Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 493, 2020 г.

А. Я. Казаков

ИНТЕГРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ ЭЙЛЕРА И АСИМПТОТИКА МОНОДРОМИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГОЙНА

§1. Введение

Общее уравнение Гойна (General Heun equation, GHE) – это самое общее фуксово обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с 4 регулярными особыми точками на комплексной плоскости. Без потери общности (после подходящих замен и масштабирования) можно полагать, что эти особенности располагаются в точках $z_k = 0,\, 1,\, \tau, \infty$ ($\tau \neq 0,\, 1,\, \infty$). GHE может быть представлено в следующей форме:

$$w''(z) + \left[\frac{1-\theta_0}{z} + \frac{1-\theta_1}{z-1} + \frac{1-\theta_2}{z-\tau}\right] w'(z) + \frac{dz+e}{z(z-1)(z-\tau)} w(z) = 0. \quad (1)$$

Здесь θ_k, $k = 0, 1, 2$ – характеристические показатели уравнения в особых точках $z_k = 0,\, 1,\, \tau$ соответственно. Уравнение (1) и его различные конфлюэнтные и редуцированные формы описаны в книгах [1–3], они образуют т.н. класс уравнений Гойна. Они появляются в различных областях теоретической физики, таких, как квантовая теория поля, космология, теория черных дыр, нерелятивистская квантовая механика и т.д., см, например, работы [3–15]. Отметим здесь, что весьма продвинутые алгоритмы для вычисления решений GHE реализованы в [16], а для решений конфлюэнтного уравнения Гойна (CHE) – в работе [17]. Решения уравнений класса Гойна включают многие известные спецфункции – функции Матье, сфероидальные волновые функции, кулоновские сфероидальные функции, эти функции широко используются в прикладной математике.

Многочисленные приложения уравнений класса Гойна нуждаются в соответствующей аналитической информации о решениях этих уравнений, но такая информация в настоящее время отсутствует. В отличие от решений уравнений гипергеометрического класса для решений

Ключевые слова: конфлюэнтное уравнение Гойна, интегральное преобразование Эйлера, матрица связи, асимптотика.

уравнений класса Гойна нет интегральных представлений. Этот факт существенно осложняет теорию этих функций. Однако определенные возможности предоставляют интегральные преобразования решений уравнений класса Гойна, вывод таких интегральных преобразований приведен в работах [18–21]. В данной работе мы используем полученные там результаты в качестве источника аналитической информации для уравнений класса Гойна.

Мы рассмотрим с этой точки зрения конфлюэнтное уравнение Гойна (CHE). Это уравнение может быть получено из (1) путем слияния 2 регулярных особых точек в иррегулярную и может быть записано в следующем виде:

$$w''(z) + \left[a + \frac{1-\theta_0}{z} + \frac{1-\theta_1}{z-1}\right] w'(z) + \frac{dz+e}{z(z-1)} w(z) = 0. \qquad (2)$$

CHE имеет 2 регулярные особые точки $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ и иррегулярную особую точку $z_\infty = \infty$. Мы будем изучать асимптотики матриц связи этого уравнения. Наш выбор уравнения (2) связан с тем фактом, что необходимый нам результат относительно CHE, на который опирается дальнейшее обсуждение, выписан в явном виде в работе [19].

Напомним определения необходимых в дальнейшем объектов. Пусть $w^{(m)}_{h,b}(z)$ – решения уравнения (2), голоморфное (h) и ветвящееся (b) в особой точке $z_m = 0, 1$ соответственно. Мы полагаем, что эти решения нормализованы следующим образом: $w^{(0)}_b(z) \sim 1 \cdot z^{\theta_0}$, $w^{(0)}_h(z) \sim 1$ при $z \sim 0$, $w^{(1)}_b(z) \sim 1 \cdot (1-z)^{\theta_1}$, $w^{(1)}_h(z) \sim 1$ при $z \sim 1$ в соответствии с [19]. Для удобства обозначений введем столбцы решений

$$W^{(0)}(z) = \begin{pmatrix} w^{(0)}_b(z) \\ w^{(0)}_h(z) \end{pmatrix}, \quad W^{(1)}(z) = \begin{pmatrix} w^{(1)}_b(z) \\ w^{(1)}_h(z) \end{pmatrix},$$

