

Е. А. Злобина

## КОРОТКОВОЛНОВАЯ ДИФРАКЦИЯ НА КОНТУРЕ С НЕГЛАДКОЙ КРИВИЗНОЙ. ПОГРАНСЛОЙНЫЙ ПОДХОД

Василию Михайловичу Бабичу посвящается

### §1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена построению формул в задачах коротковолновой дифракции на контурах с негладкой кривизной в рамках последовательного метода пограничного слоя (см., например, [1]). Рассматривается некасательное падение плоской волны на контур  $C$  с импедансными граничными условиями

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + ikgu \right) \Big|_C = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\frac{\partial}{\partial n}$  – производная по нормали к контуру, направленной внутрь области  $\mathbb{R}^2/\Omega$  (см. Рис. 1),  $g = \text{const} \in \mathbb{C}$  – постоянный поверхностный импеданс. Мы предполагаем импеданс “пассивным”, т.е.  $\text{Re } g \geq 0$ . Особое внимание уделяется случаю, когда падающая волна приходит в точку негладкости контура под таким углом скольжения  $\beta$  (см. Рис. 1), что  $\sin \beta \approx g$ .

Подобные дифракционные задачи привлекали внимание многих исследователей начиная с 60-х годов прошлого века (см., например, [2–12]). Использовались различные версии метода Кирхгофа (или метода

---

*Ключевые слова:* дифракция коротких волн, негладкие препятствия, метод пограничного слоя.

Работа выполнена за счет гранта в форме субсидий из федерального бюджета на создание и развитие международных математических центров мирового уровня, соглашение между МОН и ПОМИ РАН №. 075-15-2019-1620 от 8 ноября 2019 г.

физической теории дифракции<sup>1)</sup> и метода пограничного слоя, а также их комбинации. В простейшем случае скачка кривизны и идеальных граничных условий (т.е. условий Дирихле или Неймана), которому посвящены работы [2–7], были найдены выражения для дифрагированной волны. В монографии [8] построено описание поля в переходной зоне в виде суммы двух френелевских интегралов. А. Ф. Филиппов [9] исследовал нестационарные задачи дифракции на скачке кривизны или ее производной порядка  $j = 1, 2, \dots$ . Аналогичные стационарные задачи были рассмотрены Каминецким и Келлером [10] в случае некасательного падения волны на контур с “пассивным” импедансом. Опираясь на своеобразную версию метода погранслоя, они построили выражение для дифрагированной волны, однако поле в переходной зоне было получено только на предельном луче и только на малых расстояниях от контура. Рогофф и Киселев [11] обратились к качественно другому случаю “активного” импеданса ( $g < 0$  в (1)), когда при  $-1 < g < 0$  возникает поверхностная волна. Они подробно рассмотрели поле в переходной зоне для скачка кривизны методом Кирхгофа. Ряд работ (например, [2, 4, 6, 7, 12]) посвящен случаям касательного падения или наблюдения, падению поверхностной волны и т.п.

В перечисленных работах не обсуждались детали сшивания формул, описывающих влияние негладкости кривизны на волновое поле, с геометрически отраженной волной, что не дает возможности точно оценить размеры областей пригодности полученных выражений. Такой анализ был впервые проведен в недавней работе [14], где рассматривалась дифракция на контуре со скачком кривизны в случае некасательного падения плоской волны и граничных условий Дирихле. В рамках последовательного метода пограничного слоя поле в переходной зоне на малых (в сущности, таких же как в [10]) расстояниях от точки негладкости было описано в терминах функции параболического цилиндра  $D_{-3}$ , ранее не встречавшейся в теории дифракции. Наконец, в [15], также методом погранслоя, исследована более сложная (и не рассматривавшаяся ранее) задача дифракции на контуре с непрерывной кривизной, имеющей в одной точке гельдеровскую сингулярность (см. (4)). В предположении, что падение некасательное и

---

<sup>1)</sup>Мы не обсуждаем различия между этими методами, они разбираются, например, в [13].

выполнены идеальные граничные условия, были построены выражения для поля в переходной зоне (как и в [14], не слишком далеко от точки негладкости контура) и для дифрагированной волны.

В настоящей заметке развитая в [14, 15] последовательная погранслоиная техника распространяется на случаи, когда производная кривизны заданного порядка  $j = 1, 2, \dots$  имеет скачок или гельдеровскую сингулярность (т.е. особенность вида (4)). План исследования примерно тот же, что в [14, 15]. Сначала в окрестности точки негладкости строится внутреннее разложение. Сшивая его с лучевыми формулами на больших по сравнению с длиной волны расстояниях от контура, мы получаем выражение для дифрагированной волны. Затем, на основе анзаца Н. В. Цепелева [16], строятся асимптотические формулы для поля вблизи предельного (т.е. геометрически отраженного в точке негладкости) луча. При этом влияние негладкости кривизны на волновое поле описывается в терминах функций параболического цилиндра. Как и в [14, 15], оказывается, что анзац Цепелева применим только на расстояниях, малых по сравнению с геометрическим параметром контура (см. (15)). Области пригодности полученных выражений определяются из анализа лучевых формул, который вполне аналогичен проведенному в [14, 15] и здесь для краткости опущен.

