

М. Н. Демченко

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ С ДАННЫМИ НА ГРАНИЦЕ

К юбилею Василия Михайловича Бабича

§1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается задача определения функции $u(x, y, t)$, удовлетворяющей в цилиндре $(x, y, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ (Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^2) волновому уравнению

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0, \quad (1)$$

по данным Коши на некоторой поверхности, являющейся подмножеством $\partial\Omega \times \mathbb{R}$. В отличие от классической задачи Коши с данными, известными при $t = t_0$, рассматриваемая задача не является корректной по Адамару. Однако, решение u определяется единственным образом, по крайней мере, в некотором подмножестве пространственно-временного цилиндра [1–3]. Целью работы является построение алгоритма решения данной задачи Коши. Р. Курантом был предложен один из первых подобных алгоритмов, применимый в случае, когда Ω – полупространство произвольной размерности (см. [4]). В работе [5] для задачи в трехмерном полупространстве получена формула, позволяющая определить решение волнового уравнения по данным Коши, известным на неограниченном подмножестве пространственно-временной границы. Случай произвольной евклидовой области был рассмотрен в работах [6, 7]. Полученный в них алгоритм позволяет восстановить решение u по данным Коши, известным на множестве $S \times I$, где S – некоторая часть границы $\partial\Omega$ ($S \subsetneq \partial\Omega$), I – конечный временной интервал. При этом u определяется в некотором подмножестве цилиндра $\Omega \times \mathbb{R}$, зависящем от S и I . Отметим также, что имеются результаты о восстановлении сингулярностей решения по данным Коши на границе (см. [8] и цитированную там литературу). Для этих целей применяется лучевой метод (см. [9, 10]), канонический оператор

Ключевые слова: волновое уравнение, задача Коши, продолжение волнового поля.

Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00627-а.

Маслова, интегральные операторы Фурье. Задачи определения решения гиперболических уравнений по граничным данным возникают в геофизике [11] и в коэффициентных обратных задачах [12].

Для построения алгоритма определения решения u мы воспользуемся результатами упомянутых выше работ [6, 7], в которых рассматривалась задача Коши с данными на части границы области. Мы адаптируем полученный в них алгоритм к частному случаю, когда данные известны на всей границе (в принятых выше обозначениях это соответствует случаю $S = \partial\Omega$). Будет показано, что в этой ситуации алгоритм обладает большей устойчивостью, чем в случае $S \subsetneq \partial\Omega$. Отметим, что в трехмерном случае данных Коши на $\partial\Omega \times I$ оказывается достаточно для устойчивого восстановления решения в заданный момент времени с помощью формулы Кирхгофа (см., например, [13]). Последняя выводится применением формулы Грина к решению u и фундаментальному решению волнового уравнения. Однако, в двумерной задаче, которая рассматривается в этой работе, этот подход требует данных Коши на неограниченном временном интервале. Это связано с тем, что фундаментальное решение в двумерном случае (в отличие от трехмерного) при фиксированных x, y , отлично от нуля при сколь угодно больших временах.

В этой работе мы будем рассматривать случай, когда решение u удовлетворяет условию Дирихле на границе

$$u|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}} = 0. \quad (2)$$

Таким образом, данные Коши будут состоять из производной решения $\partial_\nu u$ вдоль внешней единичной нормали к границе области.

§2. О задаче Коши с данными на части границы

Здесь мы кратко изложим подход, предложенный в [6, 7], и приведем некоторые формулы из этих работ, необходимые в дальнейшем. В этом параграфе мы не будем требовать условия Дирихле (2).

Алгоритм, полученный в работах [6, 7], основан на специальном выборе функции V в формуле Грина

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}} [u(\partial_t^2 - \Delta)V - V(\partial_t^2 - \Delta)u] dx dy dt = \int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}} [V \partial_\nu u - u \partial_\nu V] d\sigma dt. \quad (3)$$

Введем следующую функцию, зависящую от параметра $h > 0$,

$$v_h(x, y, t) = -\theta(y - |t|)w_h(x, y, t). \quad (4)$$

Здесь θ – функция Хевисайда, а функция $w_h(x, y, t)$ определяется для $y \geq |t|$ равенством

$$w_h(x, y, t) = \frac{1}{4\pi^{3/2}\sqrt{h}} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-\frac{1}{h} \left(x - i\sqrt{y^2 - t^2} \cdot \sin s\right)^2\right) ds \quad (5)$$

(здесь мы приводим формулу только для двумерного случая). Имеет место соотношение [6, 7]

$$\partial_t^2 v_h - \Delta v_h = \frac{e^{-x^2/h}}{\sqrt{\pi h}} \delta(y) \delta(t). \quad (6)$$

