Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 493, 2020 г.

Н. Г. Кузнецов

О ЦИЛИНДРЕ, СВОБОДНО ПЛАВАЮЩЕМ НА КОСОМ ВОЛНЕНИИ

В. М. Бабичу к 90-летию

§1. Введение

В настоящей работе продолжено исследование задачи о движении механической системы, которая состоит из слоя воды постоянной глубины и тела, свободно плавающего на ее поверхности; оно было начато в заметке автора [1], написанной к 80-летию В. М. Бабича. Эта линейная задача, впервые сформулированная Ф. Джоном [2], описывает гармоническое по времени движении воды (ее поверхность граничит с атмосферой), взаимодействующей с частично погруженным телом, которое колеблется с той же частотой. При этом последнее свободно плавает согласно закону Архимеда, т.е. другие силы, которые могли бы ограничивать его движение, не принимаются во внимание. Предполагается, что движение воды безвихревое (ее вязкость и сжимаемость не учитываются как и поверхностное натяжение), а колебания всей системы около положения равновесия имеют малую амплитуду, что позволяет ограничиться линейной моделью.

В рамках линейной теории поверхностных волн допустимы двух- и трехмерные постановки задач, однако далее речь будет идти только о первом виде постановок, что сказывается на ограничениях, накладываемых на тело. Вопрос о единственности решения такого рода задач (он фигурирует первым в списке актуальных проблем, опубликованном в обзоре [3]) важен из-за наличия примеров неединственности; см., например, заметку [1]. Это приводит к ограничениям на частоту, а также форму тел в теоремах единственности. Отметим, что такого рода ограничения не требуются при рассмотрении родственных задач акустики; см., например, книгу [4].

Поскольку в своей формулировке задачи о свободно плавающем теле Джон не использовал матричную запись уравнений движения (она

Ключевые слова: плавающее тело, косое волнение, локализованная мода, условие Джона.

вскрывает их достаточно простую структуру, которая описана ниже; см. также работы [5, 6] и [7]), то эта задача, выглядевшая весьма громоздкой, оставалась вне поля зрения исследователей на протяжении 60 лет после публикации статьи [8]. В последней работе Джоном была доказана теорема единственности для трехмерной постановки в предположении, что тело удовлетворяет геометрическому условию, известному теперь как условие Джона (для двумерной постановки оно описано ниже), а частота колебаний достаточно велика.

Вместе с тем, начиная с 1950 г., много внимания было уделено задаче о гармонических по времени колебаниях воды в присутствии неподвижных твердых тел; случай одного тела был исследован в упомянутой статье [8]. Детальное изложение результатов, касающихся последней задачи, имеется в книге [9], где приведены соответствующие библиографические ссылки. В частности, в ней разобран и обобщен первый пример неединственности для этой задачи, полученный М. МакАйвер [10]; а именно, при помощи так называемой обратной процедуры построены нетривиальные решения однородной двумерной задачи с двумя и более частично погруженными телами (в работе [10] рассматривались только два тела). Последнее обстоятельство нарушает условие Джона, согласно которому в двумерной задаче допускается только одно такое тело. Следует отметить, что эти решения описывают локализованные, т.е. имеющие конечную энергию, моды свободных колебаний воды. Дальнейшее развитие эти результаты получили в работе [11], где теорема единственности Джона и пример неединственности М. МакАйвер были обобщены на случай бесконечных, частично погруженных цилиндров на так называемом косом волнении; соответствующая задача для неподвижных цилиндров, рассмотренная в [11], является частным случаем постановки, сформулированной в §2. Другие подходы к вопросу о единственности решения этой задачи были развиты в заметке [12].

Задаче о движении механической системы вода/свободно плавающее тело, о которой пойдет речь в этой заметке, в течение последних десяти лет было уделено значительное внимание. Наряду с упомянутой работой [1], строгие результаты для нее были получены в статьях [5] и [6], причем в последней дан их краткий обзор. Отметим, что в этих публикациях основной проблемой было построение и изучение мод, локализованных телами, погруженная часть которых осесимметрична; вместе с тем, заключительная часть работы [6] сфокусирована на условиях на погруженные тела, при выполнении которых наличие таких мод невозможно.

Целью настоящей работы является отыскание условий, обеспечивающих отсутствие локализованных мод в задаче о бесконечно-длинном цилиндре, свободно плавающем на так называемом косом волнении. Такие условия найдены как для цилиндров с одной погруженной частью, так и для симметричных относительно вертикальной плоскости цилиндров с двумя погруженными частями. В последнем случае условия различны для потенциалов, четных и нечетных относительно горизонтальной координаты, перпендикулярной образующим цилиндра.

