

Е. А. Городницкий

О СВОЙСТВАХ АФФИННОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПУАНКАРЕ

**С глубоким уважением и благодарностью
Василию Михайловичу Бабичу**

§1. ВВЕДЕНИЕ

Начиная с 80-х годов прошлого века, в вычислительную практику вводились методы расчёта волновых полей в плавно-неоднородных средах, подразумевающие разложение искомого решения по элементарным решениям - локализованным асимптотическим решениям, см. например [1–8]. В работах [1, 4, 6–8] асимптотика волнового поля дана в терминах суммирования (интегрирования) гауссовых пучков. Все предложенные разложения существенно используют свойства элементарных асимптотических решений и не позволяют получить точное представление решения волнового уравнения даже в однородной среде.

В работе [9] введено интегральное представление решения начально-краевой задачи для волнового уравнения с переменной скоростью распространения волн в случае двух пространственных переменных. Задача ставилась в полуплоскости. Интегральная формула интерпретировалась как разложение решения поставленной задачи по асимптотическим локализованным решениям – квазифотонам, введенным и обсуждаемым в работах [2, 3, 5]. В отличие от [1], предложенная в [9] формула основана на методе пространственно-временного вейвлет-анализа. Для случая однородной среды она была формально получена в работах [10–12] и доказана в [13]. В случае однородной среды удобно использовать в качестве элементарных решений хорошо исследованные точные локализованные решения, например, описанные в [14–16]. Для случая неоднородной среды обоснование этой формулы не обсуждалось. Однако по ней были проведены расчеты и была продемонстрирована её эффективность для решения задачи сейсмической

Ключевые слова: волновое уравнение, интегральное представление, аффинная группа Пуанкаре, вейвлет-анализ.

миграции. Формула представляет решение в виде интеграла по параметрам от взвешенных элементарных решений. Вес каждого элементарного решения есть вейвлет-преобразование от граничных данных. Данные задаются как функция времени и одной пространственной переменной. Поэтому центральной проблемой обоснования формулы в неоднородной среде является выяснение скорости убывания вейвлет-преобразования с ростом параметров, от которых оно зависит. Настоящая работа даёт ряд оценок вейвлет-преобразования, которые, как мы надеемся, будут полезны при обосновании сходимости интегрального представления волнового поля из [9]. Мы также полагаем, что с соответствующими изменениями результаты могут быть применены к исследованию сходимости интегрального представления решения задачи Коши, предложенного в работе [17].

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АФФИННОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПУАНКАРЕ

Мы будем иметь дело с функциями от $\vec{\chi} = (c_0 t, x)^\top$ где c_0 – положительная константа, имеющая смысл скорости распространения волны, t – время, $x \in \mathbb{R}$ – пространственная координата. Мы будем считать, что $c_0 \equiv 1$, и поэтому $\vec{\chi} = (t, x)^\top$. Такие двумерные векторы образуют пространство Минковского, на котором вводится индефинитное (псевдориманово, псевдоевклидово) скалярное произведение

$$(\vec{\chi}_1, \vec{\chi}_2)_m = c_0 t_1 c_0 t_2 - x_1 x_2 = c_0^2 t_1 t_2 - x_1 x_2 = t_1 t_2 - x_1 x_2. \quad (1)$$

Нижний индекс в обозначении $(\cdot, \cdot)_m$ отличает это скалярное произведение от евклидова, а соответствующее псевдоевклидово расстояние (интервал) имеет вид:

$$\|\vec{\chi}_1 - \vec{\chi}_2\|_m^2 = c_0^2 (t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = (t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2. \quad (2)$$

Перейдем к определению вейвлет-преобразования. Для этого введём в рассмотрение аффинную группу Пуанкаре G [18], то есть группу преобразований пространства \mathbb{R}^2 (пространства $(1+1)$, то есть одна координата пространственная, одна временная), состоящую из:

$$\text{сдвигов} \quad T_{\vec{\chi}_s} \vec{\chi} = \vec{\chi} + \vec{\chi}_s, \quad (3a)$$

$$\text{преобразований Лоренца} \quad \Lambda_\phi \vec{\chi} = \mathbf{\Lambda}_\phi \vec{\chi}, \quad \mathbf{\Lambda}_\phi = \begin{pmatrix} \text{ch } \phi & \text{sh } \phi \\ \text{sh } \phi & \text{ch } \phi \end{pmatrix}, \quad (3b)$$

$$\text{масштабирования} \quad D_a \vec{\chi} = a \vec{\chi}, \quad (3c)$$

где $\vec{\chi}_s \in \mathbb{R}^2$ – смещение, $\phi \in \mathbb{R}$ – быстрота (или угол лоренцева поворота), $0 < a < \infty$ – масштаб. Элементами группы $g \in G$ являются преобразования

$$g = g(a, \phi, \vec{\chi}_s) = T_{\vec{\chi}_s} D_a \Lambda_\phi. \quad (4)$$

В дальнейшем будем использовать обозначение для параметров преобразований $\nu \equiv \{a, \phi, \vec{\chi}_s\}$. Мы будем применять следующие свойства преобразований Лоренца, см., например, [20]:

$$\det \Lambda_\phi = 1, \quad \|\Lambda_\phi \vec{\chi}\|_m = \|\vec{\chi}\|_m, \quad (\Lambda_\phi \vec{\chi}_1, \vec{\chi}_2)_m = (\vec{\chi}_1, \Lambda_{-\phi} \vec{\chi}_2)_m. \quad (5)$$