## §2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мы предполагаем гармоническую зависимость от времени  $t$  вида  $e^{-i\omega t}$ . Здесь  $\omega$  – круговая частота, связанная с волновым числом  $k$  соотношением  $\omega/c = k$ , и  $c = \text{const}$  – скорость распространения волн, которая принимается равной единице:  $c = 1$ .

Полное волновое поле  $u = u^i + u^o$ , где  $u^i$  – падающая волна, а  $u^o$  – уходящая волна, описывается уравнением Гельмгольца

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) u = 0, \quad (2)$$

причем

$$k \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Поле  $u$  рассматривается в бесконечной области  $\mathbb{R}^2/\Omega$ , ограниченной контуром  $C$  (см. Рис. 1). На контуре выполнено импедансное граничное условие (1). Предельные значения импеданса  $g = 0$  и  $g = \infty$  соответствуют идеальным граничным условиям Неймана и Дирихле.

Контур  $C$  предполагается гладким всюду, за исключением точки  $O$ . Параметризуем его длиной дуги  $s$ , отсчитываемой от  $O$ . Производная порядка  $j = 1, 2, \dots$  кривизны контура  $\varkappa = \varkappa(s)$  имеет в точке  $O$  особенность вида

$$\frac{d^j}{ds^j} \varkappa(s) = \varkappa_j + h s_+^\lambda, \quad 0 \leq \lambda < 1, \quad (4)$$

а кривизна и все ее производные порядка меньше  $j$  непрерывны. Здесь

$$s_+^\nu = \begin{cases} 0, & \text{при } s \leq 0, \\ s^\nu, & \text{при } s > 0, \end{cases} \quad \operatorname{Re} \nu > -1, \quad (5)$$

(см. [17]), а  $\varkappa_j$  и  $h$  – не зависящие от большого параметра  $k$  константы, причем  $h \neq 0$ . Из (5) видно, что при  $\lambda = 0$  производная кривизны в точке  $O$  имеет скачок. В случае  $0 < \lambda < 1$  мы называем особенность типа (4) гельдеровской сингулярностью (см. [15]).

Для обезразмеривания формул введем геометрический параметр задачи

$$\varkappa = |\varkappa_0|, \quad (6)$$

где  $\varkappa_0 = \varkappa(0)$  – значение кривизны в точке  $O$ . Далее мы будем работать в рамках случая общего положения  $\varkappa_0 \neq 0$ , а случай уплощения  $\varkappa_0 = 0$  кратко обсудим в пункте 5. Параметр (6) естественным образом возникнет в (15).

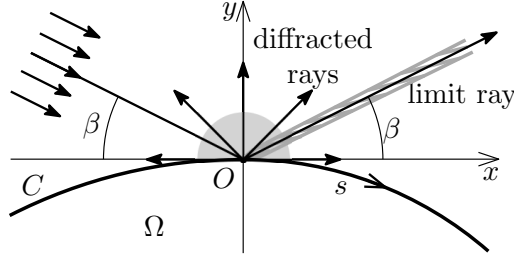


Рис. 1. Падающая и дифрагированная волны и пограничные слои

Пусть на контур падает плоская волна

$$u^i = e^{ik(x \cos \beta - y \sin \beta)}, \quad (7)$$

где  $\beta$  – угол скольжения, а декартовы координаты  $x$  и  $y$  введены как показано на Рис. 1. Падение предполагается некасательным, то есть  $\beta > \delta > 0$  с фиксированной и не зависящей от  $k$  константой  $\delta$ .

Согласно геометрической теории дифракции (см. [13]), уходящая волна в самом грубом приближении есть сумма геометрически отраженной от гладких частей контура волны  $u^r$  и дифрагированной точкой его негладкости волны  $u^d$ :

$$u^o = u^r + u^d. \quad (8)$$

В рассматриваемом нами случае некасательного падения лучевой метод (см., например, [1, 13]) дает для  $u^r$  явное выражение, теряющее гладкость на предельном (геометрически отраженном в точке негладкости контура) луче. Дифрагированная волна  $u^d$  (см. (8)) на больших по сравнению с длиной волны расстояниях

$$k\rho \gg 1, \quad (9)$$

является цилиндрической волной:

$$u^d = A(\phi; k) \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} [1 + \mathcal{E}(\rho, \phi; k)]. \quad (10)$$

Здесь  $\rho$  и  $\phi$  – классические полярные координаты:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad 0 \leq \rho < \infty, \quad -\pi < \phi \leq \pi, \quad (11)$$

$A(\phi; k)$  – дифракционный коэффициент (см., например, [13]), а  $\mathcal{E}(\rho, \phi; k)$  – неравномерная по углу погрешность. Для дифракции на негладких препятствиях (см., например, [10, 13–15]) характерно обращение  $A$  и  $\mathcal{E}$  в бесконечность на предельном луче. В нашей задаче явные выражения для  $A$  и  $\mathcal{E}$  будут получены в пункте 3.5.1.