Как следует из общих результатов аналитической теории дифференциальных уравнений [22], эти пары решений образуют базисы в пространстве решений уравнения (2), и могут быть выражены друг через друга с помощью матрицы связи $\mathbf{K}$,

$$W^{(0)}(z) = \mathbf{K}(a, \theta_0, \theta_1, d, e) W^{(1)}(z). \qquad (3)$$

Элементы матрицы $\mathbf{K}$ играют ключевую роль в приложениях, однако явные аналитические выражения для них отсутствуют для всех уравнений класса Гойна. Разумеется, имеются некоторые асимптотические ситуации, когда наличие в коэффициентах уравнения большого параметра позволяет получить соответствующее асимптотическое описание элементов матриц связи $\mathbf{K}$. Например, если параметры d, e уравнения (2) содержат большой параметр, асимптотические методы, такие, как метод эталонного уравнения [3, 23–26] позволяют получить асимптотическое разложение матрицы связи $\mathbf{K}$. Характерная особенность данной ситуации заключается в том, что ведущие особенности по независимой переменной z (они связаны с особенностями в коэффициенте при первой производной) и по большому параметру (они присутствуют в коэффициенте при самой функции) разделены. Именно в этом случае применимы упоминавшиеся выше асимптотические подходы, мы будем называть такие ситуации "регулярными". Однако возможны асимптотические ситуации, когда стандартные асимптотические методы неприменимы. Предположим, что параметры θ_0, θ_1 уравнения (2) содержат большой параметр, так что ведущие особенности по независимой переменной z и по большому параметру содержатся в одном члене уравнения. Такие особенности (мы будем называть их "комбинированными" сингулярностями) существенно более сложны с точки зрения асимптотического анализа, некоторые из этих ситуаций являются предметом данной работы. Мы покажем, что, используя описанные в [19] интегральные соотношения, имеется возможность свести в ряде случаев изучение "комбинированных" сингулярностей к изучению "регулярных" ситуаций.

Опишем дальнейший план работы. В следующем разделе мы вкратце приведем необходимые результаты [19]. Эти формулы, выведенные на основе интегрального преобразования Эйлера, и являются основным инструментом, позволяющим свести "комбинированную" асимптотическую ситуацию к "регулярной". Далее мы фиксируем конкретный выбор "комбинированной" асимптотической ситуации. В разделе 3 мы рассмотрим соответствующую "регулярную" асимптотическую ситуацию и для нее получим асимптотику матрицы связи (с помощью метода эталонного уравнения). На основе этих результатов мы получим асимптотическое разложение матрицы связи для "комбинированных" особенностей. Раздел 4 содержит заключительное обсуждение.

§2. Интегральная симметрия Эйлера

В работе [19] приведен следующий результат (здесь мы используем немного иную параметризацию).

Теорема. *Пусть $u_b^{(k)}(t)$ – решение уравнения*

$$u''(t)+\left(a+\frac{2-\theta_0-d/a}{t}+\frac{2-\theta_1-d/a}{t-1}\right)u'(t) \tag{4}$$

$$+\frac{(2a-d)t+e+(1-d/a)(2-a-\theta_0-\theta_1-d/a)}{t(t-1)}u(t)=0,$$

ветвящееся в точке $t=t_k$, $t_0=0$, $t_1=1$, $\mathfrak{L}$ – двойная восьмерка, охватывающая точки $t=t_k$ и $t=z$ на комплексной плоскости переменной t. Тогда

$$w_b^{(k)}(z)=\int\limits_{\mathfrak{L}}(z-t)^{-d/a}u_b^{(k)}(t)dt \tag{5}$$

– решение уравнения (2) с предписанным поведением.

Интегральная симметрия Эйлера (5) связывает решения СНЕ с разным набором параметров. Процедура аналитического продолжения решения $w_b^{(k)}(z)$ с помощью соотношения (5), детали которой приведены в [19], позволяет получить следующий результат.

Следствие. *Пусть $\mathbf{K}_{11}(a,\theta_0,\theta_1,d,e)=\mathbf{k}(a,\theta_0,\theta_1,d,e)$, тогда*

$$\begin{gathered}\mathbf{k}(a,\theta_0,\theta_1,d,e)=\frac{\Gamma(-\theta_1)\Gamma(1+\theta_0)}{\Gamma(1-\theta_1-d/a)\Gamma(\theta_0+d/a)}\\ \times\mathbf{k}\left(a,\,\theta_0-1+\frac{d}{a},\,\theta_1-1+\frac{d}{a},\,2a-d,\,e+\left(1-\frac{d}{a}\right)\left(2-a-\theta_0-\theta_1-\frac{d}{a}\right)\right).\end{gathered} \tag{6}$$

Соотношение (6) является основой дальнейших рассуждений. В нем участвуют элементы матриц связи для СНЕ (2), (4) с различным набором параметров. Пусть, например, d, $e\gg 1$. Тогда уравнение (2) имеет большой параметр, однако асимптотическая ситуация является “регулярной”: ведущие особенности по переменной z и по большому параметру разделены. Соответственно, стандартные асимптотические методы, такие, как метод эталонного уравнения, позволяют получить асимптотическое разложение $\mathbf{k}(a,\theta_0,\theta_1,d,e)$ в этом случае. Однако для уравнения (4) асимптотическая ситуация не является “регулярной”, в силу совпадения ведущих особенностей по независимой переменной t и большому параметру. Соответственно, соотношение (6) дает возможность получить асимптотическое разложение для матрицы связи в этой “комбинированной” асимптотической ситуации.