Отметим, что первый сомножитель в правой части – это распределение Гаусса на оси, которое стремится к $\delta(x)$ при $h \rightarrow 0$. Формальная подстановка функции v_h в качестве V в формулу Грина (3) дает соотношение

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}} u(\partial_t^2 - \Delta)v_h \, dx dy dt = \int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}} [v_h \partial_\nu u - u \partial_\nu v_h] \, d\sigma dt.$$

Производные функции v_h являются обобщенными функциями. Мы не будем здесь уточнять в каком смысле понимаются интегралы от них в данном равенстве – это обсуждается в упомянутых работах. Ввиду (6) в пределе $h \rightarrow 0$ мы получаем

$$u(0, 0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}} [v_h \partial_\nu u - u \partial_\nu v_h] \, d\sigma dt.$$

Далее можно воспользоваться тем фактом, что функция $v_h(x, y, t)$ и ее производные стремятся к нулю при $h \rightarrow 0$, если точка (x, y) лежит вне конуса $\{y \geq |x|\}$. Это можно вывести, анализируя показатель экспоненты в правой части (5). Учитывая также, что при фиксированных x, y , функция v_h обращается в нуль при достаточно больших t , мы можем заключить, что в правой части полученного соотношения интеграл по $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ можно заменить на интеграл по множеству $S \times I$, где $I \subset \mathbb{R}$ – достаточно большой временной интервал, $S \subset \partial\Omega$ – любое множество, открытое в топологии $\partial\Omega$, содержащее пересечение указанного конуса с $\partial\Omega$. Таким образом, мы получаем равенство

$$u(0, 0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{S \times I} [v_h \partial_\nu u - u \partial_\nu v_h] \, d\sigma dt, \quad (7)$$

которое позволяет решить задачу Коши с данными на части границы.

Для решения задачи Коши можно по-другому выбрать функцию V в формуле Грина (3). Простейшая модификация описанного выше алгоритма состоит в переходе от v_h к функции

$$v_h^\alpha(x, y, t) = v_h(x', y', t), \quad (8)$$

где преобразование

$$(x, y) \mapsto (x', y') = (x \cos \alpha + y \sin \alpha, -x \sin \alpha + y \cos \alpha) \quad (9)$$

отвечает повороту на угол α вокруг начала координат. Это дает аналог формулы (7), в котором множество S должно содержать все точки $(x, y) \in \partial\Omega$, для которых $y' \geq |x'|$. В частности, это означает, что решение u в одной и той же точке может быть найдено по данным Коши на разных множествах. Это свойство характерно для некорректных задач Коши (в том числе, связанных с эллиптическими уравнениями).

Сделаем некоторые замечания об устойчивости алгоритма (7). На множестве интегрирования $S \times I$ функция v_h экспоненциально быстро растет при $h \rightarrow 0$, что можно извлечь из формул (4), (5). Поэтому если данные Коши u , $\partial_\nu u$ известны с некоторой погрешностью, то предел в правой части (7) может существенно отличаться от значения решения или вовсе не существовать. Правую часть следует аппроксимировать значением интеграла при некотором положительном h . При этом полученный интеграл будет близок к “свертке” решения с правой частью (6). Последняя обладает положительной дисперсией (по переменной x), которая стремится к нулю при $h \rightarrow 0$ и определяет точность аппроксимации решения. Таким образом, при уменьшении h увеличивается точность аппроксимации, тогда как устойчивость алгоритма уменьшается (если данные Коши известны с погрешностью) из-за роста функции v_h .

Для решения задачи Коши с данными на всей границе $\partial\Omega$, а не на ее части, мы подставим в формулу Грина некоторую функцию V_h , которая при $h \rightarrow 0$ растет существенно медленнее функции v_h . Это обеспечит более устойчивое определение решения. При этом соответствующая дисперсия (см. формулы (12)) будет сопоставима с дисперсией правой части (6) для v_h , а значит, точность аппроксимации будет той же, что и в формуле (7). При построении функции V_h мы будем использовать функции v_h, w_h .

