постоянная температура A, а на промежутке времени $(0, T)$ конец теплоизолирован.

§7. Температурное поле в стержне при произвольном нагревании конца стержня

Для нахождения распределения комплексной температуры $U(x,t)$ в стержне предположим, что функция $\Phi(t)$ в граничном условии (2.4) разлагается в ряд Фурье на отрезке $[-T, 0]$

$$\Phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n(t) e^{i\omega_n t},$$

где

$$\Phi_n = \frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{0} \Phi(t) e^{i\omega_n t} dt.$$

Искомое распределение комплексной температуры в стержне имеет вид

$$U(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n U_n(x,t), \tag{7.1}$$

где парциальные распределения температуры

$$U_n(x,t)$$

определены выражением (7.1). Соответственно распределение температуры в стержне $u(x,t)$ находится тогда согласно формуле (2.4) как реальная часть комплексной температуры $U\,(x,t)$.

§8. Благодарность

Выражаю искреннюю благодарность Василию Михайловичу Бабичу за то огромное влияние, которое он оказал на мою научную жизнь. Во-первых, Василий Михайлович меня учил. Один из первых спецкурсов по уравнениям математической физики, прослушанный мною по специальности математическая физика на физическом факультете ЛГУ, был его спецкурс. Отличный педагог - он увлекал своими лекциями. Во-вторых, я учился по книгам Василия Михайловича. Первая научная книга, мною изученная, была его монография [11]. Читались и оказались для меня полезными книги [12, 13]. Эти книги есть в моей библиотеке. Сожалею, что не все книги, где автором является В. М. Бабич, читаны мною. В-третьих, непосредственное общение с Василием Михайловичем и участие в научном семинаре ПОМИ, где В. М. Бабич является руководителем и непререкаемым авторитетом, расширяет мой кругозор и имеет решающее значение для моей научной деятельности. В-четвертых, огромное значение для меня имела оценка В. М. Бабича при официальном оппонировании моих диссертаций: кандидатской и докторской. Его умение разобраться в новой научной тематике и объективно оценить результаты чужой работы вдохновляют соискателя к дальнейшей работе. А если учесть, что такое влияние Василий Михайлович имел на большое число ученых, то делаю вывод о его значительном вкладе в развитие Российской науки.

Список литературы

1. В. М. Бабич и др., *Линейные уравнения математической физики.* Наука, СМБ М., 1964. 368 с.
2. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики.* Наука, М., 1972. 736 с.
3. Н. Винер, Р. Пэли, *Преобразование Фурье в комплексной области.* Наука, М., 1964. 268 с.
4. Н. И. Мусхелешвили, *Сингулярные интегральные уравнения.* Наука, М., 1968. 512 с.
5. Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи.* Наука, М., 1977. 640 с.
6. Н. П. Векуа, *Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи.* Наука, М., 1970. 380 с.
7. Б. Нобл, *Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных.* Изд-во иностр. лит., М., 1962. 279 с.
8. Р. Миттра, С. Ли, *Аналитические методы теории волноводов.* Мир, М., 1974. 327 с.
9. Е. Титчмарш, *Теория функций.* Наука, М., 1980. 464 с.

10. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функции комплексной переменного.* Наука, М., 1965. 716 с.
11. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач.* Наука, М., 1972. 456 с.
12. В. М. Бабич, Н. С. Григорьева, *Ортоpгональные разложения и метод Фурье.* Изд-во ЛГУ, Л., 1983. 240 с.
13. В. М. Бабич, М. А. Лялинов, В. Э. Грикуров, *Метод Зоммерфельда-Малюжинца в задачах дифракции.* ВВМ, СПб., 2004. 103 с.

V. D. Lukyanov. About heat wave in a semi-infinite rod with a boundary condition periodically changing in time.

It has been obtained and investigated an exact analytical solution of the problem of a periodic heat wave in a semi-infinite rod with a time-varying boundary condition at its end. The end of the rod is maintained at a given temperature (inhomogeneous Dirichlet condition) during the first half of the time period, the end of the rod is heat insulated (homogeneous Neumann condition) in the second half of the time period. The problem is solved by the Wiener-Hopf method. Numerical calculations of temperature distribution are given for temperature wave.

ОАО “Авангард”,
Кондратьевский пр., д. 72,
195271, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lukyanovvd@rambler1.ru

Поступило 29 октября 2020 г.