§3. Выбор асимптотической ситуации и приведение уравнения к стандартной форме.

Как следует из вышеизложенного, для того, чтобы использовать соотношение (6), нам следует получить асимптотическое разложение матрицы связи уравнения (2). Для этого мы применим подходящую версию метода эталонного уравнения. Имея в виду дальнейшие применения, мы будем обсуждать следующую “регулярную” асимптотическую ситуацию для уравнения (2):

$$d = a\lambda, \quad e = a\lambda \cdot \zeta, \quad \lambda \gg 1, \quad \theta_0,\, \theta_1,\, a, \zeta\,, \tag{7}$$

в дальнейшем мы полагаем, что $\zeta \neq 0\,, -1$. Мы приходим к задаче вычисления матрицы связи уравнения (2) при наличии большого параметра.

Замечание. Присутствие множителя a в выражениях для d, e связано с присутствием отношения d/a в уравнении (4).

Перейдем от уравнения (2) к уравнению, не содержащему первую производную, с помощью подстановки:

$$w(z) = R(z)h(z)\,, \quad R(z) = \exp(-az/2) z^{(\theta_0 - 1)/2}(1-z)^{(\theta_1 - 1)/2}. \tag{8}$$

Уравнение для $h(z)$ имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} h''(z) + T(z)h(z) = 0, \\ T(z) = -\frac{a^2}{4} + \frac{1-\theta_0^2}{4z^2} + \frac{1-\theta_1^2}{4(z-1)^2} \\ + \frac{a\theta_1 - \theta_0\theta_1 - a + 2d + 2e + \theta_0 + \theta_1 - 1}{2(z-1)} + \frac{a\theta_0 + \theta_0\theta_1 - a - 2e - \theta_0 - \theta_1 + 1}{2z}. \end{gathered} \tag{9}$$

Подставляя асимптотические предположения (7), находим выражение для коэффициента с явной зависимостью от большого параметра λ:

$$\begin{aligned} T(z) &= \lambda T_1(z) + T_0(z)\,, \\ T_1(z) &= -a\frac{z+\zeta}{z(1-z)}\,, \end{aligned} \tag{10}$$

$$T_0(z) = -\frac{a^2}{4} + \frac{1-\theta_0^2}{4z^2} + \frac{1-\theta_1^2}{4(z-1)^2}$$
$$+ \frac{a\theta_1 - \theta_0\theta_1 - a + \theta_0 + \theta_1 - 1}{2(z-1)} + \frac{a\theta_0 + \theta_0\theta_1 - a - \theta_0 - \theta_1 + 1}{2z}.$$

Уравнение (9) имеет те же особые точки, что и уравнение (2). Его характеристические показатели равны $\chi_\pm^{(0)} = (1 \pm \theta_0)/2$ для точки $z = 0$ и $\chi_\pm^{(1)} = (1 \pm \theta_1)/2$ для точки $z = 1$. Введем следующие нормализованные решения: $h_\pm^{(0)}(z) \sim 1 \cdot z^{\chi_\pm^{(0)}}$ при $z \sim 0$, $h_\pm^{(1)}(z) \sim 1 \cdot (1-z)^{\chi_\pm^{(1)}}$ при $z \sim 1$, и соответствующие пары решений,

$$H^{(0)}(z) = \begin{pmatrix} h_+^{(0)}(z) \\ h_-^{(0)}(z) \end{pmatrix}, \quad H^{(1)}(z) = \begin{pmatrix} h_+^{(1)}(z) \\ h_-^{(1)}(z) \end{pmatrix}.$$

Тогда, как следует из (8), с учетом нормировки,

$$W^{(0)}(z) = R(z)H^{(0)}(z), \quad W^{(1)}(z) = e^{a/2}R(z)H^{(1)}(z). \tag{11}$$

Пусть $\mathbf{M}$ – матрица связи для уравнения (9),

$$H^{(0)}(z) = \mathbf{M}H^{(1)}(z). \tag{12}$$

Из (11), (12) следуют соотношения

$$R(z)H^{(0)}(z) = W^{(0)}(z) = \mathbf{K}W^{(1)}(z) = e^{a/2}R(z)\mathbf{K}H^{(1)}(z),$$

так что

$$\mathbf{M} = e^{a/2}\mathbf{K} \tag{13}$$

и, соответственно, $\mathbf{K}_{11} = e^{-a/2}\mathbf{M}_{11}$. Таким образом, вычисление матрицы связи для уравнения (2) сведено к вычислению матрицы связи уравнения (9). Последнее уравнение имеет стандартную форму, к которой применим метод эталонного уравнения.