§2. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечно-длинный цилиндр постоянного поперечного сечения, который свободно плавает в воде, пересекая ее поверхность (вода либо имеет бесконечную глубину, либо ограничена снизу твердым, горизонтальным дном). Правая декартова система координат (x, y) в плоскости, ортогональной направляющим цилиндра, выбрана так, что ось y направлена вертикально вверх, а усредненное положение свободной поверхности воды пересекает эту плоскость вдоль оси x. Таким образом, поперечное сечение W занимаемой водой области лежит в полуплоскости $\mathbb{R}^2_- = \{x \in \mathbb{R},\, y < 0\}$. Через $\widehat{B}$ обозначим ограниченную область в $\mathbb{R}^2$, замыкание которой является поперечным сечением цилиндра в положении равновесия; предполагается, что область $\widehat{B} \setminus \overline{\mathbb{R}^2_-}$ (часть тела, расположенная выше поверхности воды) непустая, а погруженная часть $B = \widehat{B} \cap \mathbb{R}^2_-$ представляет собой объединение конечного числа областей. При этом $D = \widehat{B} \cap \partial\mathbb{R}^2_-$ состоит из того же числа непустых интервалов оси x, замыкания которых не пересекаются; см. рис. 1, на котором изображен скетч для случая двух погруженных частей, при этом $D = \{x \in (-a, -b) \cup (b, a),\, y = 0\}$. Заметим, что $W = \mathbb{R}^2_- \setminus \overline{B}$, когда вода имеет бесконечную глубину, и $W = \{x \in \mathbb{R},\, -h < y < 0\} \setminus \overline{B}$, если глубина h конечна и постоянна (см. рис. 1). При этом $h > \sup\limits_{(x,y)\in B} |y|$, а $H = \{x \in \mathbb{R},\, y = -h\}$ обозначает поперечное сечение дна.

Предполагается, что W липшицева область, следовательно направленная вовне W единичная нормаль $\mathbf{n}$ определена почти всюду нв ∂W. Наконец, $S = \partial\widehat{B} \cap \mathbb{R}^2_-$ обозначает смоченный контур (количество его

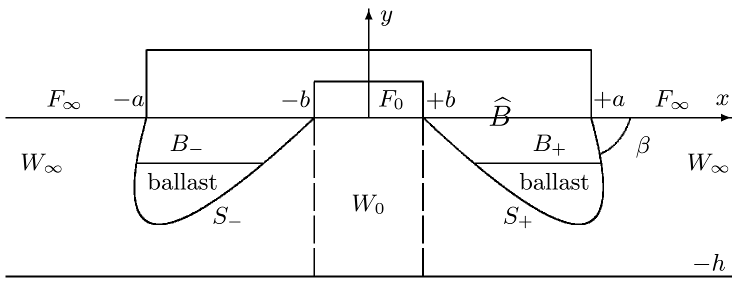

Рис. 1. Поперечное сечение $\widehat{B}$ цилиндра с двумя погруженными частями, обозначенными B_- и B_+; смоченная часть их границы – это линии S_- и S_+ соответственно. Поперечное сечение F свободной поверхности воды состоит из трех частей; две из них, обозначенные F_∞, расположены на тех частях оси x, где $|x| > a$, а третья часть F_0 лежит между $x = -b$ и $x = +b$. Далее, $W = W_0 \cup W_\infty$ – это поперечное сечение области, заполненной водой, причем W_0 – та ее часть, которая расположена под F_0, а ее дополнением является W_∞. Горизонтальное дно задано уравнением $y = -h$.

компонент равно числу погруженных областей), а $F = \partial\mathbb{R}^2_- \setminus \overline{D}$ – свободную поверхность.

Если совместное движение системы вода/свободно плавающий цилиндр имеет малую амплитуду, то для его описания применяется линейная модель, использующая приближение первого порядка для неизвестных, которыми являются потенциал скоростей $\Phi(x, y; t)$ и описывающий движение цилиндра вектор-столбец $\mathbf{q}(t)$ со следующими компонентами:

• q_1 и q_2 – смещения центра масс от положения равновесия $\big(x^{(0)}, y^{(0)}\big)$ в горизонтальном и вертикальном направлениях соответственно;

• q_3 – угол вращения вокруг оси, проходящей через $\big(x^{(0)}, y^{(0)}\big)$ перпендикулярно плоскости (x, y) (он измеряется от оси x к оси y).

Мы опускаем соотношения, которые описывают общий вид зависящего от времени движения системы вода/свободно плавающий цилиндр (см. детали в работе [1]). Для перехода к задаче о гармонических по времени колебаниях цилиндра на косом волнении служит следующий анзац:

$$\big(\Phi(x,y;t), \mathbf{q}(t)\big) = \mathrm{Re}\big\{\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\,\varphi(x,y), \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathbf{z}\big)\big\}\,. \tag{2.1}$$

Здесь $\omega > 0$ круговая частота колебаний, которой соответствует волновое число $\nu = \omega^2/g$; силе тяжести, действующей в противоположном оси y направлении, соответствует постоянное ускорение свободного падения $g > 0$. Величина $k \in (0, \nu)$ является заданной компонентой волнового числа в направлении, параллельном образующим цилиндра, т.е. k/ν равно синусу ненулевого угла между гребнями косого волнения и плоскостью перпендикулярной образующим; наконец, $\varphi \in H^1_{\mathrm{loc}}(W)$ – комплекснозначная функция, а $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^3$.