§3. ФУНКЦИЯ V_h

Определим функцию V_h как среднее функции v_h^α , определенной соотношением (8), по $-\pi \leq \alpha \leq \pi$

$$V_h(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_h^\alpha(x, y, t) d\alpha. \quad (10)$$

Ясно, что функция V_h радиально симметрична по переменным x, y .
Равенство

$$V_h(x, y, t) = 0, \quad x^2 + y^2 < t^2 \quad (11)$$

следует из аналогичного равенства для функций v_h^α , верного при всех α . В силу (6) имеем

$$(\partial_t^2 v_h^\alpha - \Delta v_h^\alpha)(x, y, t) = \frac{e^{-x'^2/h}}{\sqrt{\pi h}} \delta(y') \delta(t).$$

Проинтегрировав это равенство по $-\pi \leq \alpha \leq \pi$, получаем

$$\partial_t^2 V_h - \Delta V_h = \rho_h(x, y) \delta(t), \quad \rho_h(x, y) = \frac{1}{\pi \sqrt{\pi h}} \frac{e^{-(x^2+y^2)/h}}{\sqrt{x^2+y^2}}. \quad (12)$$

Функция ρ_h имеет особенность в нуле. Однако, эта особенность суммируема, и, как показывает непосредственное вычисление, в обобщенном смысле выполнено

$$\rho_h(x, y) \rightarrow \delta(x) \delta(y), \quad h \rightarrow 0. \quad (13)$$

Следовательно, правая часть первого равенства в (12) стремится к $\delta(x) \delta(y) \delta(t)$ при $h \rightarrow 0$. Напомним, что в силу (6) функция v_h также обладает этим свойством, которое было использовано при выводе (7).

Теорема 1. Пусть Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^2 , $\partial\Omega \in C^\infty$, функция $u \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ удовлетворяет волновому уравнению (1) и краевому условию (2). Тогда для любых $(x^*, y^*) \in \Omega$, $t^* \in \mathbb{R}$, выполнено равенство

$$u(x^*, y^*, t^*) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} d\sigma_{x,y} \int_{t^* - \tau(x,y)}^{t^* + \tau(x,y)} V_h^* \partial_\nu u dt, \quad (14)$$

где $V_h^*(x, y, t) = V_h(x - x^*, y - y^*, t - t^*)$, $\tau(x, y)$ – евклидово расстояние между точками (x, y) и (x^*, y^*) .

Помимо доказательства теоремы 1, целью работы является исследование поведения функции V_h при $h \rightarrow 0$. Мы покажем, что в отличие от функции v_h , которая растет экспоненциально быстро, V_h удовлетворяет оценке

$$V_h(x, y, t) = O(h^{-1/2}), \quad h \rightarrow 0, \quad (15)$$

локально равномерной по x, y, t . При выводе этой оценки будет получено представление для V_h , которое, в отличие от (10), не содержит экспоненциально быстро растущих по h выражений.

§4. МОДИФИЦИРОВАННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ w_h

Мы определили функцию V_h с помощью функций v_h, w_h . Последняя была определена равенством (5) при $y \geq |t|$. Ясно, что это равенство имеет смысл также при $|y| \geq |t|$ и, более того, при $|y| < |t|$. Достаточно заметить, что в последнем случае выбор ветви корня в показателе экспоненты в (5) не имеет значения, так как на промежутке интегрирования $-\pi \leq s \leq \pi$ множитель $\sin s$ меняет знак. Поэтому при $|y| < |t|$ мы можем записать

$$w_h(x, y, t) = \frac{1}{4\pi^{3/2}\sqrt{h}} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-\frac{1}{h} \left(x + \sqrt{t^2 - y^2} \cdot \sin s\right)^2\right) ds, \quad (16)$$

считая корень в показателе экспоненты положительным.

Нам понадобится модификация соотношений (5), (16). Предположим, что $y, t \geq 0$. В случае $y > t$ замена $\xi = e^{is} \sqrt{(y+t)/|y-t|}$ в интеграле в правой части (5) приводит к выражению

$$\int \exp\left(-\frac{1}{h} \left(x - \frac{(y-t)\xi}{2} + \frac{y+t}{2\xi}\right)^2\right) \frac{d\xi}{i\xi}. \quad (17)$$

При $y < t$ такая же замена в интеграле в (16) дает

$$\int \exp\left(-\frac{1}{h} \left(x + \frac{i(y-t)\xi}{2} + \frac{i(y+t)}{2\xi}\right)^2\right) \frac{d\xi}{i\xi}.$$

Оба последних интеграла берутся по окружности

$$|\xi| = \sqrt{(y+t)/|y-t|}$$

в направлении против часовой стрелки. Заметим, что последний интеграл можно свести к виду (17), сделав замену $\xi' = -i\xi$, поэтому в обоих

случаях $y > t$ и $y < t$ достаточно иметь дело с выражением (17). Предеформировав теперь контур интегрирования в окружность $|\xi| = 1$, мы получим соотношение

$$w_h(x, y, t) = \frac{1}{4\pi^{3/2}\sqrt{h}} \int_{|\xi|=1} \exp\left(-\frac{1}{h}\left(x - \frac{(y-t)\xi}{2} + \frac{y+t}{2\xi}\right)^2\right) \frac{d\xi}{i\xi},$$