При асимптотических условиях (7) уравнение (4) имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} u''(t) + \left(a + \frac{2-\theta_0-\lambda}{t} + \frac{2-\theta_1-\lambda}{t-1}\right)u'(t) \\ + \frac{(2a - a\lambda)t + a\lambda\zeta + e_0 + (1-\lambda)(2-a-\theta_0-\theta_1-\lambda)}{t(t-1)}u(t) = 0, \end{gathered} \tag{14}$$

его коэффициент при первой производной содержит слагаемые вида $\frac{\lambda}{t}$, $\frac{\lambda}{t-1}$, которые и являются “комбинированной” сингулярностью – это старшие особенности уравнения и по независимой переменной, и по большому параметру.

§4. Реализация метода эталонного уравнения

Опишем план дальнейших вычислений. Нам надлежит для обеих особых точек $z = 0$, $z = 1$ построить асимптотику решений с заданным поведением, $H^{(0}(z)$, $H^{(1)}(z)$, и найти матрицу $\mathbf{M}$. (В дальнейшем мы будем отмечать принадлежность объекта той или иной особой точке соответствующим верхним индексом).

Напомним детали метода эталонного уравнения. Мы ищем решения уравнения (9), ветвящиеся в окрестности точки $z = 0$ или точки $z = 1$, в следующем виде:

$$h(z) = (x'(z))^{-1/2} P(x(z)), \tag{15}$$

здесь $P(x)$ – ветвящееся в точке $x = 0$ решение уравнения

$$P''(x) + \left(\frac{k\lambda}{x} + \frac{1-\theta^2}{4x^2} \right) P(x) = 0. \tag{16}$$

Последнее уравнение с помощью известной подстановки может быть сведено к уравнению Бесселя, и его нормализованное решение имеет вид:

$$P(x) = \Gamma(\theta + 1)(\lambda k)^{-\theta/2} \sqrt{x} J_\theta(2\sqrt{\lambda k x}), \tag{17}$$

так что свойства его решений можно извлечь из известных справочников [27].

Уравнение для масштабирующей функции $x(z)$ имеет вид:

$$(x'(z))^2 \left(\frac{k\lambda}{x} + \frac{1-\theta^2}{4x^2} \right) + \frac{x'''}{2x'} - \frac{3x''}{4(x')^2} = \lambda T_1(z) + T_0(z). \tag{18}$$

Преобразование масштаба $x(z)$ ищем в виде

$$x^{(m)}(z) = x_0^{(m)}(z) + \lambda^{-1} x_1^{(m)}(z) + \ldots, \tag{19}$$

где индекс m соответствует особой точке $z = 0$ или точки $z = 1$, мы будем искать только 2 старших члена асимптотики. Для обеих этих точек следует подставить разложение (19) в уравнение (18), построить функции $x^{(m)}(z)$, а затем с помощью известных асимптотик решений уравнения Бесселя найти асимптотику элемента $\mathbf{M}_{11}$.

Рассмотрим сначала точку $z = 0$. В старшем порядке по большому параметру λ из уравнения (18) получаем:

$$\frac{\left[(x_0^{(0)}(z))'\right]^2}{x_0^{(0)}(z)} = -\frac{a(z+\zeta)}{kz(1-z)}. \tag{20}$$

Фиксируем значение параметра k условием: $k^{(0)} = -a\zeta$, это обеспечивает $x_0^{(0)}(z) \sim 1 \cdot z$ при $z \sim 0$. Тогда

$$x_0^{(0)}(z) = \left(\frac{1}{2}\int_0^z \sqrt{\frac{z+\zeta}{\zeta z(1-z)}}dz\right)^2. \tag{21}$$

Далее следует построить уравнение для следующего члена асимптотики, функции $x_1^{(0)}(z)$. Сравнивая старшие особенности по переменной z левой и правой частей (18) при $z \sim 0$, находим: $\theta^{(0)} = \theta_0$. Уравнение для $x_1^{(0)}(z)$ можно привести к виду:

$$\left(\frac{x_1^{(0)}(z)}{\sqrt{x_0^{(0)}(z)}}\right)' = \Psi_0^{(0)}(z),$$

$$\Psi_0^{(0)}(z) = -\frac{\sqrt{x_0^{(0)}(z)}}{2a\zeta(x_0^{(0)}(z))'} \tag{22}$$

$$\times\left(T_0(z) - (1-\theta_0^2)\frac{\left[(x_0^{(0)}(z))'\right]^2}{4(x_0^{(0)}(z))^2} - \frac{(x_0^{(0)}(z))'''}{2(x_0^{(0)}(z))'} + \frac{3(x_0^{(0)}(z))''}{4((x_0^{(0)}(z))')^2}\right).$$