Для конкретности сначала рассмотрим случай бесконечно-глубокой области W. В отсутствие набегающих на цилиндр косых волн имеем следующую задачу для $(\varphi, \mathbf{z})$:

$$(\nabla^2 - k^2)\varphi = 0 \quad \text{в } W, \tag{2.2}$$

$$\partial_y\varphi - \nu\varphi = 0 \quad \text{на } F, \tag{2.3}$$

$$\partial_{\mathbf{n}}\varphi = \omega\,\mathbf{N}^{\mathsf{T}}\mathbf{z}\ \Big(= \omega\sum_1^3 N_j z_j\Big) \quad \text{на } S, \tag{2.4}$$

$$\nabla\varphi \to 0 \quad \text{при } y \to -\infty, \tag{2.5}$$

$$\omega^2\mathbf{E}\mathbf{z} = -\omega\int_S \varphi\,\mathbf{N}\,\mathrm{d}s + g\,\mathbf{K}\mathbf{z}\,. \tag{2.6}$$

Здесь $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$ – градиент на плоскости, а $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3)^{\mathsf{T}}$, где $(N_1, N_2)^{\mathsf{T}} = \mathbf{n}$, $N_3 = \big(x - x^{(0)}, y - y^{(0)}\big)^{\mathsf{T}} \times\ \mathbf{n}$; операция транспонирования $^{\mathsf{T}}$ преобразует вектор-строку в вектор-столбец и наоборот, а $\times$ обозначает векторное произведение. Матрицы в уравнении движения цилиндра (2.6) имеют следующий вид:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} I^M & 0 & 0 \\ 0 & I^M & 0 \\ 0 & 0 & I_2^M \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I^D & I_x^D \\ 0 & I_x^D & I_{xx}^D + I_y^S \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Положительными элементами матрицы массы/инерции $\mathbf{E}$ являются

$$I^M = \rho_0^{-1} \int\limits_{\widehat{B}} \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_2^M = \rho_0^{-1} \int\limits_{\widehat{B}} \rho(x,y)\Big[\Big(x - x^{(0)}\Big)^2 + \Big(y - y^{(0)}\Big)^2\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

где $\rho(x,y) \geqslant 0$ – распределение плотности в теле, а $\rho_0 > 0$ – постоянная плотность воды. Члены в правой части уравнения (2.6) выражают силы и их моменты: первый член обусловлен гидродинамическим давлением, а второй определяется плавучестью (см. например [2]). Ненулевые элементы матрицы $\mathbf{K}$ имеют вид:

$$I^D = \int\limits_D \mathrm{d}x > 0, \quad I_x^D = \int\limits_D \big(x - x^{(0)}\big)\mathrm{d}x,$$

$$I_{xx}^D = \int\limits_D \big(x - x^{(0)}\big)^2\mathrm{d}x > 0, \quad I_y^S = \int\limits_S \big(y - y^{(0)}\big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Следует отметить, что $\mathbf{K}$ симметрична.

В соотношениях (2.3), (2.4) и (2.6), частота ω является спектральным параметром, который должен быть найден вместе с собственным вектором $(\varphi, \mathbf{z})$. Поскольку $\varphi \in H^1_{\mathrm{loc}}(W)$, а область W липшицева, то соотношения (2.2)–(2.4) следует понимать в смысле интегрального тождества

$$\int\limits_W \nabla\varphi\nabla\psi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \nu\int\limits_F \varphi\,\psi\,\mathrm{d}x + \omega\int\limits_S \psi\,\mathbf{N}^{\mathsf{T}}\mathbf{z}\,\mathrm{d}s, \tag{2.8}$$

которое должно выполняться при произвольной гладкой функции ψ, имеющей компактный носитель в $\overline{W}$.

Наконец, следующее условие

$$\int\limits_{W\cap\{|x|=b\}} \big|\partial_{|x|}\varphi - \mathrm{i}\ell\varphi\big|^2\,\mathrm{d}s = o(1) \text{ при } b\to\infty, \quad \ell = (\nu^2 - k^2)^{1/2}, \tag{2.9}$$

вместе с (2.5) определяет поведение φ на бесконечности. В силу (2.5) поле скоростей убывает с глубиной, а согласно (2.9) потенциалу скоростей вида (2.1) отвечают волны, расходящиеся от цилиндра. Это условие излучения аналогично использованному Джоном в работе [8], где рассматривалась, в частности, двумерная задача о волнах в присутствии неподвижного препятствия.

Перечисленные выше соотношения должны быть дополнены вспомогательными условиями, которые касаются положения равновесия цилиндра:

• Закон Архимеда: $I^M = \int_B \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (масса вытесненной воды равна массе тела; обе массы берутся на единицу длины цилиндра);

• $\int_B \bigl(x - x^{(0)}\bigr)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$ (центр плавучести цилиндра расположен на одной вертикали с центром его массы);

• Матрица $\mathbf{K}$ является положительно полуопределенной, а 2×2-матрица $\mathbf{K}'$, расположенная в правом нижнем углу матрицы $\mathbf{K}$ положительно определена (см. [2]).

Последнее из этих требований обеспечивает устойчивость тела в положении равновесия и вытекает из результатов, сформулированных, например в статье [2, §2.4]. Устойчивость тела понимается в классическом смысле: т.е. мгновенное бесконечно-малое возмущение его положения остается в последующем бесконечно-малым за исключением горизонтального дрейфа.

В заключение этого параграфа заметим, что в случае, когда W имеет конечную глубину, соотношения (2.5) и (2.9) должны быть изменены. А именно, вместо (2.5) нужно потребовать, чтобы на дне выполнялось условие непротекания:

$$\partial_y \varphi = 0 \quad \text{на} \quad H. \tag{2.10}$$

Величину ℓ в условии излучения (2.9) нужно заменить на ℓ_0 – единственный положительный корень уравнения $\ell_0 \operatorname{th}(\ell_0 h) = \ell$.