Выберем функцию $\zeta \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2)$ и назовем её *материнским вейвлетом*. Построим семейство функций, зависящих от параметров $\nu = \{a, \phi, \vec{\chi}_s\}$, применив к аргументу $\zeta(\vec{\chi})$ преобразование (4):

$$\zeta_\nu(\vec{\chi}) = \frac{1}{a} \zeta \left(\Lambda_{-\phi} \frac{\vec{\chi} - \vec{\chi}_s}{a} \right). \quad (6)$$

и назовем это семейство *семейством вейвлетов*. Определение семейства вейвлетов задаёт преобразование $\mathcal{U}_{g(\nu)}$, действующее по правилу $\mathcal{U}_{g(\nu)} \zeta \mapsto \zeta_\nu$. Это преобразование унитарно,

$$\|\zeta_\nu\|^2 = \|\zeta\|^2, \quad (7)$$

в чём легко убедиться заменой переменной интегрирования при вычислении нормы. Обозначим преобразование Фурье следующим образом:

$$\hat{\zeta}(\vec{\sigma}) = \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \vec{\chi} \zeta(\vec{\chi}) e^{i(\vec{\chi}, \vec{\sigma})_m} = \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \vec{\chi} \zeta(\vec{\chi}) e^{ikt - ik_x x}, \quad \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} k \\ k_x \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Заменой переменных нетрудно получить, что

$$\hat{\zeta}_\nu(\vec{\sigma}) = a \hat{\zeta}(a \Lambda_{-\phi} \vec{\sigma}) e^{i(\vec{\sigma}, \vec{\chi}_s)_m}. \quad (9)$$

Всё пространство $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2)$ является прямой суммой четырёх инвариантных относительно $\mathcal{U}_{g(\nu)}$ подпространств:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2) &= \bigoplus_{j=1}^4 \mathcal{D}_j, \\ f_j &\in \mathcal{D}_j : \text{supp } \hat{f}_j \subseteq D_j, \\ D_1 &= \left\{ \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} k \\ k_x \end{pmatrix} : k > 0, |k| > |k_x| \right\}, \\ D_2 &= \left\{ \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} k \\ k_x \end{pmatrix} : k < 0, |k| > |k_x| \right\}, \\ D_3 &= \left\{ \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} k \\ k_x \end{pmatrix} : k_x > 0, |k| < |k_x| \right\}, \\ D_4 &= \left\{ \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} k \\ k_x \end{pmatrix} : k_x < 0, |k| < |k_x| \right\}, \end{aligned}$$

то есть преобразования Фурье элементов различных подпространств имеют непересекающиеся носители.

Разбивать всё пространство на прямую сумму четырех подпространств приходится потому, что преобразования Лоренца сохраняют интервал (2), то есть в частотной области величину $\|\sigma\|_m^2 = k^2 - k_x^2$. Интервал при переходе из области D_1 или D_2 в D_3 или D_4 меняет знак, а значит, масштабированием и преобразованиями Лоренца из области D_1 не перейти в D_3 или D_4 .

Покажем, что пространство \mathcal{D}_1 является инвариантным относительно \mathcal{U}_g . Действительно, всякий вектор $\vec{\sigma} \in D_1$ можно единственным образом представить в виде:

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} k \\ k_x \end{pmatrix} = \rho \mathbf{\Lambda}_{-\phi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \rho = \|\vec{\sigma}\|_m, \quad \text{th } \phi = -\frac{k_x}{k},$$

и только вектор из D_1 можно записать в такой форме. Возьмём произвольный $\vec{\sigma}_0 \in D_1$:

$$\vec{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} k_0 \\ k_{x0} \end{pmatrix} = \rho_0 \mathbf{\Lambda}_{-\phi_0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_0 = \|\vec{\sigma}_0\|_m, \quad \text{th } \phi_0 = -\frac{k_{x0}}{k_0}.$$

Преобразования Лоренца и масштабирования отображают $\vec{\sigma}_0$ на $\vec{\sigma}$:

$$\vec{\sigma} = a \mathbf{\Lambda}_{-\phi'} \vec{\sigma}_0, \quad a = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \phi' = \phi - \phi_0.$$

Вейвлет-преобразование определяется отдельно для каждого \mathcal{D}_j . Мы дадим определение и проведём детальные построения для подпространства \mathcal{D}_1 . Построения для $j = 2, 3, 4$ проводятся аналогично.

Определим *аффинное вейвлет-преобразование Пуанкаре* (см. [19]), которое далее будем называть вейвлет-преобразованием, так как другие вейвлет-преобразования (с другой группой) в данной работе не рассматриваются.