Таким образом,

$$x_1^{(0)}(z) = \sqrt{x_0^{(0)}(z)}\int_0^z \Psi_0^{(0)}(z)dz. \tag{23}$$

В итоге получаем следующие нормализованные решения с фиксированным поведением в окрестности точки $z = 0$:

$$h_+^{(0)}(z) = \sqrt{\frac{x^{(0)}(z)}{(x^{(0)}(z))'}}\Gamma(1+\theta_0)(\lambda k^{(0)})^{-\theta_0/2}J_{\theta_0}\left(2\sqrt{\lambda k^{(0)}x^{(0)}(z)}\right), \tag{24}$$

$$h_-^{(0)}(z) = \sqrt{\frac{x^{(0)}(z)}{(x^{(0)}(z))'}}\Gamma(1-\theta_0)(\lambda k^{(0)})^{\theta_0/2}J_{-\theta_0}\left(2\sqrt{\lambda k^{(0)}x^{(0)}(z)}\right). \tag{25}$$

Повторяя эти выкладки для точки $z = 1$, находим: $k^{(1)} = -a(1+\zeta)$, это значение обеспечивает $x_0^{(1)}(z) \sim 1\cdot(1-z)$ при $z \sim 1$. Соответственно,

$$x_0^{(1)}(z) = \left(\frac{1}{2}\int_1^z \sqrt{\frac{z+\zeta}{(1+\zeta)z(1-z)}}\right)^2 dz. \qquad (26)$$

Сравнивая старшие особенности по переменной z левой и правой частей (18) при $z \sim 1$, находим: $\theta^{(1)} = \theta_1$. Продолжая, находим:

$$\begin{gathered} x_1^{(1)}(z) = \sqrt{x_0^{(1)}(z)}\int_1^z \Psi_0^{(1)}(z)dz, \\ \Psi_0^{(1)}(z) = -\frac{\sqrt{x_0^{(1)}(z)}}{2a(1+\zeta)(x_0^{(1)}(z))'} \\ \times\left(T_0(z) - (1-\theta_1^2)\frac{\left[(x_0^{(1)}(z))'\right]^2}{4(x_0^{(1)}(z))^2} - \frac{(x_0^{(1)}(z))'''}{2(x_0^{(1)}(z))'} + \frac{3(x_0^{(1)}(z))''}{4((x_0^{(1)}(z))')^2}\right). \end{gathered} \qquad (27)$$

Соответственно, получаем нормализованные решения с фиксированным поведением в окрестности точки $z = 1$:

$$h_+^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{x^{(1)}(z)}{-(x^{(1)}(z))'}}\Gamma(1+\theta_1)(\lambda k^{(1)})^{-\theta_1/2}J_{\theta_1}\left(2\sqrt{\lambda k^{(1)}x^{(1)}(z)}\right), \quad (28)$$

$$h_-^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{x^{(1)}(z)}{-(x^{(1)}(z))'}}\Gamma(1-\theta_1)(\lambda k^{(1)})^{\theta_1/2}J_{-\theta_1}\left(2\sqrt{\lambda k^{(1)}x^{(1)}(z)}\right). \quad (29)$$

§5. Вычисление асимптотики монодромии

Напомним необходимые нам свойства решений уравнения Бесселя

$$s^2J''(s) + sJ'(s) + (s^2-\nu^2)J(s) = 0\,. \qquad (30)$$

Его решения $J_\nu(s)$ имеют следующее поведение в окрестности $s = 0$: $J_\nu(s) \sim s^\nu/2^\nu\Gamma(1+\nu)$. Асимптотики этих решений описываются соотношениями:

$$J_\nu(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\left[\exp\left(i(s-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4})\right) + \exp\left(-i(s-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4})\right)\right] \qquad (31)$$

при $|s| \to \infty$, $|\arg s| < \pi$ [27]. Используя эту информацию, мы можем описать асимптотику нормализованных решений уравнения (9), мы будем искать ее вплоть до членов порядка $O(1)$. Отметим, имея в виду аргумент функций Бесселя, что $\sqrt{\lambda k(x_0(z)+\lambda^{-1}x_1(z))} = \sqrt{\lambda k x_0(z)} + O(\lambda^{-1/2})$, так что при вычислении этой асимптотики мы оставляем только старший порядок. Мы будем выписывать асимптотики решений уравнения (9) с фиксированным поведением вне окрестности особых точек.