§3. О равном распределении энергии

Известно (см. например [9, §2.2.1]), что потенциал скоростей, удовлетворяющий соотношениям (2.2), (2.3), (2.5) и (2.9), имеет ту же асимптотику на бесконечности, что и функция Грина этой задачи, а именно

$$\begin{gathered}\varphi(x,y) = A_\pm(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell|x|} + r_\pm(x,y),\\ |r_\pm|^2,\ |\nabla r_\pm| = O\bigl([x^2+y^2]^{-1}\bigr) \text{ при } x^2+y^2 \to \infty,\end{gathered} \tag{3.1}$$

когда глубина области W бесконечна. Кроме того, справедливо следующее равенство для коэффициентов:

$$\ell \int_{-\infty}^{0} \left(| A_+(y)|^2 + | A_-(y)|^2 \right) \mathrm{d}y = -\mathrm{Im} \int_S \overline{\varphi}\, \partial_{\mathbf{n}} \varphi \, \mathrm{d}s \,. \tag{3.2}$$

Если $(\varphi, \mathbf{z})$ является решением задачи (2.2)–(2.6) и (2.9), то последнюю формулу можно преобразовать, используя условие согласования (2.4) на контуре S и уравнение движения тела (2.6). Сначала, транспонируя уравнение, комплексно-сопряженное с (2.6), получаем

$$\omega^2 \left(\mathbf{E}\overline{\mathbf{z}}\right)^{\mathsf{T}} = -\omega \int_S \overline{\varphi}\, \mathbf{N}^{\mathsf{T}} \, \mathrm{d}s + g \left(\mathbf{K}\overline{\mathbf{z}}\right)^{\mathsf{T}} .$$

Из этого соотношения и условия (2.4) вытекает, что его скалярное произведение с $\mathbf{z}$ можно записать в виде

$$\omega^2 \, \overline{\mathbf{z}}^{\mathsf{T}} \mathbf{E}\mathbf{z} - g \overline{\mathbf{z}}^{\mathsf{T}} \mathbf{K}\mathbf{z} = - \int_S \overline{\varphi}\, \partial_{\mathbf{n}} \varphi \, \mathrm{d}s. \tag{3.3}$$

Теперь равенство (3.2) приобретает следующую форму

$$\ell \int_{-\infty}^{0} \left(| A_+(y)|^2 + | A_-(y)|^2 \right) \mathrm{d}y = \mathrm{Im} \Big\{ \omega^2 \, \overline{\mathbf{z}}^{\mathsf{T}} \mathbf{E}\mathbf{z} - g \overline{\mathbf{z}}^{\mathsf{T}} \mathbf{K}\mathbf{z} \Big\}. \tag{3.4}$$

Используя его и рассуждая так же как в работе [13] (см. доказательство Предложения 1 на с. 623), приходим к следующему утверждению о кинетической и потенциальной энергии рассматриваемой механической системы.

Предложение 1. *Если* $(\varphi, \mathbf{z})$ *является решением задачи* (2.2)–(2.6) *и* (2.9), *то*

$$\int_W \left(|\nabla \varphi|^2 + k^2 |\varphi|^2 \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y < \infty \quad \text{и} \quad \nu \int_F |\varphi|^2 \, \mathrm{d}x < \infty \,, \tag{3.5}$$

т.е. $\varphi \in H^1(W)$. *Кроме того, имеет место следующее равенство:*

$$\int_W \left(|\nabla \varphi|^2 + k^2 |\varphi|^2 \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \omega^2 \overline{\mathbf{z}}^{\mathsf{T}} \mathbf{E}\mathbf{z} = \nu \int_F |\varphi|^2 \, \mathrm{d}x + g \, \overline{\mathbf{z}}^{\mathsf{T}} \mathbf{K}\mathbf{z} \,. \tag{3.6}$$

Здесь в левой части равенства стоит кинетическая энергия системы вода/цилиндр, а в правой части стоит потенциальная энергия этой системы (обе вычислены на единицу длины цилиндра). Последняя формула обобщает тождество равного распределения энергии для случая, когда в воду погружен неподвижный цилиндр. Действительно, для такого цилиндра $\mathbf{z}$ обращается в ноль, и равенство (3.6) превращается в формулу (3.2) статьи [11].

Согласно Предложению 1, если $(\varphi, \mathbf{z})$ является комплекснозначным решением задачи (2.2)–(2.6) и (2.9), то его вещественная и мнимая части каждая удовлетворяет этой задаче по отдельности. Таким образом, в дальнейшем $(\varphi, \mathbf{z})$ можно рассматривать как элемент вещественного пространства $H^1(W) \times \mathbb{R}^3$.

Определение 1. *Пусть для свободно плавающего цилиндра $\widehat{B}$ выполнены условия, обеспечивающие устойчивость положения равновесия (см.* §2*). Если задача* (2.8) *и* (2.6) *имеет вещественное нетривиальное решение $(\varphi, \mathbf{z}) \in H^1(W) \times \mathbb{R}^3$, то φ называется модой, локализованной этим цилиндром, а соответствующее значение ω частотой локализации.*

Если глубина воды конечна, то остаточный член в формуле (3.1) имеет следующее поведение

$$|r_\pm(x, y)|, \quad |\nabla r_\pm(x, y)| = O\big(|x|^{-1}\big) \quad \text{при } |x| \to \infty$$

равномерно по $y \in [-h, 0]$. При этом формула (3.2) выполняется с ℓ_0 вместо ℓ. Таким образом, Предложение 1 имеет место и для задачи (2.2)–(2.6) и (2.9), в которой условие (2.5) заменено на (2.10), а вместо ℓ в условии (2.9) используется ℓ_0. Определение 1 при этом остается без изменений.