Определение 1. Пусть $f \in \mathcal{D}_1$ и $\zeta \in \mathcal{D}_1$ и в соответствии с (6) определено семейство вейвлетов ζ_ν . Тогда **аффинным вейвлет-преобразованием Пуанкаре** функции f называется функция $(\mathcal{W}_\zeta f)(\nu)$, заданная на аффинной группе Пуанкаре G и определяемая равенством:

$$(\mathcal{W}_\zeta f)(\nu) = \langle f, \mathcal{U}_g(\nu)\zeta \rangle = \langle f, \zeta_\nu \rangle. \quad (10)$$

Определяющее равенство (10) подробнее записывается в следующем виде:

$$(\mathcal{W}_\zeta f)(a, \phi, \vec{\chi}_s) = \int d^2 \vec{\chi} f(\vec{\chi}) \frac{1}{a} \overline{\zeta \left(\Lambda_{-\phi} \frac{\vec{\chi} - \vec{\chi}_s}{a} \right)}, \quad (11)$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение.

Легко видеть, что вейвлет-преобразование есть свёртка анализируемой функции $f(\vec{\chi})$ с $\frac{1}{a} \zeta \left(-\Lambda_{-\phi} \frac{\vec{\chi}}{a} \right)$. Используя свойства свёртки и равенство (9), получаем выражение для вейвлет-преобразования через Фурье-образы функции и вейвлета из семейства (6):

$$(\mathcal{W}_\zeta f)(\nu) = \frac{a}{(2\pi)^2} \int_{\mathcal{D}_j} d^2 \vec{\sigma} \hat{f}(\vec{\sigma}) \overline{\hat{\zeta}(a\Lambda_{-\phi}\vec{\sigma})} e^{-i(\vec{\sigma}, \vec{\chi}_s)_m}. \quad (12)$$

§3. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Интересную иллюстрацию свойств позволяет получить рассмотрение асимптотики вейвлет-преобразования. Рассмотрим вейвлет-преобразование функции вида $f(\vec{\chi}) = f_0(\vec{\chi}) \exp(ipS(\vec{\chi}))$, где $f_0(\vec{\chi})$, $S(\vec{\chi})$ бесконечно дифференцируемые вещественнозначные функции, причем $f_0(\vec{\chi})$ финитна. Пусть материнский вейвлет выбран следующим образом: $\zeta(\vec{\chi}) = \exp(-ipt - \frac{t^2}{2} - \frac{x^2}{2})$. Выразим его в терминах переменной $\vec{\chi} = (t, x)^\top$:

$$\zeta(\vec{\chi}) = \exp[-ip(\vec{\sigma}_0, \vec{\chi})_m] \exp\left[-\frac{1}{2}(\vec{\chi}, \vec{\chi})\right],$$

где $\vec{\sigma}_0 = (1, 0)^\top$. Построим семейство вейвлетов в явном виде. Для этого мы сначала рассмотрим, как меняется псевдоскалярное произведение $(\vec{\sigma}_0, \vec{\chi})_m$ после действия элемента группы g , см. (4), на $\vec{\chi}$:

$$(\vec{\sigma}_0, g\vec{\chi})_m = \left(\vec{\sigma}_0, \frac{1}{a} \mathbf{\Lambda}_{-\phi}(\vec{\chi} - \vec{\chi}_s) \right)_m = \frac{1}{a} (\mathbf{\Lambda}_{-\phi} \vec{\sigma}_0, \vec{\chi} - \vec{\chi}_s)_m,$$

в последнем равенстве мы воспользовались свойством (5) преобразований Лоренца. Выражение для квадратичной формы преобразуется к виду

$$(g\vec{\chi}, g\vec{\chi}) = \left(\frac{1}{a} \mathbf{\Lambda}_{-\phi}(\vec{\chi} - \vec{\chi}_s), \frac{1}{a} \mathbf{\Lambda}_{-\phi}(\vec{\chi} - \vec{\chi}_s) \right) \\ \frac{1}{a^2} (\mathbf{\Lambda}_{-\phi}^2(\vec{\chi} - \vec{\chi}_s), (\vec{\chi} - \vec{\chi}_s)) = \frac{1}{a^2} (\mathbf{A}(\vec{\chi} - \vec{\chi}_s), (\vec{\chi} - \vec{\chi}_s)),$$

где введено обозначение

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Lambda}_{-\phi}^2 = \begin{pmatrix} \text{ch}^2 \phi + \text{sh}^2 \phi & -2 \text{ch} \phi \text{sh} \phi \\ -2 \text{ch} \phi \text{sh} \phi & \text{ch}^2 \phi + \text{sh}^2 \phi \end{pmatrix}.$$

Тогда вейвлет-преобразование определяется интегралом:

$$(\mathbf{W}_\zeta f)(\nu) = \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \vec{\chi} f_0(\vec{\chi}) \exp \left[ip \left(S(\vec{\chi}) - \frac{1}{a} (\mathbf{\Lambda}_{-\phi} \vec{\sigma}_0, \vec{\chi} - \vec{\chi}_s)_m \right) \right] \\ \times \exp \left[-\frac{1}{2a^2} (\mathbf{A}(\vec{\chi} - \vec{\chi}_s), \vec{\chi} - \vec{\chi}_s) \right]. \quad (13)$$

Пусть параметр $p \gg 1$, тогда при вычислении вейвлет-преобразования можно применить метод стационарной фазы [21]. Согласно этому методу справедлива асимптотическая формула:

$$I = \int d\vec{\chi} v_0(\vec{\chi}) e^{i\lambda \Phi(\vec{\chi})} = \frac{2\pi e^{\frac{i\pi}{4} \text{sgn} \Phi''(\vec{\chi}_0)}}{\lambda \sqrt{|\det \Phi''(\vec{\chi}_0)|}} e^{i\lambda \Phi(\vec{\chi}_0)} \left(v_0(\vec{\chi}_0) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right), \quad (14)$$