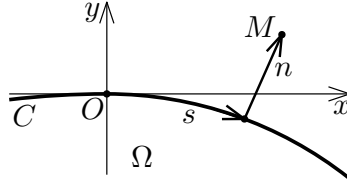
Из сказанного выше ясно, что представление (8) применимо в области  $\mathbb{R}^2/\Omega$  за исключением двух пограничных слоев: малой окрестности точки  $O$  (закрашенная область на Рис. 1) и узкой окрестности предельного луча – так называемой переходной зоне (штрихованная область на Рис. 1). Исследуя волновое поле в пограничных слоях по схеме, описанной в [14, 15], мы получим формулу для дифракционного коэффициента  $A(\phi; k)$  и асимптотическое выражение, описывающее влияние негладкости кривизны на волновое поле в переходной зоне.

§3. ОКРЕСТНОСТЬ ТОЧКИ  $O$ 

**3.1. Локальные координаты в окрестности точки  $O$ .** Будем характеризовать положение точки наблюдения  $M$  из малой окрестности точки  $O$  ортогональными координатами  $s$  и  $n$  (см. Рис. 2). Здесь  $n$  – длина отрезка нормали, опущенной из  $M$  на контур  $C$ ,  $n \geq 0$  в области распространения волн  $\mathbb{R}^2/\Omega$ . Удобно ввести также координаты  $r$  и  $\varphi$ :

$$s = r \cos \varphi, \quad n = r \sin \varphi, \quad 0 \leq r < \infty, \quad -\pi < \varphi \leq \pi. \quad (12)$$

В малой окрестности точки  $O$  координаты  $s$  и  $n$  являются аналогом декартовых координат, а  $r$  и  $\varphi$  – полярных, и, как мы вскоре увидим, близки к ним.

Рис. 2. Координаты  $s$  и  $n$ 

Как и в [14,15], с помощью хорошо известных формул дифференциальной геометрии (см., например, [18]) нетрудно выразить координаты  $x$  и  $y$  точки  $M$  через  $s$  и  $n$ :

$$\begin{cases} x = s + \alpha_0 n s + \dots + h \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(j + \lambda + 2)} n s_+^{j+\lambda+1} + O(\varkappa^{j+2} r^{j+3}), \\ y = n - \frac{\alpha_0 s^2}{2} - \dots - h \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(j + \lambda + 3)} s_+^{j+\lambda+2} + O(\varkappa^{j+2} r^{j+3}). \end{cases} \quad (13)$$

Здесь многоточием заменены не зависящие от  $h$  гладкие члены. Из (13) легко получить соотношения

$$r = \rho [1 + O(\varkappa \rho)], \quad \varphi = \phi [1 + O(\varkappa \rho)], \quad (14)$$

так что  $r \approx \rho$  и  $\varphi \approx \phi$  в области, где

$$\varkappa \rho \ll 1. \quad (15)$$

Все дальнейшие рассмотрения относятся к области, где выполнено условие (15).

**3.2. Падающая волна и оператор Гельмгольца в растянутых координатах.** Волновое поле в малой окрестности точки  $O$  будем описывать, как в [14, 15], с помощью стандартных растянутых координат  $S$  и  $N$  (см., например, [1, 10, 19]):

$$S = ks, \quad N = kn. \quad (16)$$

Из (13) очевидно, что фаза падающей волны (7) в координатах (16) представляет собой ряд по отрицательным степеням большого параметра  $k$ . В малой окрестности точки  $O$  падающая волна имеет вид

$$u^i = u_0^i + \dots + \frac{h}{k^{j+\lambda+1}} u_{j+\lambda+1}^i + \dots, \quad k \rightarrow \infty, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} u_0^i &= e^{i(S \cos \beta - N \sin \beta)}, \\ u_{j+\lambda+1}^i &= i\Gamma(\lambda+1) \\ &\times \left( \frac{\sin \beta}{\Gamma(j+\lambda+3)} S_+^{j+\lambda+2} + \frac{\cos \beta}{\Gamma(j+\lambda+2)} N S_+^{j+\lambda+1} \right) e^{i(S \cos \beta - N \sin \beta)}. \end{aligned} \quad (18)$$

В (18) первым множителем мы заменили не зависящие от  $h$  гладкие члены порядка  $k^{-1}, \dots, k^{-j-1}$ , а вторым – члены большего порядка малости.

Оператор Гельмгольца переписывается в растянутых координатах  $S$  и  $N$  с помощью стандартных формул дифференциальной геометрии (см., например, [18]):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 = k^2 \left( L_0 + \dots + \frac{h}{k^{j+\lambda+1}} L_{j+\lambda+1} + \dots \right), \quad k \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{\partial^2}{\partial N^2} + \frac{\partial^2}{\partial S^2} + 1, \\ L_{j+\lambda+1} &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(j+\lambda+1)} \left( -2N S_+^{j+\lambda} \frac{\partial^2}{\partial S^2} + S_+^{j+\lambda} \frac{\partial}{\partial N} \right) - \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(j+\lambda)} N S_+^{j+\lambda-1} \frac{\partial}{\partial S}. \end{aligned} \quad (20)$$

Функции  $S_+^\nu$  определены в (5)<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>При  $j = 0$  и  $\lambda \rightarrow 0$  функция  $\frac{S_+^{j+\lambda-1}}{\Gamma(j+\lambda)}$  переходит в дельта-функцию Дирака  $\delta(S)$  (см. [17]).