§4. Условия отсутствия локализованных мод

Чтобы найти условия на область $\widehat{B}$ и частоту ω, при которых отсутствуют нетривиальные решения $(\varphi, \mathbf{z}) \in H^1(W) \times \mathbb{R}^3$, перепишем равенство (3.6) в виде:

$$\mathbf{z}^\mathsf{T}(\omega^2 \mathbf{E} - g\,\mathbf{K})\mathbf{z} = \nu \int_F |\varphi|^2 \,\mathrm{d}x - \int_W \big(|\nabla\varphi|^2 + k^2|\varphi|^2\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (4.1)$$

Ясно, что выражение в левой части неотрицательно при любом ненулевом векторе $\mathbf{z}$, если ω^2 больше либо равно чем наибольшее λ, удовлетворяющее равенству $\det(\lambda\mathbf{E}-g\mathbf{K}) = 0$. Будем говорить, что для таких значений ω^2 выполняется свойство Ω, если цилиндр с поперечным сечением $\widehat{B}$ удовлетворяет условиям устойчивости положения равновесия (см. § 2). Таким образом, из равенства (4.1) вытекает

Предложение 2. *Пусть для цилиндра с поперечным сечением $\widehat{B}$ для частоты ω выполнено свойство Ω. Если для решения $\varphi \in H^1(W)$ задачи* (2.8) *и* (2.6)*, отличного от тождественного нуля, имеет место неравенство*

$$\nu \int\limits_F |\varphi|^2 \, \mathrm{d}x < \int\limits_W \left(|\nabla\varphi|^2 + k^2|\varphi|^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \,, \tag{4.2}$$

то ω не является частотой локализации.

Действительно, неравенство (4.2) противоречит свойству Ω для нетривиальной пары $(\varphi, \mathbf{z})$.

4.1. Цилиндр с одной погруженной частью. Для простоты ограничимся случаем бесконечной глубины. Напомним, что условие Джона для односвязной области $\widehat{B} \cap \mathbb{R}^2_-$ состоит в требовании, чтобы она целиком содержалась в полосе между двумя вертикальными прямыми, проходящими через точки пересечения контура $\partial\widehat{B}$ и оси x.

Теорема 1. *Пусть глубина воды бесконечна, а область $\widehat{B} \cap \mathbb{R}^2_-$ односвязна и удовлетворяет условию Джона. Тогда для нетривиального решения $(\varphi, \mathbf{z}) \in H^1(W) \times \mathbb{R}^3$ задачи* (2.8) *и* (2.6) *выполняется неравенство* (4.2).

Доказательство. В силу условия Джона пересечением плоскости (x, y) со свободной поверхностью воды является множество $F = F_\infty$ (см. Рис. 1), состоящее из двух лучей: правого F_+ и левого F_-. Покажем, что имеет место неравенство:

$$\nu \int\limits_{F_\pm} |\varphi|^2 \, \mathrm{d}x < \int\limits_{W_\pm} \left(|\nabla\varphi|^2 + k^2|\varphi|^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \,, \tag{4.3}$$

где $W_\pm$ – часть области W, расположенная строго под $F_\pm$.

Следуя методу Джона, зададим на $F_\pm$ функцию

$$a^{(\pm)}(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi(x,y)\, \mathrm{e}^{\nu y}\, \mathrm{d}y\,. \tag{4.4}$$

Дифференцируя ее дважды и используя уравнение (2.2), получаем, что

$$a^{(\pm)}_{xx} = k^2 a^{(\pm)} - \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi_{yy}(x,y)\, \mathrm{e}^{\nu y}\, \mathrm{d}y\,.$$

Дважды интегрируя по частям и применяя условия (2.3) и (2.5), приходим к выводу, что на $F_\pm$ ввиду равенства $k^2 - \nu^2 = -\ell^2$ имеет место уравнение $a^{(\pm)}_{xx} + \ell^2 a^{(\pm)} = 0$.

Поскольку $\varphi \in H^1(W)$, то $\lim\limits_{|x|\to\infty} a^{(\pm)}(x) = 0$, а значит $a^{(\pm)} \equiv 0$ на $F_\pm$. Теперь, интегрируя по частям в интеграле (4.4), приходим к равенству

$$\varphi(x,0) = \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi_y(x,y)\, \mathrm{e}^{\nu y}\, \mathrm{d}y \quad \text{для } (x,0) \in F_\pm.$$

Отсюда при помощи неравенства Коши–Буняковского и интегрирования по $F_\pm$ получаем, что

$$\nu \int\limits_{F_\pm} |\phi^{(\pm)}(x,0)|^2\, \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{W_\pm} |\, \varphi_y\, |^2\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \int\limits_{W_\pm} |\nabla\varphi|^2\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,;$$

здесь коэффициент $1/2$ возникает при интегрировании функции $\mathrm{e}^{2\nu y}$. Таким образом, установлено неравенство более сильное чем (4.3). Ясно, что из (4.3) вытекает (4.2) так как $F = F_+ \cup F_-$. $\square$

Из Предложений 1, 2 и Теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть глубина воды бесконечна, а область* $\widehat{B} \cap \mathbb{R}^2_-$ *односвязна, удовлетворяет условию Джона и такова, что для частоты* ω *выполнено свойство* Ω. *Тогда задача* (2.2)–(2.6) *и* (2.9) *имеет лишь тривиальное решение для этого значения* ω.