Обозначим

$$\Phi_+(z) = \sqrt{\frac{z(1-z)}{z+\zeta}} \cdot \exp\left(i\Big(\sqrt{-a\lambda}\int_0^z \sqrt{\frac{z+\zeta}{z(1-z)}}dz\Big)\right) ,$$

$$\Phi_-(z) = \sqrt{\frac{z(1-z)}{z+\zeta}} \cdot \exp\left(-i\Big(\sqrt{-a\lambda}\int_0^z \sqrt{\frac{z+\zeta}{z(1-z)}}dz\Big)\right) ,$$

$$\Psi = \sqrt{-a\lambda}\int_0^1 \sqrt{\frac{z+\zeta}{z(1-z)}}dz\,.$$

Тогда из наших соотношений следует, что

$$H^{(0)}(z) = \begin{pmatrix} h_+^{(0)}(z) \\ h_-^{(0)}(z) \end{pmatrix} = \mathcal{C}^{(0)} \begin{pmatrix} \Phi_+(z) \\ \Phi_-(z) \end{pmatrix} ,$$

$$H^{(1)}(z) = \begin{pmatrix} h_+^{(1)}(z) \\ h_-^{(1)}(z) \end{pmatrix} = \mathcal{C}^{(1)} \begin{pmatrix} \Phi_+(z) \\ \Phi_-(z) \end{pmatrix} ,$$

где

$$\mathcal{C}^{(0)}_{11} = \frac{1}{4}\Gamma(1+\theta_0)\sqrt{\frac{\zeta}{\pi}}\left(\lambda k^{(0)}\right)^{-1/4-\theta_0/2} \cdot \exp\left(i\Big(-\pi\theta_0/2-\pi/4\Big)\right) ,$$

$$\mathcal{C}^{(0)}_{12} = \frac{1}{4}\Gamma(1+\theta_0)\sqrt{\frac{\zeta}{\pi}}\left(\lambda k^{(0)}\right)^{-1/4-\theta_0/2} \cdot \exp\left(i\Big(\pi\theta_0/2+\pi/4\Big)\right) ,$$

$$\mathcal{C}^{(0)}_{21} = \frac{1}{4}\Gamma(1-\theta_0)\sqrt{\frac{\zeta}{\pi}}\left(\lambda k^{(0)}\right)^{-1/4+\theta_0/2} \cdot \exp\left(i\Big(+\pi\theta_0/2-\pi/4\Big)\right) ,$$

$$\mathcal{C}^{(0)}_{22} = \frac{1}{4}\Gamma(1-\theta_0)\sqrt{\frac{\zeta}{\pi}}\left(\lambda k^{(0)}\right)^{-1/4+\theta_0/2} \cdot \exp\left(i\Big(-\pi\theta_0/2+\pi/4\Big)\right) ,$$

$$\mathcal{C}^{(1)}_{11} = \frac{1}{4}\Gamma(1+\theta_1)\sqrt{\frac{1+\zeta}{\pi}}\left(\lambda k^{(1)}\right)^{-1/4-\theta_1/2} \cdot \exp\left(-i\Big(\Psi+\pi\theta_1/2+\pi/4\Big)\right) ,$$

$$\mathcal{C}^{(1)}_{12} = \frac{1}{4}\Gamma(1+\theta_1)\sqrt{\frac{1+\zeta}{\pi}}\left(\lambda k^{(1)}\right)^{-1/4-\theta_1/2} \cdot \exp\left(i\Big(\Psi+\pi\theta_1/2+\pi/4\Big)\right) ,$$

$$\mathcal{C}_{21}^{(1)} = \frac{1}{4}\Gamma(1-\theta_1)\sqrt{\frac{1+\zeta}{\pi}}\left(\lambda k^{(1)}\right)^{-1/4+\theta_1/2} \cdot \exp\left(i\Big(-\Psi+\pi\theta_1/2-\pi/4\Big)\right),$$
$$\mathcal{C}_{22}^{(1)} = \frac{1}{4}\Gamma(1-\theta_1)\sqrt{\frac{1+\zeta}{\pi}}\left(\lambda k^{(1)}\right)^{-1/4+\theta_1/2} \cdot \exp\left(i\Big(\Psi-\pi\theta_1/2+\pi/4\Big)\right),$$

