Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 493, 2020 г.

**А. М. Будылин, С. Б. Левин**

# ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ТРЕХ ОДНОМЕРНЫХ КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ. СЛУЧАЙ ПАРНЫХ КУЛОНОВСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ ОТТАЛКИВАНИЯ НА БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЯХ

**Посвящается 90-му юбилею**
**Василия Михайловича Бабича**

## §1. Введение

В работе [1] впервые со времен основополагающего труда Л. Д. Фаддеева, посвященного трехмерным частицам, был достигнут успех в обобщении метода уравнений Фаддеева (варианта альтернирующего метода Шварца) на систему нескольких (трех и более) одномерных квантовых частиц с короткодействующими парными потенциалами отталкивания. Подчеркнем, что успех касался построения координатных асимптотик на бесконечности ядра резольвенты и, как следствие, собственных функций абсолютно непрерывного спектра. Стоит отметить, что впервые упомянутые асимптотики собственных функций были получены в рамках дифракционного подхода, то есть на физическом уровне строгости, в работах [2, 3] вне так называемых "экранов" и были обобщены на случай всего конфигурационного пространства в работе [4].

---

*Ключевые слова*: квантовая задача трех тел, кулоновские парные потенциалы, одномерные частицы.

Авторы благодарят Российский Научный Фонд за поддержку в рамках гранта РНФ 17-11-01003-П.

Напомним, что метод уравнений Фаддеева в случае трехмерных частиц приводит к фредгольмовости уже после четвертой итерации рассматриваемых интегральных уравнений. Итерации же соответствующих уравнений в случае одномерных частиц не ведут к фредгольмовости вследствие специфических проблем размерности. В работе [1] такая редукция (сведение к фредгольмовому уравнению) была достигнута за счет предварительного выделения некоторого оператора конечного ранга, вбирающего в себя основные сингулярности уравнений Фаддеева в случае одномерных частиц.

Случай кулоновских парных потенциалов взаимодействия для трехмерных квантовых частиц в указанном выше смысле изучался в работах Л. Д. Фаддеева, С. П. Меркурьева и многочисленных последователей. Отметим, что в работе [5] кулоновские асимптотики были принципиально получены на основе метода уравнений Фаддеева именно в рамках теории короткодействующих парных потенциалов за счет априорного решения задачи в так называемой "области ВВК". Поясним для невовлеченного читателя, что это по сути дела та область, где все три кулоновских парных потенциала относительно равновелики. Как следствие, асимптотика собственных функций в такой области может быть найдена методом градиентного уравнения. На фоне найденных таким образом ВВК-асимптотик, задача превращается в соответствующую задачу рассеяния с короткодействующими потенциалами. Если быть более точным, речь идет о редукции исходной кулоновской задачи к задаче с кулоновскими потенциалами, срезанными вне параболических окрестностей "экранов". При этом "экранами" называются области конфигурационного пространства, отвечающие слиянию одной из пар частиц. Далее мы будем использовать этот термин и термин "область ВВК" без кавычек. Нам известна определенная критика книги [5], однако, наши отсылки не коррелируют с этой критикой и эта критика не умаляет ценности тех идей, на которые мы ссылаемся.

В настоящей работе мы хотим воспользоваться описанной выше идеей уже в отношении задачи рассеяния одномерных кулоновских частиц, основываясь на результате, полученном в работе [1] для одномерных короткодействующих квантовых частиц. Как и в более ранних наших работах, мы делаем акцент на изучении самой резольвенты и координатных асимптотик ее ядра. В качестве основополагающего шага мы при помощи градиентного метода и метода характеристик построим асимптотики ядра резольвенты в ВВК-области. Именно это опять позволяет свести задачу к задаче с короткодействующими парными потенциалами и воспользоваться техникой и результатами работы [1]. Стоит добавить, что этот первый шаг построения резольвенты в области ВВК будет более строго исследован в последующих работах, где будет доказана обоснованность градиентного подхода.