Аналогичное утверждение имеет место и в случае, когда глубина воды конечна.

4.2. Цилиндр с двумя погруженными частями. Чтобы применить прием, использованный в §4.1 и основанный на условии Джона, в случае цилиндра с двумя погруженными частями (см. рис. 1), потребуем дополнительно, чтобы его поперечное сечение было симметрично относительно вертикальной оси (ось y на рис. 1), а плотность также была распределена симметрично внутри цилиндра. Кроме того, возможные перемещения свободно плавающего цилиндра ограничим горизонтальными и вертикальными колебаниями, Наконец, классы нечетных и четных по x потенциалов скоростей будем рассматривать по отдельности.

4.2.1. *Случай горизонтальных колебаний.* Для горизонтальных колебаний $\mathbf{z} = (z_1, 0, 0)^{\mathsf{T}}$, $z_1 \in \mathbb{R}$. При этом краевое условие (2.4) приобретает следующий вид

$$\partial_{\mathbf{n}} \varphi = \omega N_1 z_1 \quad \text{на } S\,, \tag{4.5}$$

а система (2.6) распадается; ее первое уравнение превращается в

$$\omega I^M z_1 = -\int\limits_S \varphi\, N_1 \,\mathrm{d}s\,, \tag{4.6}$$

а второе и третье уравнения – в условия ортогональности:

$$\int\limits_S \varphi\, N_j \,\mathrm{d}s = 0\,, \quad j = 2, 3. \tag{4.7}$$

В силу сказанного равенство (4.1) приобретает вид:

$$I^M (\omega z_1)^2 = \nu \int\limits_F |\varphi|^2 \,\mathrm{d}x - \int\limits_W \left(|\nabla\varphi|^2 + k^2|\varphi|^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,. \tag{4.8}$$

Установим интервалы частот, для которых это равенство не может иметь места для нетривиального потенциала φ, при условии, что обе области B_+ и B_- односвязны и удовлетворяют условию Джона, т.е. $\beta \geqslant \pi/2$ (см. рис. 1).

Дословно повторяя рассуждения, использованные в §4.1, получаем неравенство:

$$\nu \int\limits_{F_\infty} |\varphi|^2 \,\mathrm{d}x < \int\limits_{W_\infty} \left(|\nabla\varphi|^2 + k^2|\varphi|^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,. \tag{4.9}$$

Остается оценить $\nu \int\limits_{F_0} |\varphi|^2 \, \mathrm{d}x$, для чего рассмотрим заданную на F_0 функцию

$$a(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi(x,y) \, \mathrm{e}^{\nu y} \, \mathrm{d}y \, . \tag{4.10}$$

Предполагая сначала, что $\varphi(x,y)$ нечетна по x, тем же способом, что и в §4.1 приходим к уравнению $a_{xx} + \ell^2 a = 0$, при этом его нетривиальным решением является $a(x) = C \sin \ell x$.

Подставим это решение в (4.10) и в полученном равенстве применим к интегралу неравенство Коши–Буняковского; затем в продифференцированном равенстве также воспользуемся этим неравенством. Таким образом, получаем, что для всякой точки $(x,0) \in F_0$ выполняются оценки:

$$2\,\nu\, C^2 \sin^2 \ell x \leqslant \int\limits_{-\infty}^{0} |\,\varphi(x,y)|^2 \, \mathrm{d}y \, , \tag{4.11}$$

$$2\,\nu\, \ell^2\, C^2 \cos^2 \ell x \leqslant \int\limits_{-\infty}^{0} |\,\varphi_x(x,y)|^2 \, \mathrm{d}y \, . \tag{4.12}$$

Далее, интегрируя по частям в интеграле (4.10), имеем для всякой точки $(x,0) \in F_0$:

$$\varphi(x,0) = -\nu C \sin \ell x + \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi_y(x,y) \, \mathrm{e}^{\nu y} \, \mathrm{d}y \, .$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\nu |\varphi(x,0)|^2 \leqslant 2\nu^3 C^2 \sin^2 \ell x + \int\limits_{-\infty}^{0} |\,\varphi_y(x,y)|^2 \, \mathrm{d}y \, , \tag{4.13}$$

интегрируя которое по F_0 и воспользовавшись неравенством (4.11), получаем:

$$\nu \int\limits_{F_0} |\varphi(x,0)|^2 \,\mathrm{d}x \leqslant 2\nu(k^2+\ell^2)C^2 \int\limits_{F_0} \sin^2 \ell x \,\mathrm{d}x + \int\limits_{W_0} |\varphi_y|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\leqslant k^2 \int\limits_{W_0} |\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int\limits_{W_0} |\varphi_y|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\nu\ell^2C^2 \int\limits_{F_0} \sin^2 \ell x \,\mathrm{d}x\,.$$

Последнее слагаемое оценим при помощи (4.12), предположив, что

$$\int\limits_0^b \sin^2 \ell x \,\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_0^b \cos^2 \ell x \,\mathrm{d}x\,. \tag{4.14}$$