Таким образом, асимптотика матрицы связи $\mathbf{M}$ уравнения (9) в наших асимптотических предположениях имеет вид:

$$\mathbf{M} = \mathcal{C}^{(0)}\left[\mathcal{C}^{(1)}\right]^{-1}.$$

Далее,

$$det(\mathcal{C}^{(1)}) = -i\frac{1+\zeta}{8\pi}\Gamma(1+\theta_1)\Gamma(1-\theta_1)\left(\lambda k^{(1)}\right)^{-1/2}\sin(\pi\theta_1).$$

Соответственно, получаем выражение для элемента матрицы связи уравнения (9),

$$\mathbf{M}_{11} = \frac{1}{det(\mathcal{C}^{(1)})}\left(\mathcal{C}_{11}^{(0)}\mathcal{C}_{22}^{(1)} - \mathcal{C}_{12}^{(0)}\mathcal{C}_{21}^{(1)}\right). \tag{32}$$

Тогда для элемента матрицы связи уравнения (2) имеем:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{11} = e^{-a/2}\mathbf{M}_{11} = -e^{-a/2}&\frac{\Gamma(1+\theta_0)\sin\left(\Psi-\pi(\theta_1+\theta_0)/2\right)}{\Gamma(1+\theta_1)\sin(\pi\theta_1)}\\ \times\sqrt{\frac{\zeta}{1+\zeta}}&\left(-a\lambda\zeta\right)^{-1/4-\theta_0/2}\left(-a\lambda(1+\zeta)\right)^{1/4+\theta_1/2}.\end{aligned} \tag{33}$$

Из соотношения (6) находим окончательный результат наших вычислений:

$$\begin{aligned}&\mathbf{k}(a,\theta_0-1+\lambda,\theta_1-1+\lambda,\ a(2-\lambda),\ \lambda\zeta+(1-\lambda)(2-a-\theta_0-\theta_1-\lambda))\\ &= e^{-a/2}\sqrt{\frac{\zeta}{1+\zeta}}\Gamma(1-\theta_1-\lambda)\Gamma(\theta_0+\lambda)\sin\left(\Psi-\pi(\theta_1+\theta_0)/2\right)\\ &\times\left(-a\lambda\zeta\right)^{-1/4-\theta_0/2}\left(-a\lambda(1+\zeta)\right)^{1/4+\theta_1/2}.\end{aligned} \tag{34}$$

§6. Заключительные соображения

Обсудим полученные в данной работе результаты.

1. Мы показали, что интегральная симметрия Эйлера позволяет получить асимптотику монодромии конфлюэнтного уравнения Гойна

для “комбинированных” сингулярных ситуаций. Асимптотические ситуации, которые здесь названы “комбинированными”, ранее в литературе подробно не обсуждались, краткое упоминание их можно найти в книге [24]. Заметим, что “комбинированные” особенности представляют существенные сложности и при компьютерных вычислениях решений в их окрестности. Заметим, что симметрии конфлюэнтного уравнения Гойна, описанные в [19], позволяют расширить набор ситуаций, для которых доступно построение асимптотики монодромии в рамках наших подходов.

2. Асимптотики для “регулярных” ситуаций могут быть получены и оправданы, по крайней мере в принципе, вплоть до любого порядка, см. [23–26]. Соответственно, и асимптотики для описанных здесь “комбинированных” ситуаций имеют тот же статус, поскольку опираются на аналитическую формулу (6).

3. “Комбинированные” особенности могут возникать и при изучении матриц связи между решениями с фиксированным поведением в регулярной и иррегулярной особых точек конфлюэнтного уравнения Гойна. Есть основания полагать, что и в этом случае интегральную симметрию Эйлера можно использовать для вычисления асимптотики соответствующих матриц связи.

4. Интегральной симметрией Эйлера обладает и общее уравнение Гойна (1), так что приведенные соображения могут быть полезны и при вычислении асимптотики матриц связи общего уравнения Гойна при наличии “комбинированных” сингулярностей.

Я благодарен С. Ю. Славянову, с которым имел возможность много лет обсуждать теорию уравнений Гойна.

Список литературы

1. *Heun's differential equations*, ed. by A.Ronveaux. Oxford University Press, Oxford, New York, Tokyo, 1995.
2. S. Yu. Slavyanov, W. Lay, *Special functions. A unified theory based on singularities.* Oxford University Press, Oxford, 2000.
3. И. В. Комаров, Л. И. Пономарев, С. Ю. Славянов, *Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции.* Наука, Москва, 1976.
4. H. Suzuki, E. Takasugi, H. Umetsu, *Perturbations of Kerr-de Sitter Black Holes and Heun's Equations.* — Progress Theor. Phys. **100**, No. 3, (1998), 491–505.
5. D. Vincenzi, E.Bodenschatz, *Single polymer dynamics in elongational flow and the confluent Heun equation.* — J. Phys. A. **39** (2006), 10691–10701. doi:10.1088/0305-4470/39/34/007.