В скобках в (19) первым многоточием мы заменили операторы с не зависящими от  $h$  гладкими коэффициентами порядка  $k^{-1}, \dots, k^{-j-1}$ , а вторым – члены большего порядка малости.

**3.3. Задачи пограничного слоя.** Следуя [14,15], мы ищем внутреннее разложение для уходящей волны в виде ряда, аналогичного (17),

$$u^o = U_0^o + \dots + \frac{h}{k^{j+\lambda+1}} U_{j+\lambda+1}^o + \dots, \quad k \rightarrow \infty \quad (21)$$

и интересуемся только линейным по  $h$  членом  $U_{j+\lambda+1}^o$ .

Подставляя (17) и (21) в уравнение Гельмгольца (2) и граничное условие (1) и приравнивая к нулю коэффициенты при степенях  $k$ , приходим к задачам пограничного слоя. Задача для  $U_{j+\lambda+1}^o$  имеет вид

$$\left\{ L_0 U_{j+\lambda+1}^o + L_{j+\lambda+1} U_0^o = 0, \quad (22a) \right.$$

$$\left. \left( \frac{\partial}{\partial N} + ig \right) U_{j+\lambda+1}^o \Big|_{N=0} = - \left( \frac{\partial}{\partial N} + ig \right) u_{j+\lambda+1}^i \Big|_{N=0}, \quad (22b) \right.$$

а для  $U_0^o$

$$\left\{ L_0 U_0^o = 0, \quad (23a) \right.$$

$$\left. \left( \frac{\partial}{\partial N} + ig \right) U_0^o \Big|_{N=0} = - \left( \frac{\partial}{\partial N} + ig \right) u_0^i \Big|_{N=0}, \quad (23b) \right.$$

см. (18) и (20). Имея в виду сшивание с уходящей волной, дополним задачи пограничного слоя типичным для теории дифракции коротких волн требованием, чтобы их решения удовлетворяли принципу предельного поглощения (см., например, [1, 15, 19]).

**3.4. Исследование решения задачи (22).** Из (23) мгновенно находим

$$U_0^o = R(\beta) e^{i(S \cos \beta + N \sin \beta)}. \quad (24)$$

Здесь  $R(\beta)$  – стандартный коэффициент отражения плоской волны (см. [20])

$$R(\beta) = \frac{\sin \beta - g}{\sin \beta + g}. \quad (25)$$

Если волна падает на контур под *критическим углом*, определяемым равенством

$$\sin \beta = g, \quad (26)$$

(что возможно при  $0 < g \leq 1$ ), то  $R = 0$ .



С учетом (18), (20) и (24), задача (22) принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{\partial^2}{\partial N^2} + 1 \right) U_{j+\lambda+1}^o = -R(\beta) \Gamma(\lambda + 1) \\ \times \left( \frac{i \sin \beta + 2 \cos^2 \beta N}{\Gamma(j + \lambda + 1)} S_+^{j+\lambda} - \frac{i \cos \beta}{\Gamma(j + \lambda)} N S_+^{j+\lambda-1} \right) e^{i(S \cos \beta + N \sin \beta)}, \quad (27a) \\ \left( \frac{\partial}{\partial N} + ig \right) U_{j+\lambda+1}^o \Big|_{N=0} \\ = \Gamma(\lambda + 1) \left( \frac{\sin \beta (g - \sin \beta)}{\Gamma(j + \lambda + 3)} S_+^{j+\lambda+2} - \frac{i \cos \beta}{\Gamma(j + \lambda + 2)} S_+^{j+\lambda+1} \right) e^{iS \cos \beta}. \quad (27b) \end{array} \right.$$

Технически удобно, следуя [14,15], представить  $U_{j+\lambda+1}^o$  как сумму двух функций  $U_{j+\lambda+1}^o = W + V$ , где  $W = W(S, N)$  и  $V = V(S, N)$  – решения задач

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{\partial^2}{\partial N^2} + 1 \right) W = -R(\beta) \Gamma(\lambda + 1) \\ \times \left( \frac{i \sin \beta + 2 \cos^2 \beta N}{\Gamma(j + \lambda + 1)} S_+^{j+\lambda} - \frac{i \cos \beta}{\Gamma(j + \lambda)} N S_+^{j+\lambda-1} \right) e^{i(S \cos \beta + N \sin \beta)}, \quad (28a) \\ \left( \frac{\partial}{\partial N} + ig \right) W \Big|_{N=0} = R(\beta) \Gamma(\lambda + 1) \\ \times \left( \frac{\sin \beta (g + \sin \beta)}{\Gamma(j + \lambda + 3)} S_+^{j+\lambda+2} + \frac{i \cos \beta}{\Gamma(j + \lambda + 2)} S_+^{j+\lambda+1} \right) e^{iS \cos \beta}, \quad (28b) \end{array} \right.$$