Будем говорить, что для частоты ω имеет место свойство Ω_-, если для какого-либо $m = 0, 1, \dots$ выполняются неравенства

$$\pi m \leqslant \ell\, b \leqslant \pi(2m+1)/2, \text{ где } \ell = (\nu^2 - k^2)^{1/2} \text{ и } \nu = \omega^2/g,$$

Таким образом свойство Ω_- эквивалентно неравенству (4.14), и если оно выполнено, то верна оценка

$$\nu \int\limits_{F_0} |\varphi|^2 \,\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_{W_0} \left(|\nabla\varphi|^2 + k^2|\varphi|^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

В сочетании со строгим неравенством (4.9) она приводит к противоречию с равенством (4.8), если только $(\varphi, \mathbf{z})$ не является тривиальным решением задачи. Полученное противоречие доказывает следующее

Предложение 3. *Пусть глубина воды бесконечна, а симметричная относительно оси y область $\widehat{B}$ такова, что $\widehat{B} \cap \mathbb{R}^2_-$ состоит из двух односвязных областей, каждая из которых удовлетворяет условию Джона, а расстояние между ними равно $2b$. Если для частоты ω выполнено свойство Ω_-, то задача* (2.2)–(2.6) *и* (2.9) *имеет лишь тривиальное решение $(\varphi, \mathbf{z})$ в предположении, что потенциал скоростей φ нечетен по x, а $\mathbf{z} = (z_1, 0, 0)^{\mathsf{T}}$.*

Перейдем к рассмотрению того же свободно плавающего тела (см. рис. 1) в случае, когда потенциал φ зависит от x четным образом. При этом из условия (4.6) следует, что $z_1 = 0$, что означает, что такой потенциал не может поддерживать горизонтальные колебания тела. Однако и при наличии неподвижных симметричных цилиндров с двумя погруженными частями существуют нетривиальные примеры таких потенциалов; см [11], §§5 и 6. Там же в §3 доказана теорема единственности, которая применительно к настоящей задаче принимает следующий вид, аналогичный Предложению 3.

Предложение 4. *Пусть для области* $\widehat{B}$ *выполнены предположения Предложения 3. Если для частоты* ω *выполнено свойство* Ω_+, *то задача* (2.2)–(2.6) *и* (2.9) *имеет лишь тривиальное решение* $(\varphi, \mathbf{z})$ *в предположении, что* $\mathbf{z} = (z_1, 0, 0)^\mathsf{T}$, *а потенциал скоростей* φ *четен по* x.

Здесь свойство Ω_+, определяется сходным с Ω_- образом; оно имеет место для частоты ω, если для какого-либо $m = 0, 1, \dots$ выполняются неравенства

$$\pi(2m+1)/2 \leqslant \ell\, b \leqslant \pi(m+1), \text{ где } \ell = (\nu^2 - k^2)^{1/2} \text{ и } \nu = \omega^2/g.$$

Сравнивая Предложения 3 и 4 с теоремой единственности, доказанной в статье [11], видим, что для горизонтальных колебаний свободно плавающего цилиндра с двумя погруженными частями интервалы частот, для которых нечетные и четные по x потенциалы тривиальны, такие же как и для неподвижного симметричного цилиндра.

4.2.2. *Случай вертикальных колебаний.* Для вертикальных колебаний $\mathbf{z} = (0, z_2, 0)^\mathsf{T}$, $z_2 \in \mathbb{R}$, и при этом краевое условие (2.4) приобретает следующий вид

$$\partial_{\mathbf{n}} \varphi = \omega N_2 z_2 \quad \text{на } S\,, \tag{4.15}$$

а система (2.6) распадается; ее второе уравнение превращается в

$$\big(\omega^2 I^M - g I^D\big) z_2 = -\omega \int_S \varphi\, N_2 \,\mathrm{d}s\,, \tag{4.16}$$

а первое и третье уравнения – в условия ортогональности:

$$\int_S \varphi\, N_1 \,\mathrm{d}s = 0 \qquad \int_S \varphi\, N_3 \,\mathrm{d}s = 0. \tag{4.17}$$

В последнем случае надо принять во внимание, что $I_x^D = 0$ поскольку $x^{(0)} = 0$ ввиду симметрии относительно оси y. Далее, равенство (4.1) приобретает вид:

$$\big(\omega^2 I^M - g I^D\big) z_2^2 = \nu \int_F |\varphi|^2 \,\mathrm{d}x - \int_W \big(|\nabla\varphi|^2 + k^2|\varphi|^2\big) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,. \tag{4.18}$$

Как и в §4.2.1, сначала рассмотрим случай, когда потенциал скоростей φ нечетен по x. При этом в уравнении (4.16) правая часть обращается в ноль, поскольку подынтегральная функция нечетна. Следовательно последнее равенство превращается в

$$\nu \int\limits_{F} |\varphi|^2 \,\mathrm{d}x = \int\limits_{W} \left(|\nabla\varphi|^2 + k^2|\varphi|^2 \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.19}$$

и применимы рассуждения работы [11], §3, для случая неподвижных B_- и B_+. Применительно к настоящей задаче они приводят к следующему утверждению, аналогичному Предложениям 3 и 4.