верное для любых $y, t \geq 0$, включая случай $y = t$, на который это равенство распространяется по непрерывности. Сделаем в интеграле в правой части замену $\xi = e^{is}$, $-\pi \leq s \leq \pi$. Имеем

$$x - \frac{(y-t)\xi}{2} + \frac{y+t}{2\xi} = x - \frac{y}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) + \frac{t}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) = x - iy \sin s + t \cos s,$$

поэтому

$$w_h(x, y, t) = \frac{1}{4\pi^{3/2}\sqrt{h}} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-\frac{1}{h}(x - iy \sin s + t \cos s)^2\right) ds. \quad (18)$$

Ограничение $y, t \geq 0$ в полученном представлении для функции w_h можно снять, поскольку обе части равенства четны по каждой из переменных x, y, t .

§5. ОЦЕНКА ФУНКЦИИ V_h

В этом параграфе мы исследуем поведение функции V_h при $h \rightarrow 0$. Нашей целью является оценка (15). Поскольку функция V_h радиально симметрична по x, y , достаточно рассмотреть случай $x = 0, y > 0$. Кроме того, в силу (11), можно считать, что $y > |t|$. Согласно (9) имеем

$$x' = y \sin \alpha, \quad y' = y \cos \alpha.$$

Из (4) вытекает, что $v_h^\alpha(0, y, t) = 0$ при $y' < |t|$, то есть при $y \cos \alpha < |t|$. Отсюда, положив $\alpha_0 = \arccos(|t|/y)$, получаем

$$V_h(0, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} v_h^\alpha(0, y, t) d\alpha = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} w_h(y \sin \alpha, y \cos \alpha, t) d\alpha. \quad (19)$$

Нам удобно расширить в полученном интеграле пределы интегрирования до интервала $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$, поэтому мы положим

$$\tilde{V}_h(y, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} w_h(y \sin \alpha, y \cos \alpha, t) d\alpha.$$

Применив представление (18) для w_h , мы получим

$$\begin{aligned} \tilde{V}_h(y, t) = & -\frac{c}{\sqrt{h}} \int_{-\pi}^{\pi} ds \\ & \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp\left(-\frac{1}{h} (y (\sin \alpha - i \sin s \cos \alpha) + t \cos s)^2\right) d\alpha, \end{aligned} \quad (20)$$

где $c = 1/(8\pi^{5/2})$.

Рассмотрим внутренний интеграл в (20) в случае $s \neq \pm\pi/2$. Сделаем замену переменной $z = \sin \alpha - i \sin s \cos \alpha$. При $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ переменная z пробегает контур Γ , показанный на рис. 1. Имеем

$$\sin \alpha = \frac{z + i \sin s \sqrt{(\cos s)^2 - z^2}}{(\cos s)^2}, \quad \cos \alpha = \frac{-iz \sin s + \sqrt{(\cos s)^2 - z^2}}{(\cos s)^2}.$$

Отметим, что в случае, когда точки ветвления $z = \pm \cos s$ оказываются на контуре Γ (это происходит только при $|\cos s| = 1$), они совпадают с его концами. Подставив в последние формулы $\alpha = 0$, мы убеждаемся,

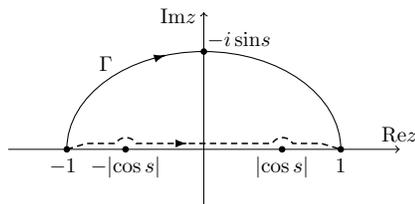


Рис. 1. Контур Γ в случае $\sin s < 0$ (при $\sin s > 0$ требуется очевидная модификация). Пунктиром показан деформированный контур, обходящий точки ветвления $\pm \cos s$.

что (при любом s) в них следует выбрать главную ветвь корня. Имеем

$$dz = (\cos \alpha + i \sin s \sin \alpha) d\alpha = \sqrt{(\cos s)^2 - z^2} d\alpha,$$