где $\Phi(\vec{\chi})$ вещественнозначная функция, называемая фазой. В (14) используется обозначение Φ'' для матрицы вторых производных функции Φ и $\text{sgn} \Phi''$ для разности количества положительных и отрицательных собственных значений матрицы Φ'' . На гладкость функций $v_0(\vec{\chi})$ и $\Phi(\vec{\chi})$ и их поведение на бесконечности накладываются некоторые ограничения, которые выполнены для бесконечно дифференцируемых $v_0(\vec{\chi})$ и $\Phi(\vec{\chi})$ и финитной $v_0(\vec{\chi})$. Для применения формулы (14)

требуется найти точку стационарной фазы, то есть найти корни $\chi = \chi_0$ уравнения

$$\nabla\Phi(\vec{\chi}) = 0. \quad (15)$$

Формула (14) справедлива в предположении, что в области интегрирования, задаваемой носителем $v_0(\vec{\chi})$, имеется всего одна точка стационарной фазы.

Применим метод стационарной фазы к интегралу (13). Выражение для фазы имеет вид:

$$\Phi(\vec{\chi}) = S(\vec{\chi}) - a^{-1}(\mathbf{A}_\phi \vec{\sigma}_0, \vec{\chi} - \vec{\chi}_s)_m = 0,$$

что позволяет записать уравнение (15) в виде

$$a \vec{\nabla} S(\vec{\chi}_0) = \mathbf{A}_\phi \vec{\sigma}_0. \quad (16)$$

Вычисляя интеграл по методу стационарной фазы, получаем:

$$\begin{aligned} (\mathbf{W}_\zeta f)(\nu) &\sim \frac{2\pi e^{\frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} \mathbf{S}''(\vec{\chi}_0)(\vec{\chi}_0)}}{p \sqrt{|\det \mathbf{S}''(\vec{\chi}_0)|}} f_0(\vec{\chi}_0) \\ &\times \exp \left[ip \left(S(\vec{\chi}_0) - \frac{1}{a} (\mathbf{A}_\phi \vec{\sigma}_0, \vec{\chi}_0 - \vec{\chi}_s)_m \right) \right] \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{2a^2} (\mathbf{A}(\vec{\chi}_0 - \vec{\chi}_s), \vec{\chi}_0 - \vec{\chi}_s) \right]. \quad (17) \end{aligned}$$

Анализ выражений показывает, что:

- (1) Если уравнение на стационарную точку (16) не имеет решений, то вейвлет-преобразование имеет сверхстепенной порядок малости: $|(\mathbf{W}_\zeta f)(\nu)| \sim o\left(\frac{1}{p^n}\right)$, $\forall n \geq 1$. Это следует из результатов [21].
- (2) В силу последнего множителя (17) вейвлет-преобразование как функция сдвига $\vec{\chi}_s$ локализовано вблизи стационарной точки $\vec{\chi}_0$.
- (3) Из уравнения (16) следует, что $|\vec{\nabla} S(\vec{\chi}_0)| = \frac{1}{a}$. Это равенство может быть выполнено при малых a только если градиент S велик. Поэтому при малых масштабах a вейвлет-преобразование выделяет резкие перепады функции $S(\vec{\chi})$.
- (4) Из уравнения (16) следует, что $\vec{\nabla} S(\vec{\chi}_0) \parallel \mathbf{A}_\phi \vec{\sigma}_0$, то есть вейвлет-преобразование будет иметь по быстрой максимуме в тех точках, при которых вектор $\mathbf{A}_\phi \vec{\sigma}_0$ перпендикулярен линиям уровня функции $S(\vec{\chi})$.

Рассмотрим физический пример. Пусть на глубине $z = z_0$ в точке $x = 0$ в однородной среде с единичной скоростью распространения находится точечный источник, см. рис. 1. Он испускает импульс, форма

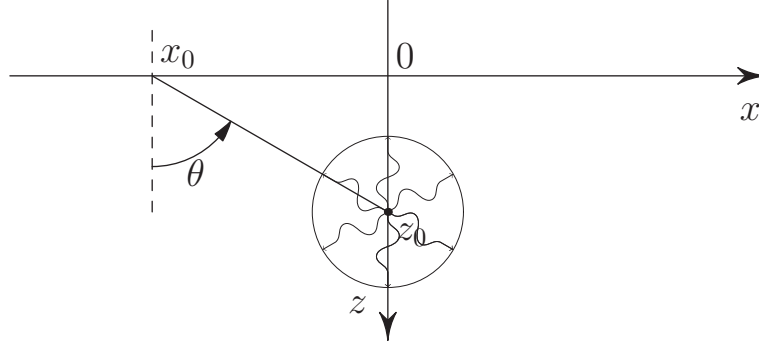


Рис. 1. К вычислению асимптотики вейвлет-преобразования.