6. A. Castro, J. M. Lapan, A. Maloney, M. J. Rodriguez, *Black Hole Scattering from Monodromy.* — Classical and Quantum Gravity **30**, No. 16 (2013). DOI: 10.1088/0264-9381/30/16/165005.
7. P. Fiziev, D. Staicova, *Application of the confluent Heun functions for finding the quasinormal modes of nonrotating black holes.* — Phys. Rev. D. **84** (2011), 127502.
8. M. S. Cunha, H. R. Christiansen, *Confluent Heun functions in gauge theories on thick braneworlds.* — Phys. Rev. D. **84** (2011), 085002.
9. D. Staicova, P. Fiziev, *The Heun Functions and Their Applications in Astrophysics.* International Workshop on Lie Theory and Its Applications in Physics, ed. V. Dobrev. Varna, Bulgaria, June 2015, pp. 303–308.
10. A. M. Ishkanyan, *Schrödinger potentials solvable in terms of the confluent Heun functions.* — Theor. Math. Phys. **188** (2016), 980–993.
11. H. S. Vieira, V. B. Bezerra, *Confluent Heun functions and the physics of black holes: resonant frequencies, Hawking radiation and scattering of scalar waves.* Annals of Physics, 2016. http://dx.doi.org/10.1016/j.aop.2016.06.016
12. T. Birkandan, M. Hortacsu, *Quantum Field Theory Applications of Heun Type Functions.* — Rept. Math. Phys. **79**, No. 81 (2017). (arXiv: 1605.07848 [hep-th])
13. L. Andersson, S. Ma, C. Paganini, B. F. Whiting, *Mode stability on the real axis.* — J. Math. Phys. **58** (2017), 072501. https://doi.org/10.1063/1.4991656
14. M. Bednarik, M. Cervenka, *Description of waves in inhomogeneous domains using Heun's equation.* — Waves in Random and Complex Media **28**, No. 2 (2018) 236–252. DOI: 10.1080/17455030.2017.1338788
15. M. Hortaçsu, *Heun Functions and Some of Their Applications in Physics.* Advances in High Energy Physics 2018. Article ID 8621573
16. O. V. Motygin, *On numerical evaluation of the Heun functions.* Proceedings of Days on Diffraction 2015, pp. 222–227. arXiv:1506.03848 [math.NA].
17. O. V. Motygin, *On evaluation of the confluent Heun functions.* arXiv:1804.01007v1 [math.NA] 2 Apr (2018).
18. A. Ya. Kazakov, S. Yu. Slavyanov, *Integral relations for the Heun-class special functions.* — Theor. Math. Phys. **107** (1996), 733–738.
19. A. Ya. Kazakov, *Symmetries of the confluent Heun equation.* — J. Math. Sci. **117**, No. 2 (2003), 3918–3927.
20. A. Ya. Kazakov, S. Yu. Slavyanov, *Euler integral symmetries for a deformed Heun equation and symmetries of the Painleve VI equation.* — Theor. Math. Phys. **155**, No. 2 (2008), 721–732.
21. A. Ya. Kazakov, S. Yu. Slavyanov, *Euler integral symmetries for the confluent Heun equation and symmetries of the Painleve equation PV.* — Theor. Math. Phys. **179** (2014), 543–549.
22. E. Hille, *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain.* Dover Publications Inc., New York, 1997.
23. T. M. Cherry, *Uniform asymptotic formulae for functions with transition points.* — Transactions of the American Mathematical Society **68**, No. 1 (1950), 224–257.
24. F. W. J .Olver, *Asymptotics and special functions.* Academic Press, New York, San-Francisco, London, 1974.

25. S. Slavyanov, *Asymptotic solutions of the one-dimensional Schrödinger equation.* Providence: American Mathematical Society, 1996. - xvi, 190 p.: ill. - Translations of mathematical monographs; vol.151.
26. V. M. Babich, K. D. Cherednichenko, *On a differential equation with a singular point of regular type and a large parameter.* — Integral Transforms and Special Functions, 02001 OPA (Overseas Publishers Association) **11**, No. 2 (2001), 101–112.
27. M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions.* National Bureu of Standards, Washington, 1964.

Kazakov A. Ya. Euler integral symmetries and the asymptotic of the monodromy for the Heun equation.

Euler integral transform connects monodromy matrices of the Heun equation with different sets of parameters. In this paper, this fact is used to calculate the asymptotic behavior of the monodromy of the Heun confluent equation in the case of the presence of a “combined” singularity.

СПбГУПТД, СПбГУАП
E-mail: a_kazak@mail.ru

Поступило 30 октября 2020 г.