Поэтому интеграл по α в (20) равен

$$\int_{\Gamma} \frac{\exp(-(yz + t \cos s)^2/h) dz}{\sqrt{(\cos s)^2 - z^2}}.$$

Далее мы продеформируем контур интегрирования Γ в $[-1 \pm i0, 1 \pm i0]$, где знак выбирается противоположным знаком $\sin s$ (при $\sin s = 0$ выбор знака не важен, так как точки ветвления $\pm \cos s = \pm 1$ оказываются на концах контура). Введем временное обозначение $E = \exp(-(yz + t \cos s)^2/h)$. При $\sin s < 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{-1+i0}^{1+i0} \frac{Edz}{\sqrt{(\cos s)^2 - z^2}} &= \int_{-|\cos s|}^{|\cos s|} \frac{Edz}{\sqrt{(\cos s)^2 - z^2}} \\ &+ \int_{|\cos s|}^1 \frac{Edz}{-i\sqrt{z^2 - (\cos s)^2}} + \int_{-1}^{-|\cos s|} \frac{Edz}{i\sqrt{z^2 - (\cos s)^2}}. \end{aligned}$$

При $\sin s > 0$ для соответствующего интеграла по $z \in [-1 - i0, 1 - i0]$ мы можем написать аналогичное выражение, которое отличается от предыдущего знаками перед вторым и третьим слагаемыми. Таким образом, при интегрировании по $-\pi \leq s \leq \pi$ в (20) эти два слагаемых для какого-либо s компенсируются соответствующими слагаемыми для $-s$. Теперь мы можем записать равенство (20) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{V}_h(y, t) &= -\frac{c}{\sqrt{h}} \int_{-\pi}^{\pi} ds \int_{-|\cos s|}^{|\cos s|} \frac{Edz}{\sqrt{(\cos s)^2 - z^2}} \\ &= -\frac{4c}{\sqrt{h}} \int_0^{\pi/2} ds \int_{-\cos s}^{\cos s} \frac{\exp(-(yz + t \cos s)^2/h) dz}{\sqrt{(\cos s)^2 - z^2}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Представление (21) показывает, что функцию \tilde{V}_h можно оценить как $O(h^{-1/2})$ при $h \rightarrow 0$. Для разности $V_h(0, y, t)$ и $\tilde{V}_h(y, t)$ согласно (19) и

определению функции \tilde{V}_h имеем

$$\tilde{V}_h(y, t) - V_h(0, y, t) = -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\pi/2} w_h(y \sin \alpha, y \cos \alpha, t) d\alpha$$

(мы воспользовались четностью функции w_h по каждой из переменных). Так как на множестве интегрирования выполнено $y \cos \alpha < |t|$, для w_h применимо представление (16), в котором, также как и в (21), экспонента берется от неположительного аргумента. Таким образом, последнее соотношение, а также формула (21) для \tilde{V}_h дают представление для функции V_h , которое не содержит экспоненциально растущих при $h \rightarrow 0$ величин (напомним, что в исходном представлении (10) функция v_h^α экспоненциально растет). Из этого, в частности, следует оценка (15).

§6. ФУНКЦИЯ V_h^ε

Из представления (19) можно извлечь, что функция V_h локально ограничена в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, непрерывна при $(x, y, t) \neq 0$ и является гладкой вне поверхности $\{x^2 + y^2 = t^2\}$. Однако, ее первые производные неограниченно растут возле указанной поверхности, а в точке $(x, y, t) = 0$ функция V_h разрывна. Поскольку в доказательстве теоремы 1 будет применяться формула Грина, мы перейдем к усреднениям

$$V_h^\varepsilon(x, y, t) = (\psi^\varepsilon * V_h)(x, y, t) = \int_{\mathbb{R}} \psi^\varepsilon(t - t_1) V_h(x, y, t_1) dt_1$$

(здесь и далее $*$ означает свертку по переменной t) с ядром

$$\psi^\varepsilon(t) = \frac{e^{-t^2/\varepsilon}}{\sqrt{\pi\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0,$$

которые обладают большей гладкостью. В силу (11) это усреднение корректно определено, и выполнено

$$V_h^\varepsilon(x, y, t) = \int_{-\tau(x, y)}^{\tau(x, y)} \psi^\varepsilon(t - t_1) V_h(x, y, t_1) dt_1,$$

где $\tau(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ совпадает с функцией τ , определенной в формулировке теоремы 1, в предположении $x^* = y^* = 0$. Из этого представления видно, что функция $V_h^\varepsilon(x, y, t)$ непрерывна в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. При

каждом фиксированном (x, y) она является гладкой по t . Производные $\partial_t^m V_h^\varepsilon = (\partial_t^m \psi^\varepsilon) * V_h$, $m \geq 0$, допускающие представление, аналогичное данному выше для V_h^ε , также непрерывны в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Кроме того, для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^2$ выполнено

$$|\partial_t^m V_h^\varepsilon(x, y, t)| \leq C(K, m, \varepsilon, h), \quad (x, y, t) \in K \times \mathbb{R}. \quad (22)$$