которого при распространении описывается выражением $f_0(t, R) \exp(ipS(t - R))$, где $R^2 = (z - z_0)^2 + x^2$ - расстояние до источника. На границе $z = 0$ результатом измерения будет функция $f(t, x) = f_0(t, (z_0^2 + x^2)^{1/2}) \exp(ipS(t - (z_0^2 + x^2)^{1/2}))$. Уравнение на стационарную точку (17) тогда примет вид:

$$a \frac{\partial S}{\partial t} \Big|_{t=t_0, x=x_0} = aS'(t_0 - (z_0^2 + x_0^2)^{1/2}) \cdot 1 = \text{ch } \phi,$$

$$a \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{t=t_0, x=x_0} = -aS'(t_0 - (z_0^2 + x_0^2)^{1/2}) \frac{x_0}{\sqrt{z_0^2 + x_0^2}} = \text{sh } \phi.$$

При $S'(t) = 0$ уравнения решений не имеют, поэтому, разделив второе уравнение на первое, получаем выражение:

$$\frac{x_0}{\sqrt{z_0^2 + x_0^2}} = -\text{th } \phi, \tag{18}$$

таким образом, максимум модуля вейвлет-преобразование в точке приёма $(x_0, 0)$ достигается тогда, когда быстрота ϕ связана с направлением на источник из точки приёма θ соотношением

$$\sin \theta = \text{th } \phi. \tag{19}$$

Интересно отметить, что соотношение (19) совпадает с соотношением для угла выхода квазифотона в [9].

§4. ОЦЕНКИ ДЛЯ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Лемма 1. (О равномерной ограниченности вейвлет-преобразования). *Если функция $f \in \mathcal{D}_1$ и заданный материнский вейвлет $\zeta \in \mathcal{D}_1$, то вейвлет-преобразование функции f ограничено равномерно по параметрам $\nu \equiv \{a, \phi, \vec{\chi}_s\}$, $0 < a < \infty$, $\phi \in \mathbb{R}$:*

$$|(\mathcal{W}_\zeta f)(\nu)| \leq \|f\| \|\zeta\|. \quad (20)$$

Доказательство. Лемма является прямым следствием определения вейвлет-преобразования (10), свойства (7) всех вейвлетов семейства (6), и неравенства Коши-Буняковского:

$$|(\mathcal{W}_\zeta f)(\nu)| = \left| \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \vec{\chi} f(\vec{\chi}) \overline{\zeta_\nu(\vec{\chi})} \right| = |(f, \zeta_\nu)| \leq \|f\| \|\zeta_\nu\| = \|f\| \|\zeta\| < \infty. \quad \square$$

Лемма 2. (О непрерывности и убывании вейвлет-преобразования). *Если функция $f \in \mathcal{D}_1$ и материнский вейвлет $\zeta \in \mathcal{D}_1$, то вейвлет-преобразование функции f при фиксированных a и ϕ является непрерывной функцией смещения $\vec{\chi}_s$, при этом убывающей на бесконечности:*

$$|(\mathcal{W}_\zeta f)(a, \phi, \vec{\chi}_s)| \xrightarrow{|\vec{\chi}_s| \rightarrow \infty} 0.$$

Доказательство. Для обоснования достаточно заметить, что выражение (12) можно интерпретировать как Фурье-преобразование (8) интегрируемой функции $\frac{a}{(2\pi)^2} \hat{f}(\vec{\sigma}) \overline{\zeta(a\Lambda_{-\phi}\vec{\sigma})}$, записанное как функция переменной $-\vec{\chi}_s$. \square

Лемма 3. *Если функция $f \in \mathcal{D}_1$ ограниченная, и материнский вейвлет $\zeta \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$, то справедлива оценка*

$$|(\mathcal{W}_\zeta f)(\nu)| \leq a \max_{\vec{\chi}} (|f(\vec{\chi})|) \|\zeta\|_1. \quad (21)$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} |(\mathcal{W}_\zeta f)(\nu)| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{\chi} |f(\vec{\chi})| \frac{1}{a} \left| \zeta \left(\Lambda_{-\phi} \frac{\vec{\chi} - \vec{\chi}_s}{a} \right) \right| \\ &\leq a \max_{\vec{\chi}} (|f(\vec{\chi})|) \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{\chi}' |\zeta(\vec{\chi}')| = a \max_{\vec{\chi}} (|f(\vec{\chi})|) \|\zeta\|_1. \quad \square \end{aligned}$$

Если условия, наложенные на функцию f и материнский вейвлет ζ поменять местами, то оценка вейвлет-преобразования дается следующей леммой.

Лемма 4. Если функция $f \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$, и материнский вейвлет $\zeta \in \mathcal{D}_1$ ограниченный, то справедлива оценка

$$|(\mathcal{W}_\zeta f)(\nu)| \leq \frac{1}{a} \max_{\vec{\chi}} (|\zeta(\vec{\chi})|) \|f\|_1. \quad (22)$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} |(\mathcal{W}_\zeta f)(\nu)| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{\chi} |f(\vec{\chi})| \frac{1}{a} \left| \zeta \left(\Lambda_{-\phi} \frac{\vec{\chi} - \vec{\chi}_s}{a} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{a} \max_{\vec{\chi}} (|\zeta(\vec{\chi})|) \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{\chi} |f(\vec{\chi})| = \frac{1}{a} \max_{\vec{\chi}} (|\zeta(\vec{\chi})|) \|f\|_1. \quad \square \end{aligned}$$

Более содержательную оценку можно получить, наложив дополнительные ограничения на функцию и вейвлет.

Лемма 5. Пусть $f, \zeta \in \mathcal{D}_1$. Пусть функция f обладает интегрируемыми с квадратом производными до порядка k включительно $f \in H^k(\mathbb{R}^2)$, а Фурье-образ материнского вейвлета ζ является финитной функцией с отделённым от прямых $k_x = \pm k$ носителем. Тогда при достаточно большой быстрой ϕ справедлива оценка

$$|(\mathcal{W}_\zeta f)(\nu)| \leq \frac{\|\zeta\| \|f\|_{H^k}}{(1 + a^{-2} e^{2|\phi|\gamma})^{\frac{k}{2}}}, \quad (23)$$

где γ положительная постоянная, зависящая только от ζ .

Доказательство. Вейвлет-преобразование записывается через Фурье-образы функций $f(\vec{\chi})$ и $\zeta(\vec{\chi})$ следующим образом:

$$(\mathcal{W}_\zeta f)(\nu) = \frac{a}{(2\pi)^2} \int_{D_1} d^2\vec{\sigma} \hat{f}(\vec{\sigma}) \overline{\hat{\zeta}(a\mathbf{\Lambda}_{-\phi}\vec{\sigma})} e^{-i(\vec{\sigma}, \vec{\chi})_m}$$

$$\frac{a}{(2\pi)^2} \int_{B(a, \phi)} d^2\vec{\sigma} \hat{f}(\vec{\sigma}) \overline{\hat{\zeta}(a\mathbf{\Lambda}_{-\phi}\vec{\sigma})} e^{-i(\vec{\sigma}, \vec{\chi})_m},$$

где $B(a, \phi)$ носитель Фурье-образа вейвлетов семейства $\zeta_\nu(\chi)$, который зависит от параметров a и ϕ и выражается через носитель материнского вейвлета, как это следует из формулы (9). Носитель Фурье-образа материнского вейвлета по предположению ограничен и обозначен $B(1, 0) = \text{supp } \hat{\zeta}(\vec{\sigma})$. Без ограничения общности будем считать, что $B(1, 0)$ ограничен прямыми $k_x = \pm k \text{ th } \alpha$ и гиперболами $k^2 - k_x^2 = k_0^2$ и $k^2 - k_x^2 = k_1^2$, $0 < k' < k_0 < k_1 < \infty$. Введём в D_1 новые координаты ρ и \varkappa с помощью соотношений

$$k = \rho \text{ ch } \varkappa, \quad k_x = \rho \text{ sh } \varkappa.$$

В этих координатах $B(1, 0)$ описывается особенно просто: $\rho \in [k_0, k_1]$, $\varkappa \in [-\alpha, \alpha]$.

Выясним теперь, как меняется носитель $\hat{\zeta}$ при масштабировании и преобразованиях Лоренца. Для этого заметим, что согласно (9)

$$\text{supp } \hat{\zeta}_\nu(\vec{\sigma}) = \text{supp } \hat{\zeta}(a\mathbf{\Lambda}_\phi\vec{\sigma})$$

и что

$$\begin{pmatrix} k' \\ k'_x \end{pmatrix} \equiv a\mathbf{\Lambda}_\phi\vec{\sigma} = a \begin{pmatrix} k \text{ ch } \phi + k_x \text{ sh } \phi \\ k \text{ sh } \phi + k_x \text{ ch } \phi \end{pmatrix} = a\rho \begin{pmatrix} \text{ch}(\phi + \varkappa) \\ \text{sh}(\phi + \varkappa) \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Вводя обозначения $k' = \rho' \text{ ch } \varkappa'$, $k'_x = \rho' \text{ sh } \varkappa'$, получим $\rho' = a\rho$, $\varkappa' = \phi + \varkappa$. Отсюда следует, что $B(a, \phi) = \{\rho, \varkappa : \rho \in [k_0/a, k_1/a], \varkappa \in$

$[-\alpha - \phi, \alpha - \phi]$. Теперь мы можем оценить вейвлет-преобразование:

$$\begin{aligned} |(\mathcal{W}_\zeta f)(\nu)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\int_{B(a,\phi)} d^2\vec{\sigma} |\hat{f}(\vec{\sigma})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\zeta\| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^2} \|\zeta\| \left(\int_{B(a,\phi)} d^2\vec{\sigma} \frac{(1+|\vec{\sigma}|^2)^k |\hat{f}(\vec{\sigma})|^2}{(1+|\vec{\sigma}|^2)^k} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^2} \|\zeta\| \left(\frac{\int_{B(a,\phi)} d^2\vec{\sigma} (1+|\vec{\sigma}|^2)^k |\hat{f}(\vec{\sigma})|^2}{\min_{\sigma \in B(a,\phi)} (1+|\vec{\sigma}|^2)^k} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\|\zeta\| \|f\|_{H^k}}{\min_{\sigma \in B(a,\phi)} (1+|\vec{\sigma}|^2)^k}. \end{aligned}$$

В первом неравенстве мы воспользовались неравенством Коши–Буняковского, а при переходе ко второй строке использовали факт принадлежности $f \in H^k(\mathbb{R}^2)$. Оценим $|\vec{\sigma}|$ для достаточно больших быстрот $|\phi| > \alpha$:

$$\begin{aligned} |\vec{\sigma}|^2 &= k^2 + k_x^2 = \rho^2 (\text{ch}^2 \varkappa + \text{sh}^2 \varkappa) \\ &\geq a^{-2} k_0^2 (\text{ch}^2(|\phi| - \alpha) + \text{sh}^2(|\phi| - \alpha)) \geq 0.5 a^{-2} k_0^2 e^{2|\phi|} e^{-2\alpha}. \end{aligned}$$

Поэтому оценка приобретает вид:

$$|(\mathcal{W}_\zeta f)(\nu)| \leq \frac{\|\zeta\| \|f\|_{H^k}}{(1 + 0.5 a^{-2} k_0^2 e^{2|\phi|} e^{-2\alpha})^{\frac{k}{2}}}.$$

Вводя $\gamma = 0.5 e^{-2\alpha}$, получаем (23). \square

Оценку убывания вейвлет-преобразования в зависимости от смещения даёт следующая лемма.

Лемма 6. Пусть функция f финитна и ограничена, а материнский вейвлет ζ убывает в соответствии с оценкой:

$$|\zeta(\vec{\chi})| \leq \frac{A}{(1 + |\vec{\chi}|^2)^2} \quad (25)$$

Тогда для вейвлет-преобразования при достаточно больших смещениях $\vec{\chi}_s$ справедлива оценка:

$$|(\mathcal{W}_\zeta f)(\nu)| \leq 4\pi FAR \frac{a^3}{|\vec{\chi}_s|^3}, \quad (26)$$

где $F = \max |f|$, R – радиус круга с центром в нуле, полностью включающего носитель f . Оценка справедлива при $|\vec{\chi}_s| \geq 2R$.

Доказательство. Учитывая ограниченность $f(\vec{\chi})$, получим

$$\begin{aligned} |(\mathcal{W}_\zeta f)(\nu)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \vec{\chi} f(\vec{\chi}) \frac{1}{a} \zeta \left(\Lambda_{-\phi} \frac{\vec{\chi} - \vec{\chi}_s}{a} \right) \right| \\ &\leq \frac{A_1}{a} \int_{|\vec{\chi}| \leq R} d^2 \vec{\chi} \left| \zeta \left(\Lambda_{-\phi} \frac{\vec{\chi} - \vec{\chi}_s}{a} \right) \right|. \end{aligned}$$

Введем новую переменную интегрирования $\vec{\eta} = \Lambda_{-\phi} \frac{\vec{\xi}}{a}$, $\vec{\xi} = \vec{\chi} - \vec{\chi}_s$. Оценим область интегрирования в переменной $\vec{\eta}$, учитывая условия леммы. Заметим, что $\vec{\xi}$ лежит в кольце $|\vec{\chi}_s| - R < |\vec{\xi}| < |\vec{\chi}_s| + R$. Чтобы оценить область интегрирования по переменной $\Lambda_{-\phi} \vec{\xi}$ заметим, что

$$\begin{aligned} |\Lambda_{-\phi} \vec{\xi}|^2 &= (\xi_1 \operatorname{ch} \phi - \xi_2 \operatorname{sh} \phi)^2 + (-\xi_1 \operatorname{sh} \phi + \xi_2 \operatorname{ch} \phi)^2 \\ &\leq (\operatorname{ch}^2 \phi + \operatorname{sh}^2 \phi) |\vec{\xi}|^2 + 2(\operatorname{ch}^2 \phi \xi_1^2 + \operatorname{sh}^2 \phi \xi_2^2) \leq 4 \operatorname{ch}^2 \phi |\vec{\xi}|^2. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\rho_1 \equiv 2 \frac{\operatorname{ch} \phi}{a} (|\vec{\chi}_s| - R) < |\Lambda_{-\phi} \frac{\vec{\xi}}{a}| < 2 \frac{\operatorname{ch} \phi}{a} (|\vec{\chi}_s| + R) \equiv \rho_2. \quad (27)$$

и обозначим эту область \mathcal{B} . Принимая во внимание условие (25), найдем

$$|(\mathcal{W}_\zeta f)(\nu)| \leq aF \int_{\mathcal{B}} d^2 \vec{\eta} |\zeta(\vec{\eta})| \leq aAF \int_{\mathcal{B}} \frac{d^2 \vec{\eta}}{(1 + |\vec{\eta}|^2)^2}. \quad (28)$$

Перейдем в полярную систему координат, вводя $\rho = |\vec{\eta}|$, сразу проинтегрируем по полярному углу, а также примем во внимание (27), в

итоге

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{W}_\zeta f)(\nu)| &\leq 2\pi aAF \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho d\rho}{(1+\rho^2)^2} \\
&= \pi aAF \frac{1}{1+\rho^2} \Big|_{\rho_1}^{\rho_2} = -\pi aAF \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{(1+\rho_1^2)(1+\rho_2^2)} \\
&= \pi aAFR \frac{16 \operatorname{ch}^2 \phi |\vec{\chi}_s|}{a^2(1+4\frac{\operatorname{ch}^2 \phi}{a^2}(|\vec{\chi}_s| - R)^2)(1+4\frac{\operatorname{ch}^2 \phi}{a^2}(|\vec{\chi}_s| + R)^2)} \\
&\leq \pi a^3 AFR \frac{|\vec{\chi}_s|}{\operatorname{ch}^2 \phi (|\vec{\chi}_s|^2 - R^2)^2} \leq 4\pi AFR \frac{a^3}{\operatorname{ch}^2 \phi |\vec{\chi}_s|^3}.
\end{aligned}$$

В последней выкладке мы воспользовались тем, что $|\vec{\chi}_s| \geq 2R$ по условию.

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. М. Попов, *Новый метод расчета волновых полей в высокочастотном приближении. Мат. вопросы теории распространения волн. 11.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **104** (1981), 195–216.
2. В. М. Бабич, В. В. Улин, *Комплексный пространственно-временной лучевой метод и “квазифотоны”. Матем. вопросы теории распространения волн. 12.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **117** (1981), 5–12.
3. А. П. Качалов, *Система координат при описании “квазифотона,” Матем. вопросы теории распространения волн. 14.* — Зап. научн. сем. ЛОМИ **140** (1984), 73–76.
4. A. .N. Norris, *Complex point-source representation of real point sources and the Gaussian beam summation method.* — J. Opt. Soc. Am. A **3**, No. 12 (1986), 2005–2010.
5. В. М. Бабич, *Квазифотоны и пространственно-временной лучевой метод. Матем. вопросы теории распространения волн. 36.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **342** (2007), 5–13.
6. М. .М. Popov, N. M. Semtchenok, P. M. Popov, A. .R. Verdel, *Depth migration by the Gaussian beam summation method.* — Geophysics **75**, No. 2 (2010), S81–S93.
7. M. Leibovich, E. Heyman, *Beam Summation Theory for Waves in Fluctuating Media. Part I: The Beam Frame and the Beam-Domain Scattering Matrix,* IEEE Transactions on Antennas and Propagation **65**, No. 10 (2017), 5431–5442.

8. M. Leibovich, E. Heyman, *Beam Summation Theory for Waves in Fluctuating Media. Part II: Stochastic Field Representation*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation **65**, No. 10 (2017), 5443–5452.
9. E. Gorodnitskiy, M. Perel, Yu Geng, R.-S. Wu, *Depth migration with Gaussian wave packets based on Poincaré wavelets*, Geophysical Journal International **205**, No. 1 (2016), 314–331.
10. M. V. Perel, *Integral representation of solutions of the wave equation based on Poincaré wavelets*, Proceedings of the International Conference Days on Diffraction (Saint-Petersburg 2009), 2009, 159–161.
11. E. Gorodnitskiy, M. V. Perel, *The Poincaré wavelet transform: implementation and interpretation*, Proceedings of the International Conference Days on Diffraction (Saint-Petersburg 2011), 2011, 72–77.
12. M. V. Perel, E. Gorodnitskiy, *Integral representations of solutions of the wave equation based on relativistic wavelets*. — J. of Phys. A: Math. and Theor. **45** No. 38 (2012).
13. Е. А. Городницкий, М. В. Перель, *Обоснование основанной на вейвлетах интегральной формулы для решения волнового уравнения. Матем. вопросы теории распространения волн. 47*. — Зап. научн. сем. ПОМИ **461** (2017), 107–123.
14. А.П. Киселев, М.В. Перель, *Гауссовские волновые пакеты*. — Оптика и Спектроскопия **86**, No. 3 (1999), 357–359.
15. A.P. Kiselev, M.V. Perel, *Highly localized solutions of the wave equation*. — J. Mathematical Physics **41**, No. 4 (2000), 1034–1955.
16. M. V. Perel, M. S. Sidorenko, *New physical wavelet 'Gaussian wave packet'*. — J. Physics A: Mathematical and Theoretical **40**, No. 13 (2007), 3441.
17. M. V. Perel, M. S. Sidorenko, *Wavelet-based integral representation for solutions of the wave equation*. — J. Phys. A: Math. and Theor. **42**, No. 37 (2009), 375211.
18. S. T. Ali, J.-P. Antoine, J. P. Gazeau, *Coherent States, Wavelets, and Their Generalizations*, Springer-Verlag, New York, 1999.
19. J.-P. Antoine, R. Murenzi, P. Vandergheynst, S. T. Ali, *Two-Dimensional Wavelets and their Relatives*, Cambridge University Press, 2004.
20. И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, *Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения*, Государственное изд-во физ.-мат. литературы, М. 1958, 368 с.
21. М. В. Федорюк, *Метод перевала*, изд. 2, Книжный дом ЛИБРОКОМ, М. 2010.

Gorodnitskiy E. Properties of the affine Poincaré wavelet transform.

The affine Poincaré wavelet transform is the convolution of the analyzed function and the parameter-dependent function called a wavelet. The wavelet is constructed from a function called the mother wavelet by using Lorentz transformations, shift and scaling and depending on the parameters, characterizing these transformations. We provide uniform by parameters estimates for the affine Poincaré wavelet transforms in some classes of analyzed functions and mother wavelets. Among other things, an estimate of the transform for large shifts and an estimate for large rapidities is

proved. Both estimates allow one to check vanishment of the transform at small scales.

We provide an asymptotic calculation of the Poincare affine wavelet transform of the model functions.

Санкт-Петербургский
государственный университет
7/9 Университетская наб.,
Санкт-Петербург 199034, Россия
E-mail: eugy@yandex.ru

Поступило 10 ноября 2020 г.