Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 493, 2020 г.

А. Ф. Вакуленко

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ПРОДОЛЖЕНИЯ ПОЛИНОМОВ ОТ ГАРМОНИЧЕСКИХ КВАТЕРНИОННЫХ ПОЛЕЙ

О работе. В статье [1] обсуждался принцип единственности продолжения для полиномов от гармонических на римановом многообразии M функций и его связь с задачей магнитной импедансной томографии. Сам принцип можно сформулировать так.

Пусть функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ гармоничны в Ω и $P(\tau_1, \dots, \tau_n)$ – полином. Если $p(x) := P(\varphi_1(x), \dots \varphi_n(x)) = 0$ при $x \in \omega$ в некоторой подобласти $\omega \subset \Omega$, то $p(x) = 0$ *всюду* в Ω.

Он очевидно справедлив для аналитических метрик. Если же метрика не является аналитической (хотя и класса C^∞), он может нарушаться. Отметим, что в приложениях наиболее интересен случай, когда ω это окрестность границы компактной области Ω. В [1] построены соответствующие примеры. Там же рассматривался аналогичный вопрос для гармонических кватернионных полей, но в построенном для них примере область ω не компактна. В настоящей работе мы устраняем этот пробел: приводим пример для *компактной* области, а также устанавливаем связь с обратной задачей рассеяния в духе работы [3]. Нарушение единственности продолжения для полиномов приводит к осложнениям в задаче импедансной томографии: см. [1, 2]. Отмеченная связь, как мы надеемся, поможет эти осложнения преодолеть.

Гармонические функции и поля. Напомним,что гармоническое кватернионное поле на гладком ориентированном трехмерном многообразии M это пара $\langle \varphi, v \rangle$, состоящая из вещественной функции и векторного поля, для которых выполнено

$$\operatorname{curl} v = \nabla\varphi, \quad \operatorname{div} v = 0 \qquad \text{в } M\,.$$

Ключевые слова: полином от гармонических кватернионных полей, единственность продолжения, контрпример.

Поддержано грантом РФФИ 18-01-00269 и Фондом Volks Wagen Foundation.

Здесь и далее операции векторного анализа понимаются в смысле метрики в M (см., например, [4], глава 3, раздел 3.5 и [2]). Очевидно, что φ оказывается гармонической.

- Мы рассматриваем $\mathbb{R}^3$ с конформно-плоской радиальной метрикой

$$ds^2 = \sigma^2(r)(dx^2 + dy^2 + dz^2)\,,$$

где $\sigma \equiv 1$ при $r > 1$; областью Ω считаем единичный шар. Возьмем гармоническое кватернионное поле $\langle \varphi, v \rangle$ и образуем обычный евклидов вектор из его координат (v_1, v_2, v_3), сохраняя за ним обозначение v. Тогда условие гармоничности примет вид

$$\operatorname{curl} v = \sigma(r)\nabla\varphi, \quad \operatorname{div} v = 0,$$

где векторные операции – обычные евклидовы. Возьмем два поля

$$q = \left\langle x, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} \right\rangle, \quad Q = \left\langle x^2 - y^2, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2xy \end{pmatrix} \right\rangle\;;$$

в евклидовой метрике они гармоничны и $Q = q^2$. В [1] эти поля гармонически продолжались в область с нетривиальной метрикой, где равенство для $Q = q^2$ нарушалось и, следовательно, нарушался принцип единственности для полинома $p = \tau_1 - \tau_2\tau_3$ с $\tau_1 = Q$, $\tau_2 = \tau_3 = q$.

Для нашей метрики поля выберем иначе:

$$q = \left\langle 2a(r)x, b(r)\begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} \right\rangle, \;\; Q = \left\langle A(r)(2x^2 - y^2 - y^2), B(r)\begin{pmatrix} 0 \\ -2xz \\ 2xy \end{pmatrix} \right\rangle$$

Условие соленоидальности (нулевой дивергенции) выполнено автоматически, а первые уравнения дают систему:

$$\begin{aligned} 2b + rb' &= 2\sigma(r)a, \\ -b' &= 2\sigma(r)a', \\ 3B + rB' &= 3\sigma(r)A, \\ -2B' &= 3\sigma(r)A'\,. \end{aligned}$$

Исключая b и B, получим парциальные уравнения Лапласа–Бельтрами

$$\begin{aligned} &(a + ra')\sigma(r)' + (4a' + ra'')\sigma(r) = 0, \\ &(2A + rA')\sigma(r)' + (6A' + rA'')\sigma(r) = 0\,. \end{aligned}$$

Его регулярные в $x = 0$ решения при $r > 1$ имеют вид

$$a(r) = 1 + cr^{-3}, \quad A(r) = 1 + Cr^{-5},$$

а метрику мы должны выбрать так, чтобы степенные слагаемые исчезли. У нас есть два варианта. Первый повторяет схему использованную в [1]. Положим a равным $1 + k_1\eta_1(r) + k_2\eta_2(r)$, где $\eta_1(r).\eta_2(r)$ гладкие с носителем в $(0, 1)$, k_1, k_2 – малые параметры. Из первого уравнения находим σ и с ним решаем второе уравнение для A; получим $A(r) = \mathrm{const} + \mathrm{C}(\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2)\mathrm{r}^{-5}$ при этом уравнение $C(k_1, k_2) = 0$ разрешимо по теореме о неявной функции. Последний шаг: строим два поля

$$q_1 = q + \left\langle -x, \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad q_2 = q - \left\langle x, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Условие гармоничности для q_1 принимает вид

$$\begin{aligned} 2b - 1 + rb' &= \sigma(r)[2a(r) - 1] \\ -b' &= 2\sigma(r)a'(r) \end{aligned}$$

Заменяя a на $a + 1/2$, b на $b + 1/2$, мы вернемся к исходным уравнениям. Поскольку они допускают одновременное умножение a и b на константу, можно считать, что $b + 1/2$ равно $3/2$ вне единичного шара; тогда q_1 (и автоматически q_2) принимает нужный нам вид:

$$q_1 = \left\langle x, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} \right\rangle, \quad q_2 = \left\langle x, \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

и в этой области выполнено равенство $p := Q - q_1q_2 = 0$, которое заведомо нарушается там, где метрика неевклидова).

Приложение: вариант 2. Обсудим кратко второй способ. Рассмотрим уравнение Лапласа–Бельтрами

$$\operatorname{div} n^2(r)\, \nabla\varphi = 0$$

с условием $n\big|_{r>1} \equiv 1$. Нас интересуют его решения, являющиеся аналогами однородных гармонических полиномов. При $r > 1$ эти решения имеют вид

$$Y_l\, (r^l + c_l r^{-l-1})\,,$$

где Y_l суть сферические функции. Нужно выбрать n так, чтобы для заданного (конечного) набора моментов l слагаемые с отрицательной степенью исчезали. Удобно переделать наше уравнение в уравнение Шредингера:

$$-\triangle f + qf = 0, \quad q = \frac{\triangle n}{n}$$

их решения связаны соотношением $n\varphi = f$. Нужно изучить решения соответствующих парциальных уравнений

$$-(r^2 f_l')' + l(l+1) f_l + r^2 q f_l = 0\,.$$

Заменой переменной и неизвестной функции

$$f(x) = x^{-1/2} g(\log x)$$

эти уравнения приводятся к виду

$$-g'' + Qg = -[1/4 + l(l+1)]\,g\,.$$

то есть мы получили уравнение Шредингера на всей оси. Исходные требования к решениям приобрели следующий вид: коэффициент отражения должен обращаться в нуль в предписанных точках на мнимой оси в нижней полуплоскости. Существование таких потенциалом давно известно в обратной задаче теории рассеяния.

Список литературы

1. M. I. Belishev, N. D. Filonov, S. T. Krymskiy, A. F. Vakulenko, *On uniqueness of continuation for polynomials of solutions to second-order elliptic PDE*, Applicable Analysis, 2020.
2. M. I. Belishev, A. F. Vakulenko, *On algebraic and uniqueness properties of 3d harmonic quaternion fields.* — CUBO A Mathematical J. **21**, No. 1 (2019), 1–19.
3. E. Korotyaev, *Inverse Resonance Scattering on the Half Line.* — Asymptot. Anal. **37** (1985), 215–226.
4. G. Schwarz, H*odge decomposition – a method for solving boundary value problems.* — Lect. Notes Math. **1607**, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

Vakulenko A. F. On the uniqueness of continuation for polynomials of harmonic quaternion fields.

The paper provides a counterexample to the hypothesis on the uniqueness of continuation for polynomials of harmonic quaternion fields in a compact domain with a nonanalytic metric. The constructed polynomial vanishes identically in a neighborhood of the boundary. A connection of

this construction with the problem on resonances of the Schroedinger operator on a line is noted.

Санкт-Петербургское
Отделение Математического Института
им. В.А.Стеклова РАН
E-mail: vak@pdmi.ras.ru

Поступило 3 ноября 2020 г.