и

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{\partial^2}{\partial N^2} + 1 \right) V = 0, \quad (29a) \\ \left( \frac{\partial}{\partial N} + ig \right) V \Big|_{N=0} = (R(\beta) + 1) \Gamma(\lambda + 1) \\ \times \left( \frac{g^2 - \sin^2 \beta}{\Gamma(j + \lambda + 3)} S_+^{j+\lambda+2} - \frac{i \cos \beta}{\Gamma(j + \lambda + 2)} S_+^{j+\lambda+1} \right) e^{iS \cos \beta}, \quad (29b) \end{array} \right.$$

соответственно. Единственность решений (28) и (29) обеспечивается принципом предельного поглощения.

Нетрудно проверить, что решением задачи (28) является функция

$$W = iR(\beta)\Gamma(\lambda + 1) \times \left( \frac{\cos \beta}{\Gamma(j+\lambda+2)} N S_+^{j+\lambda+1} - \frac{\sin \beta}{\Gamma(j+\lambda+3)} S_+^{j+\lambda+2} \right) e^{i(S \cos \beta + N \sin \beta)}. \quad (30)$$

Как и (24), она обращается в нуль, если волна падает на контур под критическим углом (26). Функция (30) сшивается с отраженной волной и не представляет для нас интереса.

**3.5. Исследование решения задачи (29).** Решение задачи (29) будем искать в виде интеграла Фурье

$$V(S, N) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\sigma, N) e^{i\sigma S} d\sigma \quad (31)$$

с неизвестной плотностью  $\mu(\sigma, N)$ . Вместо  $V$  мы будем рассматривать функцию  $hV/k^{j+\lambda+1}$ , которая имеет непосредственный смысл аддитивной части волнового поля (см. (21)). Действуя как в [14, 15], приходим к следующему представлению для  $hV/k^{j+\lambda+1}$ :

$$\frac{hV(r, \varphi)}{k^{j+\lambda+1}} = \frac{h\Gamma(\lambda + 1) \sin \beta e^{-i\frac{\pi}{2}(j+\lambda)}}{\pi k^{j+\lambda+1} (\sin \beta + g)} \times \int_{\gamma} \frac{g^2 - 1 + \sigma \cos \beta}{g + \sqrt{1 - \sigma^2}} \frac{e^{ikr(\sqrt{1-\sigma^2} \sin \varphi + \sigma \cos \varphi)}}{(\sigma - \cos \beta)^{j+\lambda+3}} d\sigma. \quad (32)$$

Контур интегрирования  $\gamma$  показан на Рис. 3, обозначения  $r$  и  $\varphi$  введены в (12). Ветви многозначных функций  $(\sigma - \cos \beta)^{-j-\lambda-3}$  (в случае  $\lambda > 0$ ) и  $\sqrt{1 - \sigma^2}$  выбраны так, что их значения положительны при  $\sigma > \cos \beta$  и  $-1 < \sigma < 1$ , соответственно; разрезы комплексной плоскости показаны на Рис. 3.

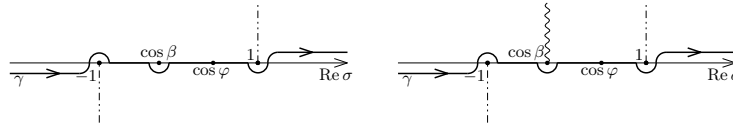


Рис. 3. Контур интегрирования в (32): слева для  $\lambda = 0$ , справа для  $0 < \lambda < 1$

Мы будем исследовать функцию (32) при  $k\rho \gg 1$  (см. (9)), опираясь на стандартную асимптотическую технику (см., например, [21]). Вклады в асимптотику дают критическая точка фазы  $\sigma = \cos \varphi$  и особая точка амплитуды  $\sigma = \cos \beta$  (при  $\lambda = 0$  – полюс, при  $\lambda \neq 0$  – точка ветвления).

3.5.1. *Критическая точка фазы не близка к особой точке амплитуды.* Предположим сначала, что точки  $\sigma = \cos \varphi$  и  $\sigma = \cos \beta$  достаточно удалены друг от друга, так что асимптотика (32) может быть найдена стандартным методом стационарной фазы (см., например, [21]).

Согласно [14, 15], дифрагированной волне отвечает вклад критической точки фазы, который имеет вид

$$\tilde{A}(\varphi; k) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{kr(\varphi - \beta)^2}\right) \right], \quad (33)$$

где

$$\tilde{A}(\varphi; k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{h\Gamma(1 + \lambda) \sin \beta \sin \varphi (\cos \beta \cos \varphi + g^2 - 1)}{k^{j+\lambda+1} (g + \sin \beta)(g + \sin \varphi) (\cos \varphi - \cos \beta)^{j+\lambda+3}} e^{-i\frac{\pi}{4} - i\frac{(j+\lambda)\pi}{2}}. \quad (34)$$

Погрешность в (33) мала при условии

$$\sqrt{k\rho} |\phi - \beta| \gg 1, \quad (35)$$

которое означает, что точка наблюдения расположена не слишком близко к предельного лучу.