Далее мы установим, что $V_h^\varepsilon(\cdot, \cdot, t_0) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ для любого $t_0 \in \mathbb{R}$. Для функции $\eta(x, y)$ класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ определим функцию $\tilde{\eta}(x, y, t)$ равенством

$$\tilde{\eta}(x, y, t) = \psi^\varepsilon(t_0 - t)\eta(x, y).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \langle V_h, (\partial_t^2 - \Delta)\tilde{\eta} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \eta(x, y) \int_{\mathbb{R}} (\partial_t^2 \psi^\varepsilon)(t_0 - t) V_h(x, y, t) dt \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \Delta \eta(x, y) \int_{\mathbb{R}} \psi^\varepsilon(t_0 - t) V_h(x, y, t) dt \\ &= \langle (\partial_t^2 V_h^\varepsilon)(\cdot, \cdot, t_0), \eta \rangle - \langle V_h^\varepsilon(\cdot, \cdot, t_0), \Delta \eta \rangle. \end{aligned}$$

Здесь и далее угловыми скобками обозначается применение обобщенной функции к пробной функции. Отметим, что функция $\tilde{\eta}$, в отличие от η , не является финитной, так как входящий в ее определение множитель $\psi^\varepsilon(t_0 - t)$ отличен от нуля при всех t . Однако, применение V_h к $\tilde{\eta}$ и ее производным имеет смысл, так как пересечение носителей $\text{supp} V_h$ и $\text{supp} \tilde{\eta}$ компактно. Последнее вытекает из финитности функции η и свойства (11). Равенство (12) дает

$$\langle V_h, (\partial_t^2 - \Delta)\tilde{\eta} \rangle = \langle \rho_h, \tilde{\eta}(\cdot, \cdot, 0) \rangle = \psi^\varepsilon(t_0) \langle \rho_h, \eta \rangle.$$

Сопоставив это с предыдущим равенством, мы получим

$$\langle V_h^\varepsilon(\cdot, \cdot, t_0), \Delta \eta \rangle = \langle (\partial_t^2 V_h^\varepsilon)(\cdot, \cdot, t_0), \eta \rangle - \psi^\varepsilon(t_0) \langle \rho_h, \eta \rangle.$$

Таким образом, в обобщенном смысле выполнено соотношение

$$\Delta V_h^\varepsilon(x, y, t_0) = (\partial_t^2 V_h^\varepsilon)(x, y, t_0) - \psi^\varepsilon(t_0) \rho_h(x, y). \quad (23)$$

Первое слагаемое в правой части можно оценить с помощью (22). Второе слагаемое содержит функцию ρ_h , которая, ввиду (12), имеет сингулярность в начале координат. Однако, эта функция локально ограничена в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Поэтому из (23) следует, что для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ выполнено

$$|\Delta V_h^\varepsilon(x, y, t)| \leq C(K, \varepsilon, h), \quad (x, y, t) \in K \times \mathbb{R}. \quad (24)$$

Далее с учетом равенства $\psi^\varepsilon = \psi^{\varepsilon/2} * \psi^{\varepsilon/2}$ мы имеем

$$\partial_t^2 V_h^\varepsilon = (\partial_t^2 \psi^\varepsilon) * V_h = (\partial_t^2 \psi^{\varepsilon/2}) * V_h^{\varepsilon/2}.$$

Это позволяет записать обобщенный оператор Лапласа от правой части (23) в следующем виде

$$\Delta^2 V_h^\varepsilon(x, y, t_0) = ((\partial_t^2 \psi^{\varepsilon/2}) * \Delta V_h^{\varepsilon/2})(x, y, t_0) - \psi^\varepsilon(t_0) \Delta \rho_h(x, y).$$

Правую часть снова можно оценить при $(x, y) \in K \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Для этого мы применим оценку (24), заменив в ней ε на $\varepsilon/2$. В результате мы получим аналогичную оценку для $\Delta^2 V_h^\varepsilon$. Повторяя это рассуждение, можно вывести эту оценку для любой степени оператора Лапласа, примененного к функции V_h^ε . Согласно теории эллиптических уравнений [14, 15], отсюда следует, что $V_h^\varepsilon(\cdot, \cdot, t_0) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.