Предложение 5. *Пусть для области $\widehat{B}$ выполнены предположения Предложения* 3. *Если для частоты ω выполнено свойство Ω_-, то задача* (2.2)–(2.6) *и* (2.9) *имеет лишь тривиальное решение* $(\varphi, \mathbf{z})$ *в предположении, что* $\mathbf{z} = (0, z_2, 0)^{\mathsf{T}}$, *а потенциал скоростей φ нечетен по x.*

Доказательство. Согласно рассуждениям работы [11], §3, свойство Ω_- влечет, что нечетный по x потенциал φ, удовлетворяющий соотношению (4.19), тривиален. Тогда согласно краевому условию (4.15) вектор $\mathbf{z}$ также тривиален. □

Перейдем к рассмотрению четного по x потенциала φ и применим метод, использованный в доказательстве Предложения 3, чтобы установить интервалы частот, для которых равенство (4.18) не может иметь места при нетривиальном φ. Рассуждения, базирующиеся на свойстве Ω_+, показывают, что правая часть этого равенства строго отрицательна, когда это свойство выполнено, но с другой стороны, левая часть этого равенства неотрицательна, если $\omega^2 \geqslant gI^D/I^M$. Полученное противоречие показывает, что имеет место следующее

Предложение 6. *Пусть для области $\widehat{B}$ выполнены предположения Предложения 3. Если для частоты $\omega \geqslant \sqrt{gI^D/I^M}$ выполнено свойство Ω_+, то задача* (2.2)–(2.6) *и* (2.9) *имеет лишь тривиальное решение* $(\varphi, \mathbf{z})$ *в предположении, что потенциал скоростей φ четен по x, а* $\mathbf{z} = (0, z_2, 0)^{\mathsf{T}}$.

Отметим важное отличие последнего предложения от предыдущего, а именно, в Предложении 6 помимо выполнения свойства Ω_+ требуется, чтобы $\omega^2 \geqslant gI^D/I^M$, в то время как в Предложении 5 достаточно одного лишь свойства Ω_-. Нетрудно заметить, что в случае вращательных колебаний вокруг центра масс, когда $\mathbf{z} = (0, 0, z_3)^\mathsf{T}$, справедливо утверждение, аналогичное Предложению 6; его формулировку мы предоставляем читателю.

В заключение отметим два обстоятельства. Первое, утверждения, аналогичные Предложениям 3–6, имеют место и для случая, когда глубина воды конечна. Второе, полученные результаты обеспечивают единственность решений в соответствующих классах для задач о рассеянии свободно плавающим бесконечным цилиндром косо набегающих на него плоских волн.

Список литературы

1. N. Kuznetsov, *On the problem of time-harmonic water waves in the presence of a freely-floating structure.* — St. Petersburg Math. J. **22** (2011), 985–995.
2. F. John, *On the motion of floating bodies, I.* — Comm. Pure Appl. Math. **2** (1949), 13–57.
3. F. Ursell, *Some unsolved and unfinished problems in the theory of waves*, Wave Asymptotics, eds. P.A. Martin, G.R. Wickham, Cambridge, Cambridge University Press (1992), 220–244.
4. Д. Колтон, Р. Кресс, *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния.* Мир, М., 1987.
5. N. Kuznetsov, O. Motygin, *On the coupled time-harmonic motion of water and a body freely floating in it.* — J. Fluid Mech. **679** (2011), 616–627.
6. N. Kuznetsov, O. Motygin, *On the coupled time-harmonic motion of deep water and a freely floating body: trapped modes and uniqueness theorems.* — J. Fluid Mech. **703** (2012), 142–162.
7. N. Kuznetsov, O. Motygin, *Freely floating structures trapping time-harmonic water waves.* — Quart. J. Mech. Appl. Math. **68** (2015), 173–193.
8. F. John, *On the motion of floating bodies, II.* — Comm. Pure Appl. Math. **3** (1950), 45–101.
9. N. Kuznetsov, V. Maz'ya, B. Vainberg, *Linear Water Waves: A Mathematical Approach.* Cambridge, Cambridge University Press, 2002.
10. M. McIver, *An example of non-uniqueness in the two-dimensional linear water-wave problem.* — J. Fluid Mech. **315** (1996), 257–266.
11. N. Kuznetsov, R. Porter, D. V. Evans, M. J. Simon, *Uniqueness and trapped modes for surface-piercing cylinders in oblique waves.* — J. Fluid Mech. **365** (1998), 351–368.
12. N. Kuznetsov, *Uniqueness in the problem of an obstacle in oblique waves.* — C. R. Mecanique. **331** (2003), 183–188.
13. N. Kuznetsov, O. Motygin, *On the coupled time-harmonic motion of water and a body freely floating in it.* — J. Fluid Mech. **679** (2011), 616–627.

Kuznetsov N. G. On a cylinder floating freely in oblique waves.

The coupled motion is investigated for a mechanical system consisting of water and a body freely floating in it. Water occupies either a half-space or a layer of constant depth into which an infinitely long surface-piercing cylinder is immersed, thus allowing us to study the so-called oblique waves. Under the assumption that the motion is of small amplitude near equilibrium and describes time-harmonic oscillations, the phenomenon's linear setting reduces to a spectral problem with the radian frequency as the spectral parameter. If the radiation condition holds, then the total energy is finite and the equipartition of kinetic and potential energy holds for the whole system. On this basis, it is proved that no wave modes are trapped under some restrictions on their frequencies; in the case when a symmetric cylinder has two immersed parts restrictions are imposed on the type of mode as well.

Институт проблем машиноведения РАН
E-mail: `nikolay.g.kuznetsov@gmail.com`

Поступило 26 октября 2020 г.