## §2. Постановка задачи

В исходной постановке мы рассматриваем уравнение Шредингера системы трех одномерных квантовых частиц. Парные потенциалы взаимодействия при достаточно больших расстояниях $\rho$ между данными частицами имеют вид $\frac{\alpha}{\rho}$, где $\alpha > 0$ (и может зависеть от выбранной пары). Эта ситуация соответствует кулоновскому отталкиванию на больших расстояниях. Данное уравнение стандартным образом (введение якобиевых координат, см., например, [5]) приводит к следующему оператору Шредингера на плоскости:

$$H = -\Delta + \sum_{i=1}^{3} v_i(x_i), \quad \text{где} \quad v_i(x_i) \underset{|x_i|\gg 1}{=} \frac{\alpha_i}{|x_i|}. \tag{1}$$

Здесь $(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$ – пары координат Якоби,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Плоскость координат Якоби разобьем на четыре части. Опишем эти области и связанные с ними обозначения. На плоскости координат Якоби уравнение $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ задает прямую, которую мы называем экраном. Напомним, что $x_i$ с точностью до постоянного коэффициента имеет смысл расстояния между частицами в $i$-ой паре. Обозначим через $\Omega_i$ асимптотические области

$$|y_i|^\mu \geqslant |x_i|, \quad |y_i| \gg 1, \quad \frac{1}{2} < \mu < 1. \tag{2}$$

Отметим, что $\Omega_i$ состоит из двух компонент связности.

Определим далее асимптотическую область

$$\Omega_0 = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{3} \Omega_i.$$

Область $\Omega_0$ как раз часто и называют областью ВВК.

При помощи гладких срезающих функций каждый из парных потенциалов $v_i$ представим в виде

$$v_i = v_{i0} + \tilde{v}_i,$$

где $v_{i0} = 0$ вне $\varepsilon$-окрестности области $\mathbb{R}^2 \backslash \Omega_i$ и вне $\varepsilon$-окрестности области $\Omega_i$ равен $v_i$. При этом потенциал $\tilde{v}_i$ является короткодействующим потенциалом, поскольку при каждом фиксированном $y_i$ он является финитным по $x_i$ с контролируемой шириной.

Введем оператор

$$H_0 = -\Delta + \sum_{i=1}^{3} v_{i0}.$$

При этом

$$H = H_0 + \sum_{i=1}^{3} \tilde{v}_i.$$

Последнее равенство позволит нам воспользоваться результатами работы [1] в отношении одномерных финитных парных потенциалов, но при этом нам необходимо найти резольвенту оператора $H_0$ и ее координатные асимптотики на бесконечности. Несколько вольно мы будем называть ядро этой последней резольвенты – кулоновской функцией Грина в области ВВК.

## §3. Вычисление первой поправки фазовой функции

Рассмотрим первое приближение кулоновской функции Грина в области $\Omega_0$ в следующем виде:

$$G_c(\mathbf{z}, \mathbf{z}') \sim \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}-\mathbf{z}'| + iW_0(\mathbf{z},\mathbf{z}')}}{\sqrt{|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|}}, \quad \mathbf{z} = (x, y)^t. \tag{3}$$

Доказательство единственности данного представления, полученное на основе альтернирующего метода Шварца, будет опубликовано нами в отдельной работе. Мы будем искать $W_0$ в классе функций, удовлетворяющих условиям

$$\left|\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2}\right| = O(|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|^{-2}), \quad \left|\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2}\right| = O(|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|^{-2}), \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial W_0}{\partial x}\right)^2 = O(|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|^{-2}), \quad \left(\frac{\partial W_0}{\partial y}\right)^2 = O(|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|^{-2}).$$

Эти ограничения будут оправданы структурой полученного в данной главе результата. В качестве еще одного оправдания этого шага отметим, что всюду в асимптотической области $\Omega_0$ кулоновское взаимодействие является лишь слабым (хотя и не пренебрежимым) возмущением свободной динамики, что качественно сближает данную задачу с явно решаемой модельной задачей двухчастичного кулоновского отталкивания на плоскости. В свою очередь, решение этой модельной задачи приводит, как хорошо известно, к появлению в асимптотике собственных функций абсолютно непрерывного спектра (а также в структуре функции Грина) медленно меняющейся логарифмической фазовой функции, заведомо удовлетворяющей условиям (4).

Функция $G_c$ удовлетворяет в области $\Omega_0$ уравнению

$$(H-\lambda)G_c(\mathbf{z},\mathbf{z}')=0, \qquad \mathbf{z}\neq\mathbf{z}', \tag{5}$$

где оператор $H$ определен согласно (1) следующим образом

$$H=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\alpha_1}{|x_1|}+\frac{\alpha_2}{|x_2|}+\frac{\alpha_3}{|x_3|}.$$

Воспользумся методом градиентного уравнения и подставим предложенный в уравнении (3) анзац в уравнение (5). Согласно условиями (4):

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_c}{\partial x}&=\frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|+iW_0(\mathbf{z},\mathbf{z}')}}{\sqrt{|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|}}\\&\times\left\{i\sqrt{\lambda}\frac{x-x'}{|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|}+i\frac{\partial W_0}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{x-x'}{|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|^2}+O(|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|^{-2})\right\}.\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G_c}{\partial x^2}=G_c(\mathbf{z},\mathbf{z}')\Big\{&-\lambda\frac{(x-x')^2}{|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|^2}-2\sqrt{\lambda}\frac{x-x'}{|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|}\frac{\partial W_0}{\partial x}\\&-2i\sqrt{\lambda}\frac{(x-x')^2}{|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|^3}+i\sqrt{\lambda}\frac{1}{|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|}++O(|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|^{-2})\Big\}.\end{aligned} \tag{7}$$

Выражения $\frac{\partial G_c}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 G_c}{\partial y^2}$ симметричны, приведенным выше. Подставляя выражение (7) и симметричное ему по переменной $y$ в уравнение Шредингера (5), получим уравнение градиентного вида для фазовой функции $W_0$:

$$2\sqrt{\lambda}\frac{(x-x')}{|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|}\frac{\partial W_0}{\partial x}+2\sqrt{\lambda}\frac{(y-y')}{|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|}\frac{\partial W_0}{\partial y}$$
$$=-\frac{\alpha_1}{|x_1|}-\frac{\alpha_2}{|c_{21}x_1+s_{21}y_1|}-\frac{\alpha_3}{|c_{31}x_1+s_{31}y_1|}. \tag{8}$$

Мы воспользовались здесь преобразованием поворота, связывающим различные пары координат Якоби. Здесь $c_{ij}$ и $s_{ij}$ – коэффициенты матрицы поворота. Мы будем также всюду ниже в данном разделе опускать индекс "1" , обозначающий пару частиц с соответствующим индексом.

Будем строить решение уравнения (8) методом характеристик [6]. Умножим левую и правую часть уравнения на $\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|$ и перейдем к переменным

$$\tilde{x}=x-x', \quad \tilde{y}=y-y', \quad \tilde{\mathbf{z}}=(\tilde{x},\tilde{y})^t.$$

В новых обозначениях

$$\tilde{x}\frac{\partial\tilde{W}_0}{\partial\tilde{x}}+\tilde{y}\frac{\partial\tilde{W}_0}{\partial\tilde{y}}=-\tilde{u}, \tag{9}$$

$$\tilde{u}=\frac{\alpha_1}{2\sqrt{\lambda}}\frac{|\tilde{\mathbf{z}}|}{|\tilde{x}+x'|}+\frac{\alpha_2}{2\sqrt{\lambda}}\frac{|\tilde{\mathbf{z}}|}{|c_{21}\tilde{x}+s_{21}\tilde{y}+c_{21}x'+s_{21}y'|}$$
$$+\frac{\alpha_3}{2\sqrt{\lambda}}\frac{|\tilde{\mathbf{z}}|}{|c_{31}\tilde{x}+s_{31}\tilde{y}+c_{31}x'+s_{31}y'|}.$$

Соотношение для пучков Монжа имеет вид [6]:

$$d\tilde{x}\ :\ d\tilde{y}\ :\ d\tilde{W}_0\ =\ \tilde{x}\ :\tilde{y}\ :\tilde{u}$$

Введем параметр $s$, изменяющийся вдоль характеристической кривой. Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\tilde{x}}{ds}=\tilde{x}, \qquad \frac{d\tilde{y}}{ds}=\tilde{y}, \qquad \frac{d\tilde{W}_0}{ds}=\tilde{u}. \tag{10}$$

Первые два уравнения имеют решения

$$\tilde{x}=C_1e^s, \qquad \tilde{y}=C_2e^s. \tag{11}$$

Введем параметр

$$\rho=\frac{C_1}{C_2}=\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}.$$

Принимая во внимание, что

$$|\tilde{\mathbf{z}}| = \sqrt{1+\rho^2}|\tilde{y}|, \qquad \frac{d\tilde{y}}{ds} = \tilde{y},$$

перепишем третье уравнение в системе (10) в следующем виде

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{W}_0}{d\tilde{y}}\tilde{y} = \frac{\alpha_1}{2\sqrt{\lambda}}\frac{|\tilde{y}|\sqrt{1+\rho^2|}}{|\rho\tilde{y}+x'|} + \frac{\alpha_2}{2\sqrt{\lambda}}\frac{|\tilde{y}|\sqrt{1+\rho^2}}{|c_{21}\rho\tilde{y}+s_{21}\tilde{y}+c_{21}x'+s_{21}y'|}\\ + \frac{\alpha_3}{2\sqrt{\lambda}}\frac{|\tilde{y}|\sqrt{1+\rho^2}}{|c_{31}\rho\tilde{y}+s_{31}\tilde{y}+c_{31}x'+s_{31}y'|}.\end{aligned} \tag{12}$$

Полагая $\tilde{y} > 0$, и интегрируя по $d\tilde{y}$ на промежутке $[0, \tilde{y}]$, получаем

$$\begin{aligned}\tilde{W}_0(\tilde{y},\rho,x',y') = \frac{\alpha_1}{2\sqrt{\lambda}}\frac{\sqrt{1+\rho^2}}{\rho}\ln\left|\frac{\rho\tilde{y}+x'}{x'}\right|\\ + \frac{\alpha_2}{2\sqrt{\lambda}}\frac{\sqrt{1+\rho^2}}{c_{21}\rho+s_{21}}\ln\left|\frac{c_{21}\rho\tilde{y}+s_{21}\tilde{y}+c_{21}x'+s_{21}y'}{c_{21}x'+s_{21}y'}\right|\\ + \frac{\alpha_3}{2\sqrt{\lambda}}\frac{\sqrt{1+\rho^2}}{c_{31}\rho+s_{31}}\ln\left|\frac{c_{31}\rho\tilde{y}+s_{31}\tilde{y}+c_{31}x'+s_{31}y'}{c_{31}x'+s_{31}y'}\right|.\end{aligned} \tag{13}$$

Возвращаясь к исходным переменным

$$\begin{aligned}W_0(x,y,x',y') = \frac{\alpha_1}{2\sqrt{\lambda}}\frac{|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|}{|x-x'|}\ln\left|\frac{x}{x'}\right|\\ + \frac{\alpha_2}{2\sqrt{\lambda}}\frac{|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|}{|x_2-x_2'|}\ln\left|\frac{x_2}{x_2'}\right| + \frac{\alpha_3}{2\sqrt{\lambda}}\frac{|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|}{|x_3-x_3'|}\ln\left|\frac{x_3}{x_3'}\right|.\end{aligned} \tag{14}$$

Таким образом, функция Грина

$$R_0^{BBK}(\mathbf{z},\mathbf{z}') \equiv G_c(\mathbf{z},\mathbf{z}'), \tag{15}$$

где функция $G_c(\mathbf{z},\mathbf{z}')$ определена в (3), (14), построена.

## §4. Конструкция метода Шварца для кулоновской задачи

Заметим, что функция Грина $R_0^{BBK}$, которую мы построили, с точностью до незначительных атрибутов (мы имеем в виду логарифмическую фазовую добавку), имеет тот же вид, что и свободная резольвента. Но именно вид свободной резольвенты (ее асимптотика на бесконечности) в сочетании с альтернирующим методом Шварца позволил нам в работе [1] выделить упомянутый выше оператор конечного ранга, после чего задача сводится к Фредгольмовому случаю.

Если быть более аккуратными, мы должны рассматривать в рамках альтернирующей процедуры Шварца операторы следующего вида:

$$R_i = (-\Delta + V_{BBK} + \tilde{v}_i - \lambda)^{-1},$$

где $V_{BBK} = \sum\limits_{i=1}^{3} v_{i0}$.

Напомним кратко этапы решения задачи в короткодействующем случае. Начнем с того, что рассматривался оператор

$$H = H_0 + \sum_{i=1}^{3} v_i,$$

где $H_0 = -\Delta$, $v_i$, $i = 1, 2, 3$ – парные короткодействующие потенциалы. В работе [1] для большей наглядности парные потенциалы считались финитными, но это совершенно не является принципиальным. Мы интересовались резольвентой оператора $H$ (точнее, асимптотиками ее ядра, когда спектральный параметр садится на абсолютно непрерывный спектр). Вводилась свободная резольвента $R_0$ и операторы

$$G_i = v_i R_0. \tag{16}$$

При этом связь между резольвентами регулируется соотношением

$$R = R_0(I - \Gamma),$$

где оператор $I - \Gamma$ определен как:

$$I - \Gamma = \left( I - \sum_{i=1}^{3} G_i \right)^{-1}.$$

В наших руках были явные формулы для операторов $\Gamma_i$, определенные соотношениями

$$I - \Gamma_i = (I - G_i)^{-1}.$$

Операторы $\Gamma_i$ и $\Gamma$ часто называются операторами отражений. Напомним, что $\Gamma_i = v_i R_i$, где $R_i$ – “частичные” резольвенты

$$R_i = (H_0 + v_i - \lambda)^{-1}.$$

При этом $R_i$ строились явно методом деления переменных (с помощью свертки двух соответствующих одномерных резольвент).

В рамках альтернирующего метода Шварца (в иной интерпретации – уравнений Фаддеева) полный оператор отражения $\Gamma$ строится следующим образом:

$$\Gamma = \sum_{i,j=1}^{3} \gamma_{ij},$$

где матрица операторов $\gamma_{ij}$ определяется уравнением

$$(I+\hat{\Gamma})(\gamma_{ij}) = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_3 \end{pmatrix}$$

и

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_1 & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & 0 & \Gamma_2 \\ \Gamma_3 & \Gamma_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Процедура обращения оператора $(I+\hat{\Gamma})$ основывалась на изучении асимптотических свойств ядер итераций оператора $\hat{\Gamma}$ или, иначе говоря, произведений $\Gamma_i\Gamma_j$, где $i \neq j$, $\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k$, где $i \neq j \neq k$ и т.д.

Аналитические свойства фазовых функций ядер операторов $R_i$ позволяли с помощью метода стационарной фазы по сути свести дело к использованию идей геометрической оптики. При этом было показано, что произведение $\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k$ (на рассматриваемом пространстве функций, а именно, на области значений операторов $\Gamma_l$, $l \neq k$) имеет асимптотическое представление (для ядер)

$$\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k = A_{ijk} + B_{ijk}. \tag{17}$$

Здесь $A_{ijk}$ – оператор конечного ранга, но с медленно (как $\frac{1}{x^{1/2}}$) убывающим ядром, а $B_{ijk}$ – компактный оператор с достаточно быстро убывающим ядром.

Следствием такого представления итераций операторов $\Gamma_i$ была асимптотическая формула для резольвенты

$$R = R_0\left[I - \sum_{i=1}^{3}\Gamma_i + \sum_{i,j=1;i\neq j}^{3}\Gamma_i\Gamma_j - \sum_{i,j,k=1;i\neq j\neq k}^{3}\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k + A + B\right]. \tag{18}$$

Здесь $A$ – оператор конечного ранга с медленно убывающим ядром, а $B$ – компактный оператор с достаточно быстро убывающим ядром. Напомним, что в формуле (18) тройки $\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k$ не допускают упрощения вида (17), поскольку рассматриваются на другом пространстве функций.

Еще раз подчеркнем, что формула (17) в значительной степени была оправдана тем обстоятельством, что асимптотика ядер операторов $R_i$ имеет ту же структуру, что и асимптотика ядра оператора $R_0$

$$R_0(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}'|\lambda + i0) \sim \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'|}}{\sqrt{|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'|}}\,. \tag{19}$$

Ядро "двухчастичной" резольвенты $R_1(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}'|\lambda)$ проще всего рассматривать как свертку

$$R_1(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}'|\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C d\xi r(x, x'|\xi) r_0(y, y'|\lambda - \xi),$$

где $r$ – резольвента одномерной задачи с потенциалом $v(x)$, $r_0$ – соответствующая свободная резольвента, и $C$ – контур интегрирования вокруг положительной полуоси в стандартном отрицательном направлении, отделяющий точку $\lambda$ от положительной полуоси. В работе [1] методом перевала (или стационарной фазы, если $\lambda$ садится на вещественную ось) была построена асимптотика вида

$$R_1(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}'|\lambda + i0) = \varphi_+(x, k_0) \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{\lambda}} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'|}}{\sqrt{|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'|}} (1 + O(|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'|^{-1}))\,, \tag{20}$$

где $\varphi_+$ – собственная функция одномерной задачи с потенциалом $v(x)$. Заметим, что старший член асимптотики с точность до множителя, зависящего от переменной $x$, совпадает с асимптотикой свободной резольвенты.

Возвращаясь к задаче с кулоновскими парными потенциалами на бесконечности, мы повторим всю описанную выше схему со следующими модификациями. Оператор $H_0 = -\Delta$ заменяется на оператор

$$H_{BBK} = -\Delta + \sum_{i=1}^{3} v_{i0}.$$

При этом резольвента этого оператора $R_0^{BBK}$ имеет ядро, совпадающее с кулоновской функцией Грина в области $BBK$. Асимптотики этой функции Грина построены во втором параграфе. Заметим, что отличие этой функции $R_0^{BBK}$ от свободной резольвенты (19) заключается лишь в наличии логарифмической фазовой функции. Наличие этой фазовой функции не меняет положение стационарных точек (в старшем порядке) при итерациях.

Если быть более аккуратными, мы должны рассматривать итерации новых операторов $\Gamma_i$, построенных уже на основе модифицированного оператора $H_0$.

Опишем эти операторы более подробно. На этот раз операторы $G_i$ в формуле (16) определяются равенствами

$$G_i = \tilde{v}_i R_0^{BBK}, \tag{21}$$

где функция $R_0^{BBK}$ была определена выше, как кулоновская резольвента в области $BBK$. Операторы $\Gamma_i$ по-прежнему имеют вид $\Gamma_i = v_i R_i$, где теперь

$$R_i = (-\Delta + \sum_{j=1}^{3} v_{j0} + \tilde{v}_i - \lambda)^{-1}. \tag{22}$$

И на этот раз у нас нет точного деления переменных в операторе $H_{BBK} + \tilde{v}_i$, однако, мы можем воспользоваться методом “почти деления переменных” , развитым в работе [7]. Напомним кратко, что под этим подразумевается.

Мы выделяем в конфигурационном пространстве асимптотические области $\Omega_j$, $j = 1, 2, 3$, введённые ранее (2). Эти области являются параболическими окрестностями экранов. Внутри асимптотических областей $\Omega_j$ справедливо следующее представление для полного потенциала $V = \sum\limits_{i=1}^{3} v_i(x_i)$:

$$V = \frac{\alpha_j}{|x_j|} + \frac{\alpha_j^{eff}}{|y_j|} + O\left(\frac{|x_j|}{|y_j|^2}\right). \tag{23}$$

Здесь $\alpha_j^{eff} = \frac{\alpha_k}{|s_{kj}|} + \frac{\alpha_l}{|s_{lj}|}$, индексы $(j, k, l)$ образуют четную перестановку, коэффициенты $s_{kj}$ и $s_{lj}$ являются коэффициентами в преобразовании поворота, связывающем пары координат Якоби. При этом, как следует из уравнения (2), поправочный член $O\left(\frac{|x_j|}{|y_j|^2}\right)$ в уравнении (23) убывает быстрее кулоновского потенциала.

Таким образом, в каждой из асимптотических параболических областей $\Omega_j$, $j = 1, 2, 3$, оператор Шредингера исходной задачи допускает разделение переменных с точностью до поправки, убывающей на бесконечности быстрее кулоновского потенциала. Это обстоятельство снова дает нам возможность выписать асимптотики для ядра оператора $R_j$ при помощи свертки соответствующих одномерных резольвент в параболической окрестности экрана, в то время как вне этой параболической окрестности экрана $j$ резольвента $R_j$ совпадает с $R_0^{BBK}$.

Тем самым, для описания $R_j$ в $j$-й параболической области мы воспользуемся результатами, полученными в работе [7]. Как уже было сказано выше, в старшем порядке $R_j$ в параболической области попрежнему может быть построена при помощи свертки по спектральному параметру соответствующих одномерных резольвент

$$R_1(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}'|\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C d\xi r_c(x, x'|\xi) r_{0c}(y, y'|\lambda - \xi),$$

где $r_c$ – резольвента одномерной задачи с потенциалом $v_1(x)$, $r_0$ – соответствующая кулоновская резольвента с потенциалом $\frac{\alpha_1^{eff}}{|y|}$, и $C$ – контур интегрирования вокруг положительной полуоси в стандартном отрицательном направлении, отделяющий точку $\lambda$ от положительной полуоси.

Таким образом, фазовые функции в ядрах операторов $\Gamma_i$ для кулоновского случая отличаются от фазовой функции свободной резольвенты лишь наличием логарифмических добавок, которые по тривиальной причине не влияют на положение стационарных точек при альтернирующей итерации операторов $\Gamma_i$. В точности сохраняя аргументацию короткодействующего случая, мы получаем асимптотическое представление для произведения $\Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k$ (на области значений операторов $\Gamma_l$, $l \neq k$):

$$\Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k = A_{ijk} + B_{ijk},$$

где по-прежнему оператор $A_{ijk}$ – оператор конечного ранга, но с медленно убывающим ядром, а $B_{ijk}$ – компактный оператор с достаточно быстро убывающим ядром. При этом пространство значений оператора $A_{ijk}$ натянуто на функции вида

$$\varphi_c\left(x_i, \pm\sqrt{\lambda - p_i^2}\right) \frac{e^{ip_i y_i \pm i\eta_i \log|y_i|}}{\sqrt{|y_i|}}, \qquad \eta_i = \frac{\alpha_i^{eff}}{2p_i}. \tag{24}$$

где $\varphi_c = \tilde{v}_i(x_i)\phi(x_i, 0)$, где $\phi(x_i, k_i)$ – собственная функция одномерного оператора с потенциалом $v_i(x_i)$.

В качестве конечного результата мы готовы сформулировать следующую теорему.

**Теорема 1.** *Верна формула*

$$R = R_0^{BBK}\left[I - \sum_{i=1}^{3}\Gamma_i + \sum_{i,j=1;i\neq j}^{3}\Gamma_i\Gamma_j - \sum_{i,j,k=1;i\neq j\neq k}^{3}\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k + A + B\right], \quad (25)$$

*где* $R_0^{BBK}$ *определена формулой* (15), *оