

Д. Гомес, С. А. Назаров, М.-Е. Перес

ТОЧЕЧНОЕ КРЕПЛЕНИЕ ПЛАСТИНЫ КИРХГОФА ВДОЛЬ ЕЕ КРОМКИ

Посвящаем работу Василию Михайловичу Бабичу,
помятуя о встречах в Ленинграде, Сантандере и
Санкт-Петербурге

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Постановка задачи. Пусть Ω – область на плоскости \mathbb{R}^2 , ограниченная замкнутым простым гладким (класса C^∞ для простоты) контуром $\Gamma = \partial\Omega$ (рис. 1,а), в окрестности \mathcal{V} которого введем систему локальных криволинейных координат (n, s) , где n – ориентированное расстояние до Γ , $n < 0$ внутри Ω , а s – длина дуги на Γ . Масштабирование сведем к единице длину l контура и тем самым сделаем безразмерными все геометрические параметры и декартову систему $x = (x_1, x_2)$ с началом в точке $\mathcal{O} \in \Gamma$, от которой против часовой стрелки измеряется координата s .

При большом натуральном $N \in \mathbb{N}$ выделим на Γ точки $P_1^\varepsilon, \dots, P_N^\varepsilon$, расположенные на малом расстоянии $\varepsilon = 1/N$ одна от другой; при этом $P_0^\varepsilon = P_N^\varepsilon = \mathcal{O}$. Восстановим из этих точек перпендикуляры $v_1^\varepsilon, \dots, v_N^\varepsilon = v_0^\varepsilon$ и обозначим ϖ_j^ε тонкие полоски, вырезанные из множества $\Omega \cap \mathcal{V}$ линиями v_{j-1}^ε и v_j^ε ; здесь $j = 1, \dots, N$. По положительной профильной функции $H \in C^\infty(\Gamma)$ определим контур

$$\Upsilon^\varepsilon = \{x \in \mathcal{V} : s \in \Gamma, n = -\varepsilon^{1+\alpha} H(s)\}, \quad \alpha \geq 0, \quad (1.1)$$

Ключевые слова: пластина Кирхгофа со свободной кромкой, точечные условия Соболева, асимптотический анализ, условия жесткого защемления и свободного операния, пограничный слой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-01-00325) и MICINN в Испании (проект PGC2018-098178-B-I00).

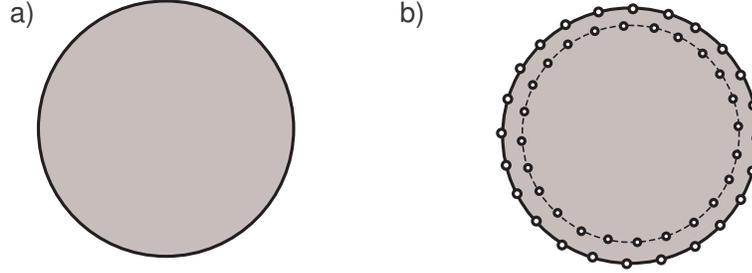


Рис. 1. Пластины со свободным краем (а) и закрепленная в точках (б). Точки крепления отмечены символом \circ , а контур Υ^ε – штрих-пунктирной линией.

лежащий строго внутри области Ω и удаленный от ее границы на малое расстояние $O(\varepsilon^{1+\alpha})$. В каждой из замкнутых полосок $\overline{\omega_j^\varepsilon}$ произвольным образом зафиксируем точку $Q^\varepsilon \in \Upsilon^\varepsilon$ (рис. 1, б). Не исключаем случай $Q_{k-1}^\varepsilon = Q_k^\varepsilon$. Совокупности указанных точек обозначим

$$\mathcal{P}^\varepsilon = \{P_1^\varepsilon, \dots, P_N^\varepsilon\} \quad \text{и} \quad \mathcal{Q}^\varepsilon = \{Q_1^\varepsilon, \dots, Q_N^\varepsilon\}. \quad (1.2)$$

Область Ω интерпретируем как пластину Кирхгофа (см., например, монографии [1–3]), край Γ которой считаем свободным от внешних воздействий всюду кроме точек $P_1^\varepsilon, \dots, P_N^\varepsilon$, закрепленных при помощи мелких клемм, гвоздей, шурупов или пятен сварки. Точки $Q_1^\varepsilon, \dots, Q_N^\varepsilon$ также зафиксированы аналогичным способом. Асимптотический анализ изгиба пластин с малыми зонами крепления или опирания проведен в статьях [4, 5] – приведенные далее постановки задач основаны на этих результатах. Именно, прогиб u^ε пластины Ω описывается задачей Соболева–Неймана для бигармонического уравнения

$$\Delta_x^2 u^\varepsilon(x) = f(x), \quad x \in \Omega \setminus (\mathcal{P}^\varepsilon \cup \mathcal{Q}^\varepsilon), \quad (1.3)$$

$$N^q(x, \nabla_x) u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma \setminus \mathcal{P}^\varepsilon, \quad q = 2, 3, \quad (1.4)$$

$$u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \mathcal{P}^\varepsilon \cup \mathcal{Q}^\varepsilon. \quad (1.5)$$

Здесь $\nabla_x = \text{grad}$, $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ – оператор Лапласа, а дифференциальные операторы краевых условий заданы формулами (см. [6], [1, § 30] и др.)

$$N^2(x, \nabla_x) = \Delta_x - (1 - \nu)(\partial_s^2 + \varkappa(s)\partial_n), \quad (1.6)$$

$$N^3(x, \nabla_x) = \partial_n \Delta_x - (1 - \nu)(\partial_s(\varkappa(s)\partial_s) - \partial_n \partial_s^2).$$

При этом $\partial_n = \partial/\partial n$, $\partial_s = \partial/\partial s$, \varkappa – кривизна контура Γ , а $\nu \in [0, 1/2)$ – коэффициент Пуассона, отсутствующий в самом уравнении (1.3), но присутствующий в функционале энергии $\frac{1}{2}DE(u^\varepsilon, u^\varepsilon; \Omega)$, запасенной пластиной под действием поперечной нагрузки Df ,

$$E(u, v; \Omega) = \int \left(\Delta_x u \Delta_x v + (1 - \nu) \times \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \right) dx. \quad (1.7)$$

Наконец, нормирующий множитель D – цилиндрическая жесткость пластины, и справедливо очевидное неравенство

$$E(u, u; \Omega) \geq (1 - \nu) \|\nabla_x^2 u; L^2(\Omega)\|^2 \quad \forall u \in H^2(\Omega), \quad (1.8)$$

где $\nabla_x^2 u$ – набор производных функции u второго порядка.

Задача (1.3)–(1.5) включена в формулу Грина (см [6], [1, §27], [3, §1.1] и др.)

$$(\Delta_x^2 u, v)_\Omega = E(u, v; \Omega) - (N^2 u, \partial_n v)_\Gamma + (N^3 u, v)_\Gamma \quad \forall u \in H^4(\Omega), \quad v \in H^2(\Omega).$$

При фиксированных ε и α задача (1.3)–(1.5) однозначно разрешима (лемма 1.1), и основная цель работы – выяснить, каков предел u^0 ее решения при $\varepsilon \rightarrow +0$ в зависимости от расположения точек из множества \mathcal{Q}^ε , в частности, от показателя α в формуле (1.1). Так, при $\alpha < 1/2$ предельной оказывается задача Дирихле

$$\Delta^2 u^0(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.9)$$

$$u^0(x) = 0, \quad \partial_n u^0(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (1.10)$$

т.е. фиксация пластины в точках из множеств (1.2) обеспечивает в пределе при $\varepsilon \rightarrow +0$ полное защемление ее края. В то же время при дополнительных геометрических ограничениях на множество \mathcal{Q}^ε (см. (2.25)) в случае $\alpha > 1/2$ предельное уравнение (1.9) приобретает смешанные краевые условия

$$u^0(x) = 0, \quad \Delta_x u^0 - (1 - \nu)\varkappa(s)\partial_n u^0(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (1.11)$$

означающие, что в пределе край пластины становится шарнирно опертым (см. работу [6] и, например, книги [1, 3, 7]). Случай $\alpha = 1/2$ требует отдельного исследования с привлечением конструкций пограничных слоев и будет разобран в очередной публикации авторов.

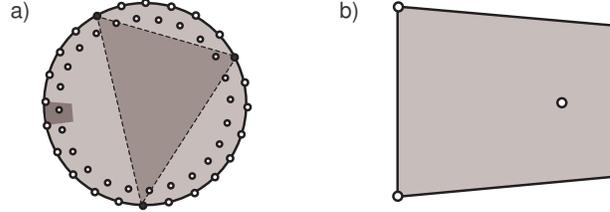


Рис. 2. Треугольник T^ε и ячейка ω^ε (тонированы глубоко) в пластине (а) и растянутая ячейка с тремя точками крепления (б).

Основное внимание в § 2 работы уделено именно описанной выше, в некотором смысле простейшей, геометрии, однако в § 3 обсуждаются доступные обобщения, например, спектральная задача. В п. 3 § 1 приведен краткий обзор работ по анализу разнообразных возмущений кромок пластин Кирхгофа с необычными краевыми условиями, в частности, перечислены известные механические парадоксы в теории пластин.

1.2. Разрешимость задачи Соболева-Неймана. Обобщенная постановка задачи (1.3)–(1.5) апеллирует к интегральному тождеству [1, 8]

$$E(u^\varepsilon, \psi^\varepsilon; \Omega) = (f, \psi^\varepsilon)_\Omega \quad \forall \psi^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon, \quad (1.12)$$

где $(\cdot, \cdot)_\Omega$ – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega)$, а \mathcal{H}^ε – подпространство функций из класса Соболева $H^2(\Omega)$, удовлетворяющих условиям Соболева (1.5), т.е.

$$\mathcal{H}^\varepsilon = \{u^\varepsilon \in H^2(\Omega) : u^\varepsilon(x) = 0, x \in \mathcal{P}^\varepsilon \cup \mathcal{Q}^\varepsilon\}. \quad (1.13)$$

Подчеркнем, что согласно теореме Соболева о вложении $H^2(\Omega) \subset C(\Omega)$ на плоскости (см., например, книгу [9]) дельта-функция Дирака

$$H^2(\Omega) \ni \psi \mapsto (\delta, \psi)_\Omega := \psi(0)$$

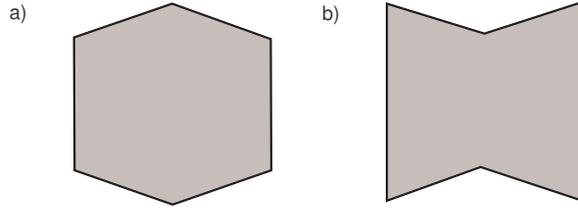


Рис. 3. Многоугольные пластины: выпуклая (а) и с входящими углами (b).

является непрерывным функционалом, т.е. (1.13) – замкнутое подпространство в $H^2(\Omega)$ и постановка условий Соболева в самом деле корректна. Благодаря неравенствам (1.8) и

$$\|u^\varepsilon; H^1(\Omega)\|^2 \leq c \|\nabla_x^2 u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 \quad \forall u^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon \quad (1.14)$$

задача (1.12) однозначно разрешима. Неравенство (1.14) с не зависящей от ε постоянной (предложение 2.1) вытекает из следующего наблюдения (замечание 2.1): среди точек множества \mathcal{P}^ε можно найти вершины невырожденного треугольника T^ε , мало изменяющегося при $\varepsilon \rightarrow +0$ (рис. 2, а). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и любой функции $f \in L^2(\Omega)$ задача (1.12) обладает единственным решением $u^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$, и для него верна оценка*

$$\|u^\varepsilon; H^2(\Omega)\| \leq c \|f; L^2(\Omega)\|, \quad (1.15)$$

в которой множитель c не зависит от ε и f .

Итак, при фиксированной правой части f имеет место сходимость

$$u^\varepsilon \rightarrow u^0 \in H^2(\Omega) \quad (1.16)$$

слабая в $H^2(\Omega)$, но сильная в пространствах Соболева $H^1(\Omega)$ и $H^1(\Gamma)$. Как упоминалось, выяснение свойств сходимости (1.16) составляет предмет данной работы.

1.3. Родственные задачи теории пластин; краткий обзор.

Для многоугольных пластин (рис. 3) кривизна κ обращается в нуль и

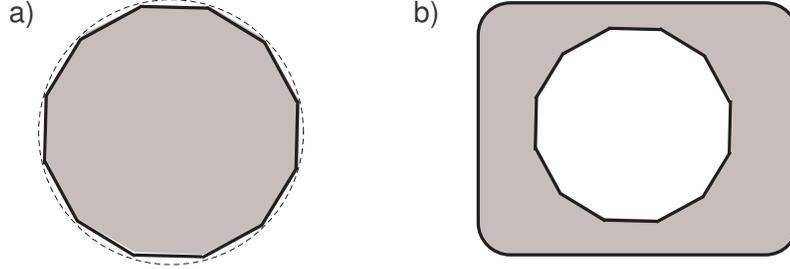


Рис. 4. Многоугольная пластина (а) и пластина с многоугольным отверстием (b).

краевые условия (1.11) принимают вид

$$u^0(x) = 0, \quad \Delta_x u^0(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.17)$$

а задача (1.9), (1.17) приобретает необычные свойства, называемые в механической литературе парадоксами. Прежде всего упомянем парадокс Сапонджяна [7, 10], связанный с обозначениями

$$v^0(x) = u^0(x), \quad w^0(x) = -\Delta_x u^0(x) \quad (1.18)$$

и естественным на первый взгляд превращением задачи (1.9), (1.17) в совокупность задач Дирихле для уравнений Пуассона

$$\begin{aligned} -\Delta_x w^0(x) &= f(x), \quad x \in \Omega, \quad w^0(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ -\Delta_x v^0(x) &= w^0(x), \quad x \in \Omega, \quad v^0(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.19)$$

Как показано в статьях [11, 12] и книге [13, § 6, гл. 6], для выпуклых многоугольников Ω (рис. 3, а) задачи (1.9), (1.17) и (1.19) эквивалентны и равенства (1.18) действительно справедливы, однако при наличии “входящих” углов с растворами $\theta > \pi$ (рис. 3, б) такая эквивалентность нарушена. Дело в том, что в последнем случае названные задачи дают решения $u^0 \in H^2(\Omega)$ и $v^0 \in H^1(\Omega)$, различающиеся своим поведением около вершин входящих углов и потому совпадающие только при наложении на правую часть f нескольких условий ортогональности (подробности, в частности, “правильную” процедуру решения задач (1.19) см. в статьях [11, 12] и книге [13, § 6, гл. 6]).

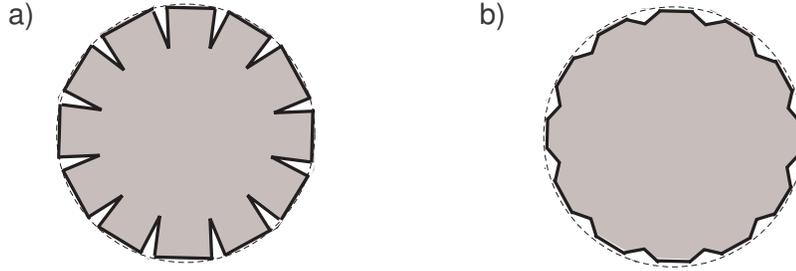


Рис. 5. Многоугольные пластины (а) и (б), у которых шарнирное опирание кромок в пределе превращается в жесткое защемление.

Еще один парадокс, обнаруженный в статье [14] И. Бабушки, возникает при приближении пластин с гладкими краями пластин многоугольными пластинами. Пусть, например, Ω – круг

$$\mathbb{B}_R = \{x : r := (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} < R\}$$

с радиусом $R > 0$, а Ω_N – вписанный в него правильный многоугольник с большим числом N сторон (рис. 4, а). В [14] установлено, что предел u_∞ при $N \rightarrow +\infty$ решений u_N задачи (1.9), (1.17) для пластины Ω_N с шарнирно опертым краем оказывается решением той же задачи в Ω , т.е. на окружности $\Gamma = \partial\mathbb{B}_R$ сохраняются краевые условия

$$u_\infty(x) = 0, \quad \Delta_x u_\infty(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (1.20)$$

В то же время краевые условия (1.11) шарнирного опирания круга \mathbb{B}_R вдоль окружности $\partial\mathbb{B}_R$ выглядят так:

$$u^0(x) = 0, \quad \Delta_x u^0(x) - (1 - \nu)R^{-1}\partial_r u^0(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (1.21)$$

Отсутствие во втором из предельных краевых условий (1.20) коэффициента Пуассона ν и нормальной (радиальной для окружности) производной $\partial_r u_\infty$ и составляет обсуждаемый парадокс. Его толкованию и попыткам устранения посвящено большое количество публикаций (см. обзоры литературы в статьях [15, 16]), и похожие курьезы обнаружены в других задачах теории упругости (ср. статьи [17–19] и др.).

Наиболее просто убедиться в сходимости $u_N \rightarrow u_\infty$ можно при помощи замены неизвестных (1.18), сопутствующей парадоксу Сапонджяна: поскольку многоугольник Ω_N выпуклый, задачи (1.9), (1.17) и (1.19) эквивалентны, а сходимость решений задачи Дирихле для уравнения Пуассона в Ω_N вполне очевидна. По-другому дело обстоит в случае многоугольного отверстия Ω_N (рис. 4, b). В работе [15] доказано, что предельные краевые условия на окружности Γ выглядят так:

$$u_\infty(x) = 0, \quad \Delta_x u_\infty(x) - 4R^{-1} \partial_r u_\infty(x) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Оно отличается как от (1.21), так и от (1.11).

В работе [15] также изучены два способа приближения пластины Ω с гладкой кромкой $\partial\Omega$ многоугольными пластинами Ω_N со свободно опертыми краями. При этом найдены два типа ломанных, изображенных на рис. 5, обеспечивающих в пределе при $N \rightarrow \infty$ переход к условиям (1.10) жесткого защемления. В первом случае (рис. 5, a) у ломаной $\partial\Omega_N$ (одинаковые для простоты) звенья длиной h чередуются с острыми мелкими зубцами высотой $L(h)$. В [15, теорема 7] установлено, что предельные краевые условия (1.10) возникают в случае $h |\ln L(h)| = o(1)$ при $h \rightarrow +0$.

Во втором случае (рис. 5, b) ломаная $\partial\Omega_N$ представляет собой пологое, глубиной $O(h^{1+\alpha})$, невыпуклое возмущение гладкой кривой $\partial\Omega$ и при $\alpha \in [0, 1/2)$ предельные краевые условия принимают вид (1.10). Подчеркнем, что для вписанного в круг правильного многоугольника с N сторонами (рис. 4, a) глубина составляет $O(N^{-2}) = O(h^2)$, т.е. $\alpha = 1$.

В работе [20] как пример более общих результатов исследована пластина Кирхгофа со свободно опертой быстроосциллирующей кромкой (рис. 6, a)

$$\Gamma^h = \{x \in \mathcal{V} : n = h^{1+\alpha} H(h^{-1}s), \quad s \in \Gamma\}, \quad (1.22)$$

где H – кусочно-гладкая 1-периодическая функция. Изломанная кромка пластины на рис. 5, b, подпадает под определение (1.22), и упомянутый результат [20] согласуется с описанным в предыдущем абзаце: при $\alpha \in [0, 1/2)$ предельными ($h \rightarrow +0$) краевыми условиями служат условия жесткого защемления (1.10). Кроме того, обнаружено, что при $\alpha = 1/2$ в качестве предельных выступают отличающиеся от (1.10), (1.11) и (1.17) краевые условия

$$u^0(x) = 0, \quad N^2(x, \nabla_x) u^0(x) - a(s) \partial_n u^0(x) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

где a – положительная функция на контуре Γ .

Далее в нашей статье будет показано, что для пластин, изображенных на рис. 4, а, рис. 5, b, и рис. 6, а, предельные краевые условия (1.10) и (1.11) могут быть получены и при свободном крае пластин за счет подходящего расположения точек крепления в двух частых шеренгах (рис. 1, b, и рис. 6, b).

2. ОБОСНОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ПЕРЕХОДА

2.1. Вспомогательное неравенство. Растяжение координат $x \mapsto \xi$ преобразует ячейки ϖ_j^ε в области ω единичных размеров, которые используются для вывода глобальных оценок решения u^ε .

Пусть ω – область на плоскости \mathbb{R}^2 с кусочно-гладкой границей $\partial\omega$ и компактным замыканием $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$. Три точки p^0, p^1 и p^2 в $\bar{\omega}$ суть вершины невырожденного треугольника (рис. 2, b). Функцию $w \in H^2(\omega)$ представим в виде

$$w(x) = w_\perp(\xi) + a(\xi), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \omega. \quad (2.1)$$

При этом $a(\xi) = a_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_2$ – линейная функция с коэффициентами

$$a_j = \frac{1}{|\omega|} \int_\omega \frac{\partial w}{\partial \xi_j}(\xi) d\xi, \quad j = 1, 2, \quad a_0 = \frac{1}{|\omega|} \int_\omega \left(w(\xi) - \sum_{j=1}^2 a_j \xi_j \right) d\xi,$$

где $|\omega|$ – площадь фигуры ω , и выполнены условия ортогональности

$$\int_\omega w_\perp(\xi) d\xi = 0, \quad \int_\omega \frac{\partial w_\perp}{\partial \xi_j}(\xi) d\xi = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.2)$$

Итерированное применение неравенства Пуанкаре, опирающегося на соотношения (2.2), приводит к формуле

$$\|w_\perp; L^2(\omega)\| \leq c \|\nabla_\xi w_\perp; L^2(\omega)\| \leq C \|\nabla_\xi^2 w_\perp; L^2(\omega)\| = C \|\nabla_\xi^2 w; L^2(\omega)\|. \quad (2.3)$$

Теперь по теореме Соболева о вложении $H^2(\omega) \subset C(\bar{\omega})$ получаем, что

$$|w_\perp(p^k)| \leq c \|w_\perp; H^2(\omega)\| \leq C \|\nabla_\xi^2 w; L^2(\omega)\|. \quad (2.4)$$

Рассмотрим систему трех линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов линейной функции a

$$a_0 + a_1 p_1^k + a_2 p_2^k = -w_\perp(p^k), \quad k = 0, 1, 2, \quad (2.5)$$

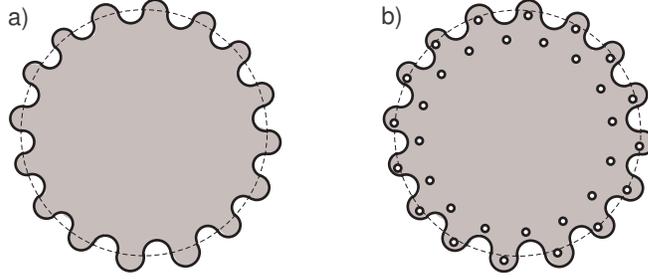


Рис. 6. Пластина с быстроосциллирующей границей (а) и ее закрепление двумя шеренгами точек (б).

обеспеченную условиями Соболева

$$w(p^1) = 0, \quad w(p^2) = 0, \quad w(p^3) = 0. \quad (2.6)$$

Ее матрица

$$m = \begin{pmatrix} 1 & p_1^0 & p_2^0 \\ 1 & p_1^1 & p_2^1 \\ 1 & p_1^2 & p_2^2 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

вырождена в том и только в том случае, если точки p^0 , p^1 и p^2 лежат на одной прямой. В самом деле, аффинное преобразование декартовой системы координат дает возможность поместить точку p^0 в начало координат, а точку p^1 – на ось абсцисс. Следовательно, $p^0 = (0, 0)$ и $p^1 = (p_1^1, 0)$, причем $p_1^1 \neq 0$ в силу условия треугольника. В итоге матрица (2.7) стала треугольной, а ее определитель $\det m = p_1^1 p_2^2$ отличен от нуля при условии $p_2^2 \neq 0$, означая, что точка p^2 не лежит на оси абсцисс и вместе с p^0 и p^1 образует вершины невырожденного треугольника T . (Упомянем простой геометрический факт: $|\det m|$ – удвоенная площадь треугольника T .) Итак, система (2.5) однозначно разрешима, а неравенства (2.3), (2.4) и

$$|a_k| \leq c(|w_\perp(p^0)| + |w_\perp(p^1)| + |w_\perp(p^2)|), \quad k = 0, 1, 2, \quad (2.8)$$

вместе с представлением (2.1) приводят к следующему утверждению.

Предложение 2.1. *При указанных ограничениях на область ω и точки p^0 , p^1 , p^2 для функции $w \in H^2(\omega)$, подчиненной условиям (2.6)*

справедливо неравенство

$$\|w; H^1(\omega)\| \leq c_T \|\nabla_\xi^2 w; L^2(\omega)\|.$$

Замечание 2.1. Впишем в фигуру Ω из п.1 §1 треугольник T с вершинами p^0, p^1, p^2 и площадью $|T| > 0$ (рис. 2, а). В одномерной 2ε -окрестности точки $p^k \subset \Gamma$ попадает точка $P_{j_k(\varepsilon)}^\varepsilon$ из множества \mathcal{P}^ε , а треугольник T^ε с вершинами $P_{j_0(\varepsilon)}^\varepsilon, P_{j_1(\varepsilon)}^\varepsilon, P_{j_2(\varepsilon)}^\varepsilon$ имеет площадь $|T^\varepsilon| = |T| + O(\varepsilon)$ и остается невырожденным при малом ε . Таким образом, повторение приведенных выше рассуждений и выкладок устанавливает независимость множителя c в неравенстве (1.14) от малого параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \varepsilon_0 > 0$.

2.2. Следовые неравенства; случаи прямой границы. Сначала предположим, что у контура Γ есть плоский участок $\gamma = \{x : x_2 = 0, |x_1| < h\}, h > 0$, причем область Ω локально расположена ниже него. Рассмотрим прямоугольник $\omega^\varepsilon = \{x : x_1 \in (0, \varepsilon), x_2 \in (-2\varepsilon H(0), 0)\}$, замыкание которого содержит точки $P_0^\varepsilon, P_1^\varepsilon$ и Q_0^ε из множеств (1.2). Растяжение координат $x \rightarrow \xi = \varepsilon^{-1}x$ превращает прямоугольник ω^ε в прямоугольник $\omega = (0, 1) \times (-2H(0), 0)$, а точки $P_0^\varepsilon, P_1^\varepsilon$ и Q_0^ε – в точки p^0, p^1 и $p^2 = q^\varepsilon = (q_1^\varepsilon, q_2^\varepsilon)$, где

$$p^1 = (0, 0), p^2 = (1, 0), q_1^\varepsilon \in [0, 1], |q_2^\varepsilon + \varepsilon^\alpha H(0)| \leq c\varepsilon^{\alpha+1}. \quad (2.9)$$

Функцию $w \in H^2(\omega)$, удовлетворяющую условиям Соболева (2.6), представим в виде (2.1) и получим неравенства (2.3) и (2.4), однако соотношение (2.8) остается недоступным, так как точка q^ε , вообще говоря, обладает малой ординатой. В результате согласно (2.9) для матрицы (2.7) верны формулы

$$m^\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & q_1^\varepsilon & q_2^\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \det m^\varepsilon = q_2^\varepsilon = O(\varepsilon^\alpha),$$

а для решения системы (2.5) – оценка

$$|a_0^\varepsilon| + |a_1^\varepsilon| + \varepsilon^\alpha |a_2^\varepsilon| \leq c \|\nabla_\xi^2 w; L^2(\omega)\|. \quad (2.10)$$

Теперь выводим соотношение

$$\|w; H^1(\omega)\|^2 \leq c \left(\|w_\perp; H^1(\omega)\|^2 + \sum_{k=0}^2 |a_k|^2 \right) \leq c\varepsilon^{-2\alpha} \|\nabla_\xi^2 w; L^2(\omega)\|^2.$$

Кроме того, обычное следовое неравенство (см., например, [8, гл. 1]) показывает, что

$$\|w(\cdot, 0); L^2(0, 1)\|^2 \leq c(\|w_\perp; H^1(\omega)\|^2 + |a_0^\varepsilon|^2 + |a_1^\varepsilon|^2) \leq c\|\nabla_\xi^2 w; L^2(\omega)\|^2, \quad (2.11)$$

$$\left\| \frac{\partial w}{\partial \xi_2}(\cdot, 0); L^2(0, 1) \right\|^2 \leq c \left(\left\| \frac{\partial w_\perp}{\partial \xi_2}; H^1(\omega) \right\|^2 + |a_2^\varepsilon|^2 \right) \leq c\varepsilon^{-2\alpha} \|\nabla_\xi^2 w; L^2(\omega)\|^2. \quad (2.12)$$

Подчеркнем, что в средней части (2.11) отсутствует коэффициент a_2^ε , для которого оценка (2.10) дает большую мажоранту.

Наконец, вернемся к исходным координатам $x = \varepsilon\xi$ и при учете большого коэффициента сжатия ε^{-1} получим для функции $w^\varepsilon(x) = w(\varepsilon\xi)$ равенства

$$\|\nabla_x^k w^\varepsilon; L^2(\omega^\varepsilon)\|^2 = \varepsilon^{2-2k} \|\nabla_\xi^k w; L^2(\omega)\|^2, \quad k = 0, 1, 2, \quad (2.13)$$

$$\|w^\varepsilon(\cdot, 0); L^2(0, \varepsilon)\|^2 = \varepsilon \|w(\cdot, 0); L^2(0, 1)\|^2,$$

$$\left\| \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial \xi_2}(\cdot, 0); L^2(0, \varepsilon) \right\|^2 = \varepsilon^{-1} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_2}(\cdot, 0); L^2(0, 1) \right\|^2.$$

Отсюда и из (2.11), (2.12) выводим, что

$$\|\nabla_x^2 w^\varepsilon; L^2(\omega^\varepsilon)\|^2 = \varepsilon^{-2} \|\nabla_\xi^2 w; L^2(\omega)\|^2 \geq \quad (2.14)$$

$$\geq c\varepsilon^{-2} \|w(\cdot, 0); L^2(0, 1)\|^2 = c\varepsilon^{-3} \|w^\varepsilon(\cdot, 0); L^2(0, \varepsilon)\|^2,$$

$$\|\nabla_x^2 w^\varepsilon; L^2(\omega^\varepsilon)\|^2 = \varepsilon^{-2} \|\nabla_\xi^2 w; L^2(\omega)\|^2 \geq$$

$$\geq c\varepsilon^{-2+2\alpha} \left\| \frac{\partial w}{\partial \xi_2}(\cdot, 0); L^2(0, 1) \right\|^2 = c\varepsilon^{2\alpha-1} \left\| \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_2}(\cdot, 0); L^2(0, \varepsilon) \right\|^2. \quad (2.15)$$

Теперь, считая, что полудлина h отрезка $\gamma \subset \Gamma$ пропорциональна ε , суммированием неравенств (2.14) и (2.15) получаем формулу

$$\varepsilon^{-3} \|w^\varepsilon; L^2(\gamma)\|^2 + \varepsilon^{2\alpha-1} \|\partial_n w^\varepsilon; L^2(\gamma)\| \leq c \|\nabla_x^2 w^\varepsilon; L^2(\gamma \times (-2\varepsilon H_\gamma, 0))\|^2,$$

где $H_\gamma = \max H(s)$.

2.3. Следовые неравенства. Докажем используемые далее оценки следов на Γ решения u^ε задачи (1.12).

Теорема 2.1. *При указанном в п. 1, § 2 строении множеств (1.2), фигурирующих в условиях Соболева (1.5), для функции $u^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$ справедливы неравенства*

$$\|u^\varepsilon; L^2(\Gamma)\| \leq c\varepsilon^{3/2} \|\nabla_x^2 u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|, \quad (2.16)$$

$$\|\partial_n u^\varepsilon; L^2(\Gamma)\| \leq c\varepsilon^{(1-2\alpha)_+/2} \|\nabla_x^2 u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|, \quad (2.17)$$

причем множитель с не зависит от u^ε и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ при некотором $\varepsilon_0 > 0$, а $(t)_+ = (t + |t|)/2$ – положительная часть вещественного числа t .

Доказательство. Заметим, что при $\alpha > 1/2$ соотношение (2.15) с малым множителем $\varepsilon^{2\alpha-1}$ в правой части заведомо неточно, а “правильная” оценка (2.17) с множителем $\varepsilon^{(1-2\alpha)_+/2} = 1$ в мажоранте вытекает из обычного следового неравенства [8, гл. 1]

$$\|\partial_n u^\varepsilon; L^2(\Gamma)\| \leq c_\Omega \|\nabla_x u^\varepsilon; H^1(\Omega)\|$$

и формулы (1.14), использующей условия Соболева (1.5) только на множестве $\mathcal{P}^\varepsilon \subset \Gamma$ (см. замечание 2.1).

Проверим неравенства (2.17) при $\alpha \in [0, 1/2]$ и (2.16) при всех $\alpha \geq 0$. В силу вычислений, проведенных перед теоремой, достаточно обследовать криволинейные участки границы $\partial\Omega = \Gamma$.

При каждом $j = 1, \dots, N$ отсечем от введенной в п.1 §1 тонкой полоски ϖ_j^ε трапецию $\theta_j^\varepsilon = \{x \in \varpi_j^\varepsilon : n \in (-2\varepsilon H_j, 0)\}$ с криволинейными основаниями (рис. 2, а), замыкание которой содержит точки $P_j^\varepsilon, P_{j+1}^\varepsilon$ и Q_j^ε из множеств (1.2); здесь $H_j = H(s_j)$ и $s_j = \varepsilon j$. В координатах $(n, s - s_j)$ трапеция принимает вид прямоугольника $\omega_j^\varepsilon = \omega^\varepsilon$, а упомянутые точки превращаются в точки p^0, p^1 и $p^2 = q^\varepsilon$, координаты которых удовлетворяют соотношениям (2.9).

Якобиан $J(n, s) = 1 + n\chi(s)$ перехода $x \mapsto (n, s)$ фигурирует в формулах

$$\nabla_x = (\partial_n, J(n, s)^{-1} \partial_s), \quad dx = J(n, s) dn ds$$

и удовлетворяет простым, но важным соотношениям $|J(n, s) - 1| \leq c\varepsilon$ и $|\nabla_x J(n, s)| \leq c$ в области θ_j^ε . Таким образом, приходим к неравенству

$$\|\nabla_x^2 u^\varepsilon; L^2(\theta_j^\varepsilon)\|^2 \geq \frac{1}{2} \|\nabla_{(n,s)}^2 w^\varepsilon; L^2(\omega^\varepsilon)\|^2 - c \|\nabla_x u^\varepsilon; L^2(\theta_j^\varepsilon)\|^2, \quad (2.18)$$

в котором $w^\varepsilon \in H^2(\omega^\varepsilon)$ – функция $u^\varepsilon \in H^2(\theta_j^\varepsilon)$, записанная в криволинейных координатах. Справедлива оценка

$$\int_{\theta_j^\varepsilon} |\nabla_x u^\varepsilon(x)|^2 dx \leq c\varepsilon \int_{\varpi_j^\varepsilon} (|\nabla_x^2 u^\varepsilon(x)|^2 + |u^\varepsilon(x)|^2) dx, \quad (2.19)$$

использующая малость высоты криволинейной трапеции и превращающая неравенство (2.18) в такое:

$$\|\nabla_{(n,s)}^2 w^\varepsilon; L^2(\omega^\varepsilon)\|^2 \leq c \|\nabla_x^2 u^\varepsilon; L^2(\varpi_j^\varepsilon)\|^2. \quad (2.20)$$

Сама оценка (2.19) вытекает из одномерного неравенства

$$\int_{-2\varepsilon H}^0 |V(n)|^2 dn \leq c \int_{-\delta}^0 (|\partial_n V(n)|^2 + |V(n)|^2) dn, \quad (2.21)$$

обеспеченного формулой Ньютона–Лейбница

$$V(n) = \int_{-\delta}^n \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\chi\left(\frac{3\tau}{\delta}\right) V(\tau) \right) d\tau$$

и следующей выкладкой:

$$\begin{aligned} \int_{-2\varepsilon H}^0 |V(n)|^2 dn &\leq c_\chi \int_{-2\varepsilon H}^0 \left(\int_{-\delta}^n (|\partial_\tau V(\tau)| + |V(\tau)|) d\tau \right)^2 dn \\ &\leq C \int_{-2\varepsilon H}^0 dn \int_{-\delta}^0 (|\partial_\tau V(\tau)| + |V(\tau)|)^2 d\tau \leq 4CH\varepsilon \int_{-\delta}^0 (|\partial_\tau V(\tau)|^2 + |V(\tau)|^2) d\tau. \end{aligned}$$

Здесь $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ – срезающая функция,

$$\chi(\tau) = 1 \text{ при } |\tau| < 1 \text{ и } \chi(\tau) = 0 \text{ при } |\tau| > 2,$$

а число δ выбрано так, что δ -окрестность контура Γ содержится в окрестности \mathcal{V} , где введены криволинейные координаты (см. п. 1 § 1). Наконец, неравенство (2.21) применяется к вектор-функции $V = \nabla_x u^\varepsilon$ и затем интегрируется по отрезку $(\varepsilon j, \varepsilon j + \varepsilon) \ni s$.

Теперь введем растянутые криволинейные координаты $\xi_1 = \varepsilon^{-1}n$, $\xi_2 = \varepsilon^{-1}s - j$ и преобразуем малый прямоугольник ω^ε в прямоугольник ω единичных размеров. В итоге при учете формул (2.13) и (2.20) выводим из (2.14) и (2.15) неравенства

$$\|u^\varepsilon; L^2(\Gamma \cap \partial\theta_j^\varepsilon)\|^2 \leq c\varepsilon^3 \|\nabla_x^2 u^\varepsilon; L^2(\varpi_j^\varepsilon)\|^2 \text{ при } \alpha \geq 0,$$

$$\|\partial_n u^\varepsilon; L^2(\Gamma \cap \partial\theta_j^\varepsilon)\|^2 \leq c\varepsilon^{1-2\alpha} \|\nabla_x^2 u^\varepsilon; L^2(\varpi_j^\varepsilon)\|^2 \text{ при } \alpha \in [0, 1/2],$$

суммирование которых по $j = 1, \dots, N$ заканчивает доказательство теоремы. \square

2.4. Доказательство сходимостей. Пусть сначала $\alpha \in [0, 1/2)$. В силу оценки (1.15) для решения $u^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon \subset H^2(\Omega)$ задачи (1.12) нормы в пространстве $L^2(\Gamma)$ левых частей (2.16) и (2.17) оказываются бесконечно малыми при $\varepsilon \rightarrow +0$, а значит, предел (1.16) и его нормальная производная имеют нулевые следы на Γ , т.е. функция u^0 принадлежит подпространству $H_0^2(\Omega)$, выделенному из $H^2(\Omega)$ условиями Дирихле (1.10).

Теорема 2.2. *При $\alpha \in [0, 1/2)$ решение $u^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$ вариационной задачи (1.12) с правой частью $f \in L^2(\Omega)$ имеет слабым в $H^2(\Omega)$ пределом решение $u^0 \in H_0^2(\Omega)$ задачи (1.9), (1.10), отыскиваемое из интегрального тождества*

$$E(u^0, \psi^0; \Omega) = (f, \psi^0)_\Omega \quad \forall \psi^0 \in H_0^2(\Omega). \quad (2.22)$$

Доказательство. В интегральное тождество (1.12) можно подставить пробную функцию $\psi^0 \in C_c^\infty(\Omega)$, которая попадает в пространство (1.13), так как аннулируется в окрестности контура Γ , а значит, в точках из $\mathcal{P}^\varepsilon \subset \Gamma$ и при малом ε на контуре $\Upsilon^\varepsilon \supset \mathcal{Q}^\varepsilon$ (см. определения (1.3) и (1.2)). Ввиду слабой сходимости (1.16) в пространстве $H^2(\Omega)$ предельный переход при $\varepsilon \rightarrow +0$ в интегральном тождестве (1.12) с $\psi^\varepsilon = \psi^0$ превращает его в тождество (2.22), причем по замыканию допустимы пробные функции из подпространства $H_0^2(\Omega)$. \square

Если $\alpha \geq 1/2$, то согласно неравенству (2.16) предел $u^0 \in H^2(\Omega)$ принадлежит более широкому чем $H_0^2(\Omega)$ подпространству

$$\mathcal{H}^0 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = \{\psi^0 \in H^2(\Omega) : \psi^0(x) = 0, x \in \Gamma\}, \quad (2.23)$$

так как в силу оценки (2.17) норма в $L^2(\Gamma)$ нормальной производной $\partial_n u^\varepsilon$ остается ограниченной, но не обязательно исчезает в пределе при $\varepsilon \rightarrow +0$. Поэтому рассуждения из доказательства теоремы 2.2 разрушаются на последнем этапе: замыкание линейного множества $C_c^\infty(\Omega)$ по соболевской H^2 -норме оказывается уже, чем пространство (2.23), и поэтому предельный переход в интегральном тождестве (1.12) с пробной функцией $\psi^\varepsilon = \psi^0 \in C_c^\infty(\Omega)$ не приводит к интегральному тождеству

$$E(u^0, \psi^0; \Omega) = (f, \psi^0) \quad \forall \psi^0 \in \mathcal{H}^0, \quad (2.24)$$

обслуживающему задачу (1.9), (1.11).

Для построения набора пробных функций, пригодных для предельного перехода в интегральном тождестве (1.12), понадобится предположение о некоторой регулярности строения множества точек \mathcal{Q}^ε , а

именно,

$$Q_j^\varepsilon \in \widehat{\varpi}_j^\varepsilon = \{x \in \varpi_j^\varepsilon : s - \varepsilon j \in (\delta_Q, 1 - \delta_Q)\}, \text{ при некотором } \delta_Q \in (0, 1/2). \quad (2.25)$$

Иными словами, расстояние между проекциями на контур Γ соседних точек Q_j^ε и Q_{j+1}^ε превосходит $2\delta_Q\varepsilon$ и они удалены от точек $P_{j\pm 1}^\varepsilon$ и P_j^ε на большее чем $\delta_Q\varepsilon$ расстояние. Напоминаем, что в теореме 2.2 ограничение (2.25) не использовалось и даже допускалось равенство $Q_j^\varepsilon = Q_{j+1}^\varepsilon$.

Теперь введем срезающую функцию $\widehat{\chi}_j^\varepsilon$, равную единице на множестве $\widehat{\varpi}_j^\varepsilon$, но обращающуюся в нуль вне ϖ_j^ε и при $n < -3\varepsilon H_j$; более того,

$$|\nabla_x^2 \widehat{\chi}_j^\varepsilon(x)| \leq c\varepsilon^{-2}. \quad (2.26)$$

Пусть функция $\psi^0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ обращается в нуль на границе $\partial\Omega$ и тем самым аннулируется в точках $P_1^\varepsilon, \dots, P_N^\varepsilon$. В силу определения (1.1) имеем

$$|\psi^0(Q_j^\varepsilon)| \leq c_\psi \varepsilon^{1+\alpha}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.27)$$

Положим

$$\widehat{\psi}^\varepsilon(x) = \psi^0(x) - \sum_{j=1}^N \psi^0(Q_j^\varepsilon) \widehat{\chi}_j^\varepsilon(x) =: \psi^0(x) - \widetilde{\psi}^\varepsilon(x) \quad (2.28)$$

и заметим, что, во-первых, по построению функция (2.28) удовлетворяет всем условиям Соболева (1.5) и, во-вторых,

$$\begin{aligned} \|\nabla_x^2 \widetilde{\psi}^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 &\leq c \sum_{j=1}^N |\psi^0(Q_j^\varepsilon)|^2 |\text{supp} \widehat{\chi}_j^\varepsilon| \max_{x \in \text{supp} \widehat{\chi}_j^\varepsilon} |\nabla_x^2 \widehat{\chi}_j^\varepsilon(x)|^2 \\ &\leq c_\psi \varepsilon^{2(1+\alpha)} \sum_{j=1}^N \varepsilon^2 \varepsilon^{-4} = c_\psi \varepsilon^{2\alpha-1}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

При этом применены неравенства (2.26) и (2.27), а также простые факты: число N равно $1/\varepsilon$, а площадь $|\text{supp} \widehat{\chi}_j^\varepsilon|$ носителя срезки $\widehat{\chi}_j^\varepsilon$ составляет $O(\varepsilon^2)$. Итак, $H^2(\Omega)$ -норма поправочного члена в (2.28) становится бесконечно малой при $\varepsilon \rightarrow +0$ в случае $\alpha > 1/2$.

Теорема 2.3. Пусть $\alpha > 1/2$ и для точек $Q_1^\varepsilon, \dots, Q_N^\varepsilon$ на контуре (1.1) выполнены включения (2.25). Тогда слабый в $H^2(\Omega)$ предел u^0

решения $u^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$ задачи (1.12) с правой частью $f \in L^2(\Omega)$ принадлежит пространству (2.23) и удовлетворяет интегральному тождеству (2.24).

Доказательство. Подставим в формулу (1.12) пробную функцию (2.28). Слабая в $H^2(\Omega)$ сходимость (1.16) и сильная в $L^2(\Omega)$ сходимость $\widehat{\varphi}^\varepsilon \rightarrow 0$ (см. формулы (2.28) и (2.29) показывают, что при $\varepsilon \rightarrow +0$ интегральное тождество (1.12) трансформируется в (2.24) при любой функции $\psi^0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$, обращающейся в нуль на границе Γ . Замыкание по соболевской H^2 -норме линейного множества таких пробных функций совпадает с подпространством (2.23). Теорема доказана. \square

Решение $u^0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ задачи (2.24) с правой частью $f \in L^2(\Omega)$ принадлежит пространству $H^4(\Omega)$ (см., например, книгу [21]) и в силу формулы Грина с произвольной пробной функцией $\psi^0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (см. [1, § 30])

$$(\Delta_x^2 u^0, \psi^0)_\Omega = E(u^0, \psi^0; \Omega) + (N^2 u^0, \partial_n \psi^0)_\Gamma - (N^3 u^0, \psi^0)_\Gamma$$

удовлетворяет уравнению (1.9) и второму краевому условию (1.11). Подчеркнем, что первое условие (1.11) как устойчивое по терминологии [21] фигурирует в определении (2.23) пространства \mathcal{H}^0 и гарантирует, что $\partial_s^2 u^0 = 0$ на Γ , т.е. превращает естественное краевое условие $N^2 u^0 = 0$ на Γ в указанное в (1.11) (см. формулу (1.6)).

Ни одна из использованных в данном пункте конструкций пробных функций не годится при $\alpha = 1/2$, так как не позволяет по разным причинам перейти к пределу в интегральном тождестве (1.12). Слагаемое $\widehat{\psi}^\varepsilon$ из (2.28), записанное в растянутых координатах $\xi = (\varepsilon^{-1}n, \varepsilon^{-1}s)$, в некотором смысле играет роль пограничного слоя. Детальное исследование эффекта пограничного слоя будет проведено в очередной работе авторов, где будет получено и предельное краевое условие. Там же избавимся от ограничения (2.25), требующего, чтобы расстояние между любыми двумя различными точками из объединения множеств (1.2) превосходило $c_{PQ}\varepsilon$ с некоторой постоянной $c_{PQ} > 0$.

3. ДОСТУПНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ И ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ

3.1. Спектральная задача. Рассмотрим дифференциальное уравнение со спектральным параметром λ^ε

$$\Delta_x^2 u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega \setminus (\mathcal{P}^\varepsilon \cup \mathcal{Q}^\varepsilon), \quad (3.1)$$

с краевыми условиями (1.4) и с условиями Соболева (1.5). В силу неравенств (1.8) и (1.14) эта задача имеет неограниченную монотонную положительную последовательность собственных чисел

$$0 < \lambda_1^\varepsilon \leq \lambda_2^\varepsilon \leq \lambda_3^\varepsilon \leq \dots \leq \lambda_m^\varepsilon \cdots \rightarrow +\infty, \quad (3.2)$$

составленную при учете их кратностей. В самом деле, при фиксированном $\varepsilon > 0$ задача (3.1), (1.4), (1.5) допускает вариационную формулировку на паре пространств $\mathcal{H}^\varepsilon \subset L^2(\Omega)$ (ср. (1.13)). Именно, требуется найти число $\lambda^\varepsilon \in \mathbb{R}$ и функцию $u^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$, $u^\varepsilon \neq 0$, удовлетворяющие интегральному тождеству [1, 8]

$$E(u^\varepsilon, \psi^\varepsilon; \Omega) = \lambda^\varepsilon (u^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_\Omega \quad \forall \psi^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon. \quad (3.3)$$

Следовательно спектр $\{\lambda_m^\varepsilon\}_{m=1}^\infty$ задачи (3.3) дискретный, а из соответствующих собственных функций $\{u_m^\varepsilon\}_{m=1}^\infty$ можно составить ортонормированный базис в пространстве $L^2(\Omega)$.

Предложение 3.2. Для каждой $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_m]$ с некоторым $\varepsilon_m > 0$, справедливо соотношение

$$c_1 \leq \lambda_m^\varepsilon \leq C_m, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.4)$$

причем постоянные c_1 и C_m не зависят от ε .

Доказательство. При $m = 1$ получаем формулу

$$\lambda_1^\varepsilon = \frac{E(u_1^\varepsilon, u_1^\varepsilon; \Omega)}{(u_1^\varepsilon, u_1^\varepsilon)_\Omega} \geq (1 - \nu) \frac{\|\nabla_x^2 u_1^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2}{\|u_1^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2} \geq c_1 \frac{\|u_1^\varepsilon; H^1(\Omega)\|^2}{\|u_1^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2} \geq c_1,$$

в которой использованы соотношения (1.8) и (1.14), означающие, что величина $c_1 > 0$ в самом деле не зависит от ε . Таким образом, левое неравенство (3.4) установлено.

Проверим правое неравенство. Пусть $\{\lambda_m^\bullet\}_{m=1}^\infty$ – последовательность собственных чисел задачи Дирихле

$$\Delta_x^2 u^\bullet(x) = \lambda^\bullet u^\bullet(x), \quad x \in \Omega_\bullet, \quad u^\bullet(x) = 0, \quad \partial_n u^\bullet(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_\bullet,$$

для какой-то подобласти $\Omega_\bullet \subset \Omega \setminus \mathcal{V}$. Пусть еще семейство собственных функций $\{u_m^\bullet\}_{m=1}^\infty$ ортонормировано в пространстве $L^2(\Omega_\bullet)$. Для каждого m введем линейную оболочку $E_m = \mathcal{L}(\tilde{u}_1^\bullet, \dots, \tilde{u}_m^\bullet) \subset H_0^2(\Omega)$,

где \tilde{u}_r^\bullet – продолжение u_r^\bullet нулем на Ω . Теперь, применив минимаксимальный принцип, выводим оценки

$$\lambda_m^\varepsilon \leq \max_{\tilde{u} \in E_m, \tilde{u} \neq 0} \frac{E(\tilde{u}, \tilde{u}; \Omega)}{(\tilde{u}, \tilde{u})_\Omega} = \max_{\tilde{u} \in E_m, \tilde{u} \neq 0} \frac{(\Delta_x \tilde{u}, \Delta_x \tilde{u})_\Omega}{(\tilde{u}, \tilde{u})_\Omega} = \lambda_m^1,$$

и заканчиваем доказательство. Предложение 3.2 доказано в полном объеме. \square

Итак, для каждого $m = 1, 2, \dots$ находим такую бесконечно малую последовательность (ее члены обозначаем ε), что $\lambda_m^\varepsilon \rightarrow \lambda_m^0 > 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Далее пределы λ_m^0 будут идентифицированы как собственные числа спектральных задач, ассоциированных с задачей (1.9), (1.10) в случае $\alpha \in [0, 1/2)$ и с задачей (1.9), (1.11) в случае $\alpha > 1/2$. Прежде всего сформулируем эти спектральные задачи (3.5) и (3.7) соответственно.

Спектральная задача Дирихле

$$\Delta_x^2 u^0(x) = \lambda^0 u^0(x), \quad x \in \Omega, \quad u^0(x) = 0, \quad \partial_n u^0(x) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

в обобщенной постановке заключается в отыскании числа $\lambda^0 \in \mathbb{R}$ и нетривиальной функции $u^0 \in H_0^2(\Omega)$, удовлетворяющих интегральному тождеству

$$E(u^0, \psi^0; \Omega) = \lambda^0 (u^0, \psi^0)_\Omega \quad \forall \psi^0 \in H_0^2(\Omega). \quad (3.5)$$

Точно так же смешанной краевой задаче

$$\begin{aligned} \Delta_x^2 u^0(x) &= \lambda^0 u^0(x), \quad x \in \Omega, \quad u^0(x) = 0, \\ \Delta_x u^0 - (1 - \nu) \kappa(s) \partial_n u^0(x) &= 0, \quad x \in \Gamma, \quad u^0(x) = 0 \end{aligned}$$

отвечает обобщенная постановка

$$E(u^0, \psi^0; \Omega) = \lambda^0 (u^0, \psi^0)_\Omega \quad \forall \psi^0 \in \mathcal{H}^0 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \quad (3.6)$$

Соответственно монотонная положительная последовательность

$$0 < \lambda_1^0 \leq \lambda_2^0 \leq \lambda_3^0 \leq \dots \leq \lambda_m^0 \dots \rightarrow +\infty, \quad \text{as } m \rightarrow \infty, \quad (3.7)$$

предоставляет собственные числа задачи (3.5) при $\alpha \in [0, 1/2)$ и задачи (3.6) при $\alpha > 1/2$. Списки (3.7) составлены при учете кратностей собственных чисел.

Теорема 3.4. При $m = 1, 2, 3, \dots$, члены λ_m^ε и λ_m^0 последовательностей (3.2) и (3.7) связаны соотношением

$$\lambda_m^\varepsilon \rightarrow \lambda_m^0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0,$$

где λ_m^0 – собственное число задачи (3.5) при $\alpha \in [0, 1/2)$ и задачи (3.6) при $\alpha > 1/2$. Более того, из каждой бесконечно малой последовательности можно извлечь подпоследовательность, вдоль которой соответствующие собственные функции u_m^ε сходятся в $L^2(\Omega)$ к отвечающей λ_m^0 собственной функции u_m^0 , причем семейство $\{u_m^0\}_{m=1}^\infty$ образует ортонормированный базис в $L^2(\Omega)$.

Доказательство этих утверждений основано на общем результате [22, лемма 1.6, гл. III], который позволяет вывести сходимость собственных чисел и функций из аналогичных утверждений для статических задач. Для удобства читателя сформулируем используемую лемму, однако в упрощенной версии.

Лемма 3.2. Пусть \mathbf{H} – сепарабельное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot; \mathbf{H}\|$, \mathbf{A}^ε и \mathbf{A}^0 – непрерывные линейные операторы в \mathbf{H} , а \mathbf{W} – такое подпространство в \mathbf{H} , что $\text{Im } \mathbf{A}^0 = \{v = \mathbf{A}^0 u \mid u \in \mathbf{H}\} \subset \mathbf{W}$. Предположим, что выполнены следующие требования.

(i) \mathbf{A}^ε и \mathbf{A}^0 – положительные, компактные и самосопряженные операторы в \mathbf{H} , причем $\|\mathbf{A}^\varepsilon; \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}\| \leq \mathbf{c}$ и \mathbf{c} – постоянная, не зависящая от ε .

(ii) Для каждого $f \in \mathbf{W}$ имеет место сходимость

$$\|\mathbf{A}^\varepsilon f - \mathbf{A}^0 f; \mathbf{H}\| \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$.

(iii) Семейство операторов \mathbf{A}^ε равномерно компактно, т.е., из всякой последовательности $f^\varepsilon \in \mathbf{H}$, подчиненной требованию $t \sup_\varepsilon \|f^\varepsilon; \mathbf{H}\| \leq \mathbf{c}$ можно извлечь подпоследовательность $f^{\varepsilon'}$, удовлетворяющую соотношению $\|\mathbf{A}^{\varepsilon'} f^{\varepsilon'} - w^0; \mathbf{H}\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon' \rightarrow 0$ и некотором $w^0 \in \mathbf{W}$.

Пусть теперь $\{\mu_i^\varepsilon\}_{i=1}^\infty$ и $\{\mu_i^0\}_{i=1}^\infty$ – последовательности собственных чисел операторов \mathbf{A}^ε и \mathbf{A}^0 соответственно, составленные при учете кратностей, причем $\{w_i^\varepsilon\}_{i=1}^\infty$ и $\{w_i^0\}_{i=1}^\infty$ – ортонормированные в \mathbf{H} собственные векторы. Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ имеет место сходимость $\mu_k^\varepsilon \rightarrow \mu_k^0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Кроме того, из каждой бесконечно малой последовательности ε можно влечь подпоследовательность $\varepsilon' \rightarrow 0$, вдоль которой

$$\|\mathbf{A}^{\varepsilon'} w_k^{\varepsilon'} - w_k^*; \mathbf{H}\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon' \rightarrow 0,$$

где w_k^* – какой-то собственный вектор оператора \mathbf{A}^0 , отвечающий его собственному числу μ_k^0 , а множество $\{w_i^*\}_{i=1}^\infty$ – ортогональный базис в пространстве \mathbf{H} .

Доказательство теоремы 3.4. Сначала рассмотрим случай $\alpha \in [0, 1/2)$.

Гильбертово пространство $\mathbf{H} = L^2(\Omega)$ снабдим натуральным скалярным произведением Лебега и введем операторы $\mathbf{A}^\varepsilon, \mathbf{A}^0 : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ следующим образом: для $f \in \mathbf{H}$ положим $\mathbf{A}^\varepsilon f = u^\varepsilon$, где $u^\varepsilon \in \mathbf{H}^\varepsilon := \mathcal{H}^\varepsilon$ (см. определение (1.13)) – единственное решение задачи (1.12). Следовательно, собственные пары оператора \mathbf{A}^ε определены равенствами $((\lambda_k^\varepsilon)^{-1}, u_k^\varepsilon)$ по собственным парам задачи (3.3).

Точно так же в качестве $\mathbf{A}^0 f$ возьмем решение $u^0 \in H_0^2(\Omega)$ задачи (2.22). В результате в качестве собственных пар оператора \mathbf{A}^0 выступают пары $((\lambda_k^0)^{-1}, u_k^0)$, найденные по собственным парам задачи (3.5).

Наконец, определим пространство $\mathbf{W} = H_0^2(\Omega)$, содержащее образ $\text{Im } \mathbf{A}^0$.

Благодаря оценке (1.15) и слабой сходимости в пространстве $H^2(\Omega)$, упомянутой в теореме 2.2 понятно, что требования (i) и (ii) леммы 3.2 выполнены. Для того чтобы проверить свойство (iii), рассмотрим функции $f^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ с равномерно ограниченными лебеговыми нормами. Таким образом, находим подпоследовательность $\varepsilon' \rightarrow 0$ и некоторую функцию $f \in L^2(\Omega)$, для которых $f^{\varepsilon'} \rightarrow f$ слабо в $L^2(\Omega)$. Заменим f функциями $f^{\varepsilon'}$ в интегральном тождестве (1.12) и при учете неравенства (1.15) получим равномерную оценку

$$\|u^\varepsilon; H^2(\Omega)\| \leq c.$$

Теперь повторим доказательство теоремы Theorem 2.2 с целью подтвердить слабую сходимость в $H^2(\Omega)$ при $\varepsilon' \rightarrow 0$ решений $u^{\varepsilon'}$ к решению u^0 задачи (2.22). Свойство (iii) установлено, а значит, теорема 3.4 в случае $\alpha > 1/2$ обеспечена утверждением леммы 3.2.

Случай $\alpha > 1/2$ исследуется в точности так же, если положить $\mathbf{W} = \mathcal{H}^0$ и в качестве $\mathbf{A}^0 f$ выбрать решение $u^0 \in \mathcal{H}^0$ задачи (2.24), а также воспроизвести доказательство теоремы 2.3 вместо доказательства теоремы 2.2. В итоге теорема 3.4 проверена в полном объеме.

3.2. Возмущение формы границы. В п. 1 § 1 точки из множества \mathcal{P}^ε были расположены вдоль границы $\Gamma = \partial\Omega$, однако без каких-либо существенных изменений в доказательствах теорем 2.2 и 2.3 сохраняют

силу и для задачи (1.3)–(1.6) в более широкой области

$$\Omega^\varepsilon = (\Omega \setminus \mathcal{V}) \cup \{x \in \mathcal{V} : n < \varepsilon H_0(s)\}, \quad (3.8)$$

содержащей множества Ω , Γ , Υ^ε и \mathcal{P}^ε , \mathcal{Q}^ε , поскольку профильная функция H_0 предполагается положительной. Иными словами, шеренга \mathcal{P}^ε может располагаться на небольшом расстоянии от кромки пластины. Незначительные изменения нужны в том случае, если профиль $H_0(s, \varepsilon^{-1}s)$ в (3.8) зависит 1-периодически от быстрой переменной $\xi_1 = \varepsilon^{-1}s$ (рис. 6, b).

Отличие от статьи [15] (см. описание в п. 3 § 1) изломанность кромки пластины в быстром масштабе (профильная функция $\xi_1 \mapsto H_0(s, \xi_1)$ кусочно-линейная; ср. рис. 5, b) не оказывает влияния на результат предельного перехода, поскольку на краю ставятся условия Неймана (1.4), т.е. он свободен от внешних воздействий.

3.3. Явление пограничного слоя. Как упоминалось в § 2, критический случай $\alpha = 1/2$ не поддается анализу при помощи априорных оценок из теоремы 2.1: $L^2(\Gamma)$ -норма нормальной производной $\partial_n u^\varepsilon$ остается ограниченной, но не бесконечно малой, а $H^2(\Omega)$ -норма поправки $\tilde{\psi}^\varepsilon$ в (2.28) также не исчезает при $\varepsilon \rightarrow +0$ (ср. (2.17) и (2.29)). Можно предсказать, что, как и в статье [15], второе (в дополнение к $u^0 = 0$ на Γ) краевое условие получается в результате изучения пограничного слоя, который к тому же оказывается многомасштабным из-за присутствия в задаче (1.3)–(1.5) двух малых параметров, а именно, периода ε и расстояния $\varepsilon^{1+\alpha}$ между контурами Γ и Υ^ε (ср. определение в п. 4, § 3). Такие пограничные слои будут построены в очередной работе авторов.

Еще одна геометрическая ситуация, в которой пограничный слой играет существенную роль, была отвергнута в п. 4, § 2 предположением (2.25). Если отказаться от него и образовать множество \mathcal{Q}^ε из точек $Q_j^\varepsilon = \Upsilon^\varepsilon \cap v_j^\varepsilon$ пересечения перпендикуляров v_j^ε и контура Υ^ε (см. п. 1 § 1), т.е.

$$\mathcal{Q}^\varepsilon = \{Q_j^\varepsilon = (s_j^\varepsilon, n_j^\varepsilon) = (\varepsilon j, -\varepsilon^{1+\alpha} H(\varepsilon j)) : j = 1, \dots, N\}, \quad (3.9)$$

то конструкция (2.28) пробных функций в интегральном тождестве (1.12) не годятся для предельного перехода $\varepsilon \rightarrow +0$. Более того, на основе результатов из следующего пункта можно высказать гипотезу: в ситуации (3.9) при любом $\alpha > 0$ в пределе получается задача Дирихле (2.22).

3.4. Пограничный слой в одной из родственнх задач. Пусть Ω – прямоугольник $\{x : x_1 \in (-1/2, 1/2), x_2 \in (0, L)\}$, а множество \mathcal{Q}^ε состоит из точек

$$Q_j^\varepsilon = (\varepsilon j, \varepsilon^{1+\alpha} H), \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm N, \quad (3.10)$$

где теперь $H > 0$ – постоянная, $\alpha > 0$ и $\varepsilon = (1 + 2N)^{-1}$ – малый параметр с большим $N \in \mathbb{N}$. Уравнение (1.3) снабдим условиями периодичности на боковых сторонах Γ_\pm прямоугольника

$$\frac{\partial^k u^\varepsilon}{\partial x_1^k} \left(+\frac{1}{2}, x_2 \right) = \frac{\partial^k u^\varepsilon}{\partial x_1^k} \left(-\frac{1}{2}, x_2 \right), \quad x_2 \in (0, L), \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (3.11)$$

условиями Дирихле на верхнем основании Γ_L

$$u^\varepsilon(x_1, L) = 0, \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2}(x_1, L) = 0, \quad x_1 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad (3.12)$$

и следующими смешанными краевыми условиями (1.11) (или (1.20), так как кривизна равна нулю) на нижнем основании Γ_0 :

$$u^\varepsilon(x_1, 0) = 0, \quad \Delta_x u^\varepsilon(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right). \quad (3.13)$$

Здесь $\alpha > 0$, $H > 0$ и $\varepsilon = (1 + 2N)^{-1}$ – малый параметр при большом $N \in \mathbb{N}$. Вариационная задача, порожденная краевой задачей (1.3), (3.11)–(3.13) с условиями Соболева

$$u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \mathcal{Q}^\varepsilon, \quad (3.14)$$

однозначна разрешима и для ее решения верна оценка (1.15) с не зависящим от ε множителем. Очевидно, что предел (1.16) сохраняет уравнение (1.3) внутри Ω , устойчивые ($k = 0, 1$) условия периодичности (3.11), оба условия Дирихле (3.12) на Γ_L и одно (первое) условие (3.13) на Γ_0 . Объясним, почему на нижнем основании в пределе при $\varepsilon \rightarrow +0$ появляется полный набор условий Дирихле

$$u^0(x_1, 0) = 0, \quad -\frac{\partial u^0}{\partial x_2}(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right). \quad (3.15)$$

Разумеется, решение $u^0 \in H^4(\Omega)$ задачи (1.3), (3.12), (3.15), (3.11) существует и единственно.

Воспользуемся методом сращиваемых асимптотических разложений (см. монографии [23–25] и др.). Для того чтобы соблюсти второе (отсутствующее в списке (3.15)) краевое условие (3.13) требуется решить модельную задачу в полубесконечной полосе $\Pi = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) : |\xi_1| <$

$1/2, \xi_2 > 0\}$ полученную в результате растяжения координат $x \mapsto \xi = \varepsilon^{-1}x$,

$$-\Delta_\xi^2 w(\xi) = 0, \quad \xi \in \Pi, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^k w}{\partial \xi_1^k} \left(+\frac{1}{2}, \xi_2 \right) = \frac{\partial^k w}{\partial \xi_1^k} \left(-\frac{1}{2}, \xi_2 \right), \quad \xi_2 > 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (3.17)$$

$$w(\xi_1, 0) = 0, \quad \Delta_\xi w(\xi_1, 0) = 0, \quad \xi_1 \in \left(-\frac{1}{2}, 0 \right) \cup \left(0, +\frac{1}{2} \right), \quad (3.18)$$

со следующим асимптотическим условием на бесконечности:

$$w(\xi) = \frac{1}{2} \xi_2^2 \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) + O(\xi_2), \quad \xi_2 \rightarrow +\infty. \quad (3.19)$$

Задача в полуплоскости с условиями периодичности на ее боковых сторонах – обычный промежуточный объект теории осреднения (см. [26–30] для скалярных уравнений, [31–33] для системы уравнений теории упругости и др.) задач в областях с быстроосциллирующими границами (в нашем случае – множество $\Gamma_0 \cup \mathcal{Q}^\varepsilon$), а требование периодичности (3.17) назначено искусственно, а не унаследовано от аналогичного условия (3.11), которое введено в рассматриваемую задачу лишь для упрощения формулировки финальной теоремы. В правой части (3.19) появился первый ненулевой член формулы Тейлора для предельного решения

$$\begin{aligned} u^0(x) &= u^0(x_1, 0) + x_2 \frac{\partial u^0}{\partial x_2}(x_1, 0) + \frac{1}{2} x_2^2 \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \\ &+ O(x_2^3) = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \xi_2^2 \frac{\partial u^0}{\partial x_2}(x_1, 0) + O(\varepsilon^3 \xi_2^3). \end{aligned}$$

Наконец, условие Соболева (3.14) исчезли из задачи (3.16)–(3.18) потому, что ордината точек (3.10) после замены $x \mapsto \xi$ оказывается бесконечно малой $\varepsilon^\alpha H$, т.е. в масштабе ξ точки из \mathcal{Q}^ε “салятся” на ось абсцисс и учитываются первым условием из (3.18).

Для того чтобы удовлетворить проигнорированным условиям Соболева, понадобятся сверхбыстрые переменные

$$\eta = \varepsilon^{-\alpha} \xi = \varepsilon^{-1-\alpha} x. \quad (3.20)$$

В результате замены $x \mapsto \eta$ возникает задача в полуплоскости $\mathbb{R}_+^2 = \{\eta = (\eta_1, \eta_2) : \eta_2 > 0\}$

$$-\Delta_\eta^2 V(\eta) = 0, \quad \eta \in \mathbb{R}^2 \setminus Q, \quad (3.21)$$

$$V(\eta_1, 0) = 0, \quad \Delta_\eta V(\eta_1, 0) = 0, \quad \eta_1 \in \mathbb{R}, \quad (3.22)$$

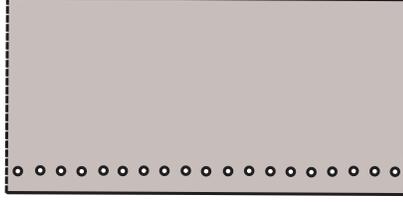


Рис. 7. Прямоугольная пластина с жестко зацементированным верхним основанием, свободно опертым нижним основанием и условиями периодичности на боковых сторонах.

с условием Соболева в точке $Q = (0, H)$

$$V(Q) = 0. \quad (3.23)$$

В следующей лемме будет указано используемое в процедуре сращивания растущее на бесконечности решение однородной задачи (3.21)–(3.23), но также для удобства читателя будет пояснена вариационная постановка неоднородной задачи

$$E(v, \psi; \mathbb{R}^2) = F(\psi) \quad \forall \psi \in \mathcal{H}_0 \quad (3.24)$$

на подпространстве (см. определение ниже)

$$\mathcal{H}_0 = \{\psi \in H_{loc}^2(\mathbb{R}_+^2) : \nabla_\eta^2 \psi \in L^2(\mathbb{R}_+^2), \psi(\eta_1, 0) = 0 \text{ при } \eta_1 \in \mathbb{R} \text{ и } \psi(Q) = 0\}. \quad (3.25)$$

Лемма 3.3. 1) При любом линейном непрерывном функционале $F \in \mathcal{H}_0^*$ на пространстве (3.25) вариационная задача (3.24) имеет единственное решение $v \in \mathcal{H}_0$, и для него верна оценка

$$\|\nabla_\eta^2 v; L^2(\mathbb{R}_+^2)\| \leq c \|F : \mathcal{H}_0^*\|.$$

2) Однородная дифференциальная задача (3.21)–(3.23) обладает решением

$$V \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^2} \setminus Q)$$

с таким поведением на бесконечности:

$$V(\eta) = \eta_2(\ln |\eta| + K_H) + O((1 + |\eta|)^{-1}), \quad |\eta| \rightarrow +\infty. \quad (3.26)$$

При этом K_H – величина, зависящая от ординаты H точки Q .

Доказательство. 1) Определим пространство \mathcal{H} как пополнение линейного множества $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ по энергетической норме

$$(E(v, v; \mathbb{R}^2) + \|v; L^2(\mathbb{B}_R)\|^2)^{1/2}; \quad (3.27)$$

радиус R круга \mathbb{B}_R можно взять бóльшим H . Известно, что линейные функции $\eta \mapsto a_0 + a_1\eta_1 + a_2\eta_2$ принадлежат пространству \mathcal{H} , полученному пополнением $C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ по норме (3.27). Поскольку билинейная форма (1.7) вырождается только на линейных функциях, но только тривиальная из них удовлетворяет введенным в (3.25) ограничениям, полунорма $E(v, v; \mathbb{R}_+^2)$ становится нормой на подпространстве (3.25). Первое утверждение леммы вытекает из теоремы Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве.

2) Пусть $\chi_H \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ – срезающая функция, равная единице при $|\eta| < 2H$ и нулю при $|\eta| > 3H$. Нетрудно усмотреть, что произведение $V_0(\eta) = \chi_H(\eta)\eta_1 \ln |\eta|$ удовлетворяет условиям (3.22) и (3.23), оставляет в бигармоническом уравнении (3.21) невязку $F_0 \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^2})$, но не принадлежит пространству (3.25) из-за более быстрого, чем линейный рост на бесконечности. Осталось компенсировать правую часть F_0 решением $\widehat{V} \in \mathcal{H}_0$ и воспользоваться теорией Кондратьева [34] для подтверждения разложения (3.26) решения $V = V_0 + \widehat{V}$ задачи (1.9)–(1.10) в угловой области $\mathbb{R}_+^2 \setminus Q$. \square

Выберем в качестве решения второй модельной задачи на проколотой полуплоскости такую функцию:

$$\begin{aligned} \varepsilon^\alpha AV(\eta) &= \varepsilon^\alpha A(\eta_2(\ln |\eta| + K_H) + O(|\eta|^{-1})) \\ &= A\xi_2(\ln |\xi| + \alpha |\ln \varepsilon| + K_H) + O(\varepsilon^{2\alpha} |\xi|^{-1}). \end{aligned} \quad (3.28)$$

здесь использованы обозначения (3.20) и (3.26), а множитель A подлежит определению. Рассматривая это разложение как внутреннее, справедливое в непосредственной близости от точки $(0, \varepsilon^\alpha H) \in \Pi$, произведем его сращивание с внешним разложением на удалении от этой точки и предпишем следующее поведение функции w :

$$w(\xi) = A\xi_2 \ln \rho + A(K_H + \alpha |\ln \varepsilon|)\xi_2 + o(\rho) \text{ при } \rho = |\xi| \rightarrow +0. \quad (3.29)$$

Поскольку выделенный в правой части (3.29) сингулярный член не попадает в класс Соболева H^2 , вопрос о существовании решения задачи (3.16)–(3.19), (3.29) опять-таки решается на основе теории Кондратьева [34] (см. также монографию [13, гл. 5 и 6] и обзорную статью [35, § 2 и § 3]). У вариационной постановки задачи (3.16)–(3.18) в энергетическом пространстве ядро одномерно и состоит из мономов $c\xi_2$. Поэтому условие существования решения с сингулярным поведением (3.29) около начала координат и (3.19) на бесконечности получается подстановкой функций w и ξ_2 в формулу Грина на области $\{\xi \in \Pi : \xi_2 < R, \rho > 1/R\}$. В силу соотношений (3.16)–(3.18) для обеих функций в формуле Грина остаются два одномерных интеграла

$$0 = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \Delta_\xi w(\xi) - \frac{\partial \xi_2}{\partial \xi_2} \Delta_\xi w(\xi) \right) \Big|_{\xi_2=R} d\xi_1 \\ - \frac{1}{R} \int_0^\pi \left(\xi_2 \frac{\partial}{\partial \rho} \Delta_\xi w(\xi) - \frac{\partial \xi_2}{\partial \rho} \Delta_\xi w(\xi) \right) \Big|_{\rho=1/R} d\varphi$$

Здесь $(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times (0, \pi)$ – система полярных координат. Вычислим пределы интегралов при $R \rightarrow +\infty$ при помощи представлений (3.19) и (3.29). В итоге приходим к формуле

$$0 = -\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) + 2\pi A \quad \Rightarrow \quad A = A(x_1) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_2^2}(x_1, 0).$$

Итак, коэффициент $A(x_1)$ вычислен и полностью определен главный член внутреннего разложения около начала координат в полуполосе Π . Кроме того, найден и главный $w(\xi)$ внешнего разложения, причем однозначно, так как слагаемое $c\xi_2$ – решение однородной задачи (3.16)–(3.18) – зафиксировано вторым (линейным) членом в представлении (3.29). Наконец, уточнено представление (3.19) на бесконечности:

$$w(\xi) = \frac{1}{2} \xi_2^2 \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_2^2}(x, 0) + (A(x_1)\alpha |\ln \varepsilon| + A_1(x_1)) \xi_2 \\ + A_0(x_1) + O(e^{-k\xi_2}), \quad k > 0. \quad (3.30)$$

Благодаря той же процедуре сращивания множитель при ξ_2 в (3.30) задает след на Γ нормальной производной поправочного члена $\varepsilon u'(x; \ln \varepsilon)$ в основном, справедливом внутри Ω , разложении решения u^ε задачи

(1.3),(3.10)–(3.14). Этот член линейно зависит от $\ln \varepsilon$, что не мешает продолжить построение асимптотики.

Обоснование асимптотического приближения к решению задачи (1.3), (3.11)–(3.13), включающего слагаемые типа пограничного слоя, проводится по стандартной схеме (см., например, монографию [36]) и будет изложено в следующей публикации авторов для более общей и сложной задачи. Закончим данную статью формулировкой простого результата о сходимости.

Теорема 3.5. Пусть $f \in L^2(\Omega)$. Тогда слабый в $H^2(\Omega)$ предел 1-периодического по переменной x_1 решения $u^\varepsilon \in H^2(\Omega)$ задачи (1.3), (3.11)–(3.13) является решением той же задачи, но с условиями (3.15) жесткого защемления нижнего основания Γ_0 прямоугольника Ω вместо условий шарнирного опирания (3.13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С. Г. Михлин, *Вариационные методы в математической физике*. М, Наука, 1970.
2. С. А. Назаров, *Асимптотическая теория тонких пластин и стержней*. — Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск, Научная книга, 2002.
3. F. Gazzola, H. C. Grunau, G. Sweers, *Polyharmonic Boundary Value Problems. Positivity Preserving and Nonlinear Higher Order Elliptic Equations in Bounded Domains*, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1991. Berlin: Springer-Verlag, 2010.
4. G. Buttazzo, S. A. Nazarov, *Optimal location of support points in the Kirchhoff plate*, in: “Variational Analysis and Aerospace Engineering: Mathematical Challenges for Aerospace Design”, Springer Optimization and Its Applications. V. 66. Berlin: Springer-Verlag, 2012. P. 93–116.
5. G. Buttazzo, G. Cardone, S. A. Nazarov, *Thin elastic plates supported over small areas*. II: Variational-Asymptotic Models, J. of Convex Analysis. 2017. V. 24, No. 3, p. 819–855.
6. М. Ш. Бирман, *О вариационном методе Треффца для уравнения $\Delta^2 u = f$* . — Докл. АН СССР, **101**, No. 2 (1955), 201–204.
7. О. М. Сапонджян, *Изгиб тонких упругих плит*. Ереван, Айастан, 1975.
8. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*. М., Наука, 1973.
9. С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, М., Наука, 1988.
10. О. М. Сапонджян, *Изгиб свободно опертой полигональной плиты*. — Изв. АН Арм. ССР, **5**, No. 2 (1952), 29–46.
11. В. Г. Мазья, С. А. Назаров, *О парадоксе Сапонджяна–Бабушки в задачах теории тонких пластин*. — Докл. АН АрмССР, **78**, No. 3 (1984), 127–130.

12. S. A. Nazarov, G. Sweers, *A hinged plate equation and iterated Dirichlet Laplace operator on domains with concave corners*. — J. Differential Equations **233**, No. 1 (2013), 151–180.
13. S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*, Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994.
14. И. Бабушка, *Устойчивость области определения по отношению к возмущению границы основных задач теории дифференциальных уравнений в частных производных, главным образом в связи с теорией упругости*. — 1. Чехослов. матем. ж., **11**, No. 1 (1961), 76–105; 2. Чехослов. матем. ж., **11**, No. 2 (1961), 165–203.
15. В. Г. Мазья, С. А. Назаров, *Парадоксы предельного перехода в решениях краевых задач при аппроксимации гладких областей многоугольными*. — Известия АН СССР. Серия матем. **50**, No. 6 (1986), 1156–1177.
16. I. Babuška, J. Pitkaranta, *The plate paradox for hard and soft simple support*. — SIAM J. Math. Anal. **21**, No. 3 (1990), 551–576.
17. С. А. Назаров, М. В. Олюшин, *Приближение гладких контуров многоугольными. Парадоксы в задачах для системы Ламе*. — Изв. РАН, Серия матем. **61**, No. 3 (1997), 159–186.
18. S. A. Nazarov, A. Stilianou, G. Sweers, *Hinged and supported plates with corners*. — Z. Angew. Math. Phys. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. **63** (2012), 929–960.
19. С. А. Назаров, Г. А. Чечкин, *Аппроксимация тонких трехмерных пластин с гладкой боковой поверхностью многогранниками*, Проблемы матем. анализ. Вып. 81. Новосибирск, 2015, 55–81.
20. J. M. Arrieta, P. D. Lamberti, *Higher order elliptic operators on variable domains. Stability results and boundary oscillations for intermediate problems*. — J. Differential Equations. **263** (2017), 4222–4266.
21. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, М., Мир, 1971.
22. О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, А. С. Шамаев, *Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред*. М., изд-во МГУ, 1990.
23. M. Van-Dyke, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. N.Y.; L.: Acad. Press. 1964 *Ван Дайк М.Д.* Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967. 310 с.
24. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции*. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974. = V. M. Babich, N. Ya. Kirpichnikova *The Boundary-Layer Method in Diffraction Problems*. Berlin: Springer-Verlag, 1979.
25. А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*. М.: Наука, 1989. 336 с.
26. E. Sánchez-Palencia, *Nonhomogeneous Media and Vibration Theory, Lecture Notes in Physics*, Vol. 127. Berlin–New York: Springer-Verlag, 1980.
27. E. Pérez, *On periodic Steklov type eigenvalue problems on half-band and the spectral homogenization problem*. — Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. **7** (2007), 859–883.
28. S. A. Nazarov, E. Pérez, *New asymptotic effects for the spectrum of problems on concentrated masses near the boundary*. — C. R. Mecanique. **337**, No. 8 (2009), 585–590.

29. S. A. Nazarov, M. E. Perez, *On multi-scale asymptotic structure of eigenfunctions in a boundary value problem with concentrated masses near the boundary*. — Revista Matemática Complutense. **31**, No. 1 (2018), 1–62.
30. S. A. Nazarov, R. Orive-Illera, M. E. Perez-Martinez, *Asymptotic structure of the spectrum in a Dirichlet-strip with double periodic perforations*. — Networks and heterogeneous media. **14**, No. 4 (2019), 733–757.
31. G. Nguetseng, E. Sanchez-Palencia, *Stress concentration for defects distributed near a surface*, in: Local Effects in the Analysis of Structures, Stud. Appl. Mech. **12**, Elsevier, Amsterdam, 1985, pp. 55–74.
32. С. А. Назаров, *Асимптотика решений и моделирование задач теории упругости в области с быстроосциллирующей границей*. — Известия РАН. Серия матем. **72**, No. 3 (2008), 103–158.
33. D. Gomez, S. A. Nazarov, E. Perez, *Homogenization of Winkler–Steklov spectral conditions in three-dimensional linear elasticity*. — Z. Angew. Math. Phys. **69**, No. 2 (35).
34. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками*. — Тр. Московск. матем. общества. **16** (1963), 219–292.
35. С. А. Назаров, *Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов*. — Успехи матем. наук. **54**, No. 5 (1999), 77–142.
36. W. G. Mazja, S. A. Nasarow, B. A. Plamenevski, *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten*. 1 & 2 Berlin: Akademie-Verlag. 1991. (Английский перевод: Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B. Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. 1 & 2. Basel: Birkhäuser Verlag, 2000).

Gomez D., Nazarov S. A., Perez M.-E. Pointwise fixation along the edge of the Kirchhoff plate.

We address the Sobolev–Neumann problem for the bi-harmonic equation describing the bending of the Kirchhoff plate with a traction-free edge but fixed at two rows of points. The first row is composed of points placed at the edge, at a distance $\varepsilon > 0$ between them, and the second one is composed of points placed along a contour at distance $O(\varepsilon^{1+\alpha})$ from the edge. We prove that, in the case $\alpha \in [0, 1/2)$, the limit passage as $\varepsilon \rightarrow +0$ leads to the plate rigidly clamped along the edge while, in the case $\alpha > 1/2$, under additional conditions, the limit boundary conditions become of the hinge support type. Based on the asymptotic analysis of the boundary layer in a similar problem, we predict that in the critical case $\alpha = 1/2$ the boundary

hinge-support conditions with friction occur in the limit. We discuss the available generalization of the results and open questions.

Departamento de Matemáticas,
Estadística y Computación,
Universidad de Cantabria, Santander, Spain
E-mail: gomezdel@unican.es

Поступило 15 сентября 2020 г.

С.-Петербургский государственный университет
Университетская набережная, 7–9
199034 С.-Петербург, Россия
E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias
de la Computación
Universidad de Cantabria, Santander, Spain
E-mail: meperez@unican.es