Следуя [14, 15], сошьем выражение (33) с цилиндрической волной (10) при условии (35). Учитывая соотношения  $r \approx \rho$ ,  $\varphi \approx \phi$  (см. (14) и (15)), получим, что  $A(\phi; k) = \tilde{A}(\phi; k)$ ,  $\mathcal{E} = O(1/k\rho(\phi - \beta)^2)$ , и дифрагированная волна  $u^d$  имеет вид

$$u^d = \tilde{A}(\phi; k) \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{k\rho(\phi - \beta)^2}\right) \right]. \quad (36)$$

Малость остаточного члена в (36) обеспечивается соотношением (35). Выражение (36) распространяется и на расстояния, не удовлетворяющие ограничению (15).

Отметим, что если волна приходит в точку  $O$  под критическим углом  $\sin \beta = g$  (см. (26)), то дифракционный коэффициент (34) принимает вид

$$\tilde{A}(\phi; k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{h\Gamma(\lambda + 1) \cos \beta \sin \phi}{k^{j+\lambda+1} (\sin \beta + \sin \phi) (\cos \phi - \cos \beta)^{j+\lambda+2}} e^{-i\frac{\pi}{4} - i\frac{(j+\lambda)\pi}{2}}, \quad (37)$$

и порядок роста при приближении к предельному лучу становится меньше.

Из (14) вытекает, что

$$\tilde{A}(\varphi; k) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} = \tilde{A}(\phi; k) \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} [1 + O(k\kappa\rho^2)]. \quad (38)$$

Следовательно, (33) и (36) не сшиваются друг с другом, если не выполняется условие

$$k\kappa\rho^2 \ll 1. \quad (39)$$

Таким образом, неравенство (39) характеризует размер пограничного слоя вокруг точки  $O$ .

**3.5.2. Критическая точка фазы близка к особой точке амплитуды.** Теперь рассмотрим случай, когда условие (35) не выполняется, и анализ интеграла в (32) требует модификации метода стационарной фазы. Пусть точка наблюдения расположена вблизи предельного луча, а именно

$$(k\rho)^{\frac{1}{3}}(\phi - \beta) \ll 1, \quad (40)$$

и по-прежнему выполнено условие (9). Как и в [14, 15], в малой окрестности критической точки фазы мы вводим переменную интегрирования  $\sigma = \cos \varphi + \zeta \sin \varphi$ , раскладываем фазу (32) до квадратичных членов, а затем распространяем интегрирование на всю ось:

$$\begin{aligned} \frac{hV}{k^{j+\lambda+1}} &\approx \frac{h\Gamma(\lambda + 1)}{\pi(k \sin \beta)^{j+\lambda+1}} e^{-i\frac{\pi}{2}(j+\lambda)} e^{ikr} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{-R(\beta)}{(\zeta - (\varphi - \beta))^{j+\lambda+3}} + \frac{g \cos \beta}{(g + \sin \beta)^2} \frac{1}{(\zeta - (\varphi - \beta))^{j+\lambda+2}} \right) e^{-\frac{ikr}{2}\zeta^2} d\zeta. \quad (41) \end{aligned}$$

Здесь мы разбили амплитуду подынтегральной функции на два слагаемых. Вклад второго слагаемого в асимптотику имеет меньший порядок

по  $kr$ , но первое слагаемое обращается в нуль при  $R = 0$ . Пользуясь интегральным представлением для функции параболического цилиндра (см. [22])

$$D_\nu(Z) = \frac{e^{i(\nu+1)\pi}}{\sqrt{2\pi}i} e^{\frac{Z^2}{4}} \int_{-\varepsilon+i\infty}^{-\varepsilon-i\infty} e^{Zp+\frac{1}{2}p^2} p^\nu dp, \quad \varepsilon > 0, \quad (42)$$

нетрудно выразить асимптотику правой части (41) через функции  $D_{-j-\lambda-3}$  и  $D_{-j-\lambda-2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{hV}{k^{j+\lambda+1}} &\approx -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{h\Gamma(\lambda+1)}{(\sin\beta)^{j+\lambda+1}} \frac{r^{1+\frac{j+\lambda}{2}}}{k^{\frac{j+\lambda}{2}}} e^{i\frac{(j+\lambda)\pi}{4}} e^{ikr-i\frac{z^2}{2}} \\ &\times \left[ R(\beta)D_{-j-\lambda-3}(\sqrt{2}ze^{-i\frac{\pi}{4}}) + \frac{g\cos\beta}{(g+\sin\beta)^2} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{kr}} D_{-j-\lambda-2}(\sqrt{2}ze^{-i\frac{\pi}{4}}) \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь введена стандартная полутеневая переменная (см. [1, 11, 13])

$$z = \sqrt{\frac{kr}{2}} (\varphi - \beta). \quad (44)$$

Если для угла скольжения  $\beta$  выполнено неравенство  $kr|g - \sin\beta|^2 \gg 1$ , то главный член асимптотики дается функцией  $D_{-j-\lambda-3}$ . Если же  $kr|g - \sin\beta|^2 \ll 1$ , то главный член выражается через  $D_{-j-\lambda-2}$ . При  $kr|g - \sin\beta|^2 = O(1)$  слагаемые в квадратных скобках в правой части (43) равноправны.

Относительная погрешность в (43) равна

$$O(kr(\varphi - \beta)^3) + O\left(\frac{1}{\sqrt{kr}}\right), \quad (45)$$

процедура ее получения вполне аналогична описанной в [14]. Малость погрешности обеспечивается условиями (9) и (40).

Пользуясь асимптотическими формулами для функций параболического цилиндра (см., например, [22]) нетрудно показать, что (43) сшивается с (33). Выражение (43), как и (33), пригодно для описания волнового поля только на малых расстояниях от  $O$ , удовлетворяющих ограничению (39).

#### §4. ОКРЕСТНОСТЬ ПРЕДЕЛЬНОГО ЛУЧА НА НЕБОЛЬШИХ РАССТОЯНИЯХ ОТ КОНТУРА

Обратимся теперь к волновому полю в пограничном слое, окружающем предельный луч, на расстояниях, не удовлетворяющих ограничению (39). Для построения асимптотических формул, описывающих влияние негладкости кривизны, мы берем за основу анзац В. Н. Цепелева [16]

$$\mathfrak{U}(\xi, \eta) = CD_{-\frac{1-q}{2}} \left( \sqrt{2k} \xi e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) D_{-\frac{1+q}{2}} \left( \sqrt{2k} \eta e^{-i\frac{\pi}{4}} \right), \quad (46)$$

являющийся точным решением уравнения Гельмгольца (2). Здесь  $D_\nu$  – функция параболического цилиндра,  $C \in \mathbb{C}$  – амплитудная константа,  $q \in \mathbb{C}$  – параметр разделения, а  $\xi$  и  $\eta$  – параболические координаты, введенные, аналогично [16], следующим образом:

$$\xi = \sqrt{2\rho} \cos \left( \frac{\phi - \beta}{2} \right), \quad \eta = \sqrt{2\rho} \sin \left( \frac{\phi - \beta}{2} \right), \quad (47)$$

см. (11). Сшивая анзац (46) с выражением (43) для поля в малой окрестности точки  $O$ , в окрестности предельного луча получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}(\xi, \eta) \approx & -\frac{h\Gamma(\lambda+1)}{\sqrt{\pi}(\sqrt{2}\sin\beta)^{j+\lambda+1}} \frac{\xi^{j+\lambda+2}}{k^{\frac{j+\lambda}{2}}} e^{i\frac{(j+\lambda)\pi}{4}} e^{i\frac{\xi^2}{2}} \\ & \times \left( R(\beta)D_{-j-\lambda-3} \left( \sqrt{2k} \eta e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) + \frac{g \cos \beta}{(g + \sin \beta)^2} \frac{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{k}\xi} D_{-j-\lambda-2} \left( \sqrt{2k} \eta e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) \right). \end{aligned} \quad (48)$$

Анализ лучевых формул, вполне аналогичный проведенному в [14, 15], показывает, что область пригодности выражения (48) характеризуется неравенствами  $\varkappa\rho \ll 1$  (см. (15)) и

$$k\varkappa\rho^2(\phi - \beta)^2 \ll 1. \quad (49)$$

Этот анализ мы опускаем. Нетрудно проверить, что при больших значениях переменной  $\eta$  выражение (48) сшивается с дифрагированной волной (36).

Асимптотика (48), полученная нами в случае “пассивного” импеданса, совершенно не похожа на выражение для поля в переходной зоне, полученное в [11] для “активного” импеданса.

## §5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Если  $O$  является точкой уплощения контура  $C$ , то введенный выше геометрический параметр  $\varkappa$  (см. (6)) обращается в нуль, и оценки размеров областей пригодности разложений (12), (36) и (48) требуют модификации. Для этого введем геометрический параметр задачи следующим образом. Из (4) ясно, что при малых  $s$

$$\varkappa(s) = \begin{cases} \varkappa_- |s|^q + \dots, & \text{при } s < 0, \\ \varkappa_+ s^q + \dots, & \text{при } s \geq 0 \end{cases} \quad (50)$$

с некоторым  $q$ , удовлетворяющим условию  $0 \leq q \leq j + \lambda$ , причем хотя бы одна из констант  $\varkappa_{\pm}$  не равна нулю. Положим  $\varkappa = \max\{|\varkappa_-|, |\varkappa_+|\}$ . Теперь формулы (13), связывающие координаты  $x$  и  $y$  с координатами  $s$  и  $n$ , можно записать в виде  $x = s + O(\varkappa r^{q+2})$ ,  $y = n + O(\varkappa r^{q+2})$ . Отсюда нетрудно получить, что оценки (15), (39) и (49) заменяются на

$$\varkappa \rho^{q+1} \ll 1, \quad k \varkappa \rho^{q+2} \ll 1, \quad k \varkappa (\rho |\phi - \beta|)^{q+2} \ll 1, \quad (51)$$

соответственно. Заметим, что чем больше  $q$  (чем контур  $C$  локально ближе к прямой), тем шире области, характеризуемые этими неравенствами.

Формула для дифракционного коэффициента (34) при  $\lambda = 0$  согласуется с результатами Каминецкого и Келлера [10]. Если в (4) формально положить  $j = 0$ , то в предельных случаях  $g = 0$  и  $g = \infty$  полученные нами выражения переходят в соответствующие формулы [14, 15] для условий Неймана и Дирихле.

Автор выражает благодарность А. П. Киселеву за помощь в подготовке статьи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции*. Издательство ЛГУ, Л., 1974.
2. V. H. Weston, *The effect of a discontinuity in curvature in high-frequency scattering*. — IRE Trans. AP **10** (1962), 775–780.
3. V. H. Weston, *Effect of a discontinuity of curvature in high-frequency scattering. Part II*. — IEEE Trans. AP **13** (1965), 611–613.
4. А. В. Попов, *Обратное рассеяние от линии разрыва кривизны*. Труды V Всес. Симпоз. Дифр. Распр. Волн. Наука, Л., 1971, 171–175.
5. T. B. A. Senior, *The diffraction matrix for a discontinuity in curvature*. — IEEE Trans. AP **20**, No. 3 (1972), 326–333.

6. D. Bouche, *Courant sur un obstacle cylindrique parfaitement conducteur présentant une discontinuité de courbure*. — Ann. Télécommunic. **47** (1992), 391–399.
7. Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, А. С. Кирпичникова, *Дифракция волн со скальзывания от линии скачка кривизны. (Акустическая трехмерная среда)*. — Зап. научн. сем. ПОМИ **257** (1999), 75–92.
8. G. L. James, *Geometrical theory of diffraction for electromagnetic waves*. IEEE Electromagnetic Series 1, 1986.
9. А. Ф. Филиппов, *Отражение от границы, состоящей из дуг различной кривизны*. — Прикл. Мат. Мех. (ПММ) **34** (1970), 1076–1084.
10. L. Kamietzky, J. B. Keller, *Diffraction coefficients for higher order edges and vertices*. — SIAM J. Appl. Math. **22**, No. 1 (1972), 109–134.
11. Z. M. Rogoff, A. P. Kiselev, *Diffraction at jump of curvature on an impedance boundary*. — Wave Motion **33** No. 2 (2001), 183–208.
12. A. Michaeli, *Diffraction by a discontinuity in curvature including the effect of creeping wave*. — IEEE Trans. AP **38** №6 (1990), 929–931.
13. В. А. Боровиков, Б. Е. Кинбер, *Геометрическая теория дифракции*. Связь, М., 1978.
14. Е. А. Zlobina, A. P. Kiselev, *Boundary-layer approach to high-frequency diffraction by a jump of curvature*. — Wave Motion **96** (2020), 102571.
15. Е. А. Злобина, А. П. Киселев, *Дифракция коротких волн на контуре с геллеровской сингулярностью кривизны*. — Алгебра и Анализ **33** №2 (2021).
16. Н. В. Цепелев, *О некоторых специальных решениях уравнения Гельмгольца*. — Зап. научн. сем. ЛОМИ **51** (1975), 197–202.
17. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними, Том 1*. ГИФМЛ, М., 1959.
18. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики, Том 2*. Наука, М., 1974.
19. В. М. Бабич, А. П. Киселев, *Упругие волны. Высокочастотная теория*. - БХВ, СПб., 2014.
20. Л. М. Бреховских, О. А. Годин, *Акустика слоистых сред*. Наука, М., 1989.
21. А. Эрдейи, *Асимптотические разложения*. ГИФМЛ, М., 1962.
22. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*. Наука, М., 1979.

Е. А. Zlobina. Short-wavelength diffraction by a contours with non-smooth curvature. Boundary layer approach

We consider the short-wavelength diffraction by a contour with non-smooth curvature, whose  $j$ -th derivative ( $j = 1, 2, \dots$ ) has a discontinuity at a point. Asymptotic formulas describing the effect of non-smoothness of curvature on the wavefield are constructed in a framework of rigorous boundary layer method. An expression for cylindrical diffracted wave is



derived. The wavefield in the vicinity of the limit ray at small distances from the contour is described in terms of the parabolic cylinder functions.

Санкт-Петербургский государственный  
университет, Университетская наб. 7/9,  
199034, Санкт-Петербург, Россия

Поступило 30 октября 2020 г.

Санкт-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН,  
набережная реки Фонтанки 27,  
191023, Санкт-Петербург, Россия  
*E-mail*: ezlobina2@yandex.ru