Помимо гладкости $V_h^\varepsilon(\cdot, \cdot, t_0)$ вне начала координат, мы попутно доказали, что функция $\Delta V_h^\varepsilon(\cdot, \cdot, t_0)$ является локально суммируемой в \mathbb{R}^2 , что является следствием равенства (23), оценки (22) и формулы (12) для ρ_h . Это позволяет обосновать применимость формулы Грина к V_h^ε . Пусть ограниченная область Ω с гладкой границей содержит начало координат, η – произвольная функция из $C^2(\overline{\Omega})$. Имеет место равенство

$$\int_{\Omega} [V_h^\varepsilon \Delta \eta - (\Delta V_h^\varepsilon) \eta] dx dy = \int_{\partial \Omega} [V_h^\varepsilon \partial_\nu \eta - \eta \partial_\nu V_h^\varepsilon] d\sigma. \quad (25)$$

(здесь и в последующем рассуждении под V_h^ε подразумевается $V_h^\varepsilon(\cdot, \cdot, t_0)$). В правой части мы имеем интеграл гладкой функции. Ввиду выше сказанного интеграл в левой части является абсолютно сходящимся. Для обоснования (25) предположим сначала, что $\eta \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Пусть χ_0 – C^∞ -гладкая функция с компактным носителем в Ω , равная единице в окрестности начала координат. Положим $\chi_1 = 1 - \chi_0$ и запишем $\eta = \chi_0 \eta + \chi_1 \eta$. Поскольку $\chi_0 \eta$ – гладкая финитная функция в \mathbb{R}^2 , по определению обобщенного оператора Лапласа имеем

$$\int_{\Omega} V_h^\varepsilon \Delta(\chi_0 \eta) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} V_h^\varepsilon \Delta(\chi_0 \eta) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} (\Delta V_h^\varepsilon) \chi_0 \eta dx dy.$$

На носителе $\text{supp} \chi_1$ функция V_h^ε гладкая, поэтому применима формула интегрирования по частям:

$$\int_{\Omega} V_h^\varepsilon \Delta(\chi_1 \eta) dx dy = \int_{\partial \Omega} [V_h^\varepsilon \partial_\nu \eta - \eta \partial_\nu V_h^\varepsilon] d\sigma + \int_{\Omega} (\Delta V_h^\varepsilon) \chi_1 \eta dx dy$$

(в интеграле по $\partial\Omega$ мы учли, что $\chi_1|_{\partial\Omega} = 1$). Сложив полученные равенства, мы приходим к соотношению (25), которое затем распространяется на C^2 -гладкие функции η по непрерывности.

§7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Без ограничения общности можно считать, что область Ω содержит начало координат, и $x^* = y^* = t^* = 0$.

Применение формулы Грина (25) к функции $\eta = u(\cdot, \cdot, t)$ и интегрирование полученного равенства по $-L < t < L$ (L – пока любое положительное число) дает

$$\int_{-L}^L dt \int_{\Omega} [V_h^\varepsilon \Delta u - u \Delta V_h^\varepsilon] dx dy = \int_{-L}^L dt \int_{\partial\Omega} V_h^\varepsilon \partial_\nu u d\sigma.$$

Мы учли краевое условие (2). Далее, поскольку V_h^ε является гладкой функцией по t при каждом x, y , мы имеем

$$\int_{-L}^L dt \int_{\Omega} [u \partial_t^2 V_h^\varepsilon - V_h^\varepsilon \partial_t^2 u] dx dy = \sum_{\pm} \int_{\Omega} (\pm 1) [u \partial_t V_h^\varepsilon - V_h^\varepsilon \partial_t u] |_{t=\pm L} dx dy.$$

Здесь используется перестановочность интегралов по t и по координатам x, y . Она имеет место в силу того, что, как отмечалось в п. 6, функция V_h^ε и все ее производные по t непрерывны в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Из последних двух равенств вытекает, что

$$\begin{aligned} & \int_{-L}^L dt \int_{\Omega} [u (\partial_t^2 - \Delta) V_h^\varepsilon - V_h^\varepsilon (\partial_t^2 - \Delta) u] dx dy \\ &= \int_{-L}^L dt \int_{\partial\Omega} V_h^\varepsilon \partial_\nu u d\sigma + \sum_{\pm} \int_{\Omega} (\pm 1) [u \partial_t V_h^\varepsilon - V_h^\varepsilon \partial_t u] |_{t=\pm L} dx dy. \end{aligned}$$

В дальнейшем второе слагаемое в правой части будет обозначаться буквой R . Учитывая равенство (23), а также волновое уравнение (1), полученное соотношение принимает вид

$$\int_{-L}^L dt \psi^\varepsilon(t) \int_{\Omega} u(x, y, t) \rho_h(x, y) dx dy = \int_{-L}^L dt \int_{\partial\Omega} V_h^\varepsilon \partial_\nu u d\sigma + R. \quad (26)$$

Теперь устремим ε к нулю в полученном равенстве. Из (11) следует, что $V_h^\varepsilon(x, y, t) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, если $x^2 + y^2 < t^2$. То же верно для $\partial_t V_h^\varepsilon$, поскольку $\partial_t V_h^\varepsilon = \partial_t \psi^\varepsilon * V_h$. Выберем константу L так, чтобы было выполнено $L > \text{diam } \Omega$. Тогда $R \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Далее рассмотрим поведение первого слагаемого в правой части (26). Как отмечалось в начале п. 6, функция V_h непрерывна при $(x, y, t) \neq 0$. Поэтому на множестве интегрирования усреднения V_h^ε равномерно ограничены по ε и поточечно стремятся к V_h при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отсюда следует аналогичное утверждение для подинтегральной функции $V_h^\varepsilon \partial_\nu u$, поэтому предел интеграла при $\varepsilon \rightarrow 0$ равен

$$\int_{-L}^L dt \int_{\partial\Omega} V_h \partial_\nu u \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} d\sigma_{x,y} \int_{-\tau(x,y)}^{\tau(x,y)} V_h \partial_\nu u \, dt.$$

В последнем равенстве мы учли соотношение (11). Функция τ , определенная в формулировке теоремы 1, в нашем предположении $x^* = y^* = 0$ равна $\sqrt{x^2 + y^2}$. Аналогичное рассуждение применимо к левой части (26). Таким образом, предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ в равенстве (26) дает

$$\int_{\Omega} u(x, y, 0) \rho_h(x, y) \, dx dy = \int_{\partial\Omega} d\sigma_{x,y} \int_{-\tau(x,y)}^{\tau(x,y)} V_h \partial_\nu u \, dt.$$

Переход к пределу $h \rightarrow 0$ в полученном равенстве вместе с соотношением (13) приводит к равенству (14).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский, *Некорректные задачи математической физики и анализа*. — М.: Наука (1980).
2. D. Tataru, *Unique Continuation for Solutions to PDE's; Between Hörmander's Theorem and Holmgren's Theorem*. Communications in Partial Differential Equations **20:5-6** (1995), 855–884.
3. V. Isakov, *Inverse Problems for Partial Differential Equations (2nd Edition)*. — Appl. Math. Scie. **127**, Springer (2006).
4. Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики, том II: Уравнения с частными производными*. — М.: Мир (1964).
5. A. S. Blagoveshchensky, F. N. Podymaka, *On a Cauchy problem for the wave equation with data on a time-like hyperplane*. — Proceedings of the International Conference Days on Diffraction (2016), 31–34.

6. M. N. Demchenko, *Reconstruction of solution to the wave equation from Cauchy data on the boundary*. — Proceedings of the International Conference Days on Diffraction (2018), 66–70.
7. М. Н. Демченко, *О задаче Коши для волнового уравнения с данными на границе*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **471** (2018), 99–112.
8. E. T. Quinto, A. Rieder, T. Schuster, *Local inversion of the sonar transform regularized by the approximate inverse*. — Inverse Problems, **27:3** (2011), 035006.
9. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков, *Пространственно-временной лучевой метод: линейные и нелинейные волны*. Ленинград, Изд-во ЛГУ, 1985.
10. В. М. Бабич, А. П. Киселев, *Упругие волны. Высокочастотная теория*. БХВ-Петербург, 2014.
11. S. I. Kabanikhin, D. B. Nurseitov, M. A. Shishlenin, B. B. Sholpanbaev, *Inverse problems for the ground penetrating radar*. — *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **21** (2013), 885–892.
12. M. I. Belishev, *Recent progress in the boundary control method*. — Inverse problems, **23:5** (2007), R1–R67.
13. D. Finch, Sarah K. Patch, Rakesh, *Determining a Function from Its Mean Values Over a Family of Spheres*. — *SIAM J. Math. Anal.* **35:5** (2004), 1213–1240.
14. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*. М.: Наука, 1973.
15. L. C. Evans, *Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics*. **19**, AMS, 1998.

Demchenko M. N. On the Cauchy problem for the wave equation in a two-dimensional domain with data on the boundary.

The subject of the paper is the Cauchy problem for the wave equation in a space-time cylinder $\Omega \times \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, with data on the surface $\partial\Omega \times I$, where I is a finite time interval. The algorithm for solving the Cauchy problem with data on $S \times I$, $S \subset \partial\Omega$, was obtained previously. Here we adapt this algorithm to the special case $S = \partial\Omega$ and show that in this situation, the solution is determined with higher stability in comparison with the case $S \subsetneq \partial\Omega$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН.
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия

Поступило 1 ноября 2020 г.

E-mail: demchenko@pdmi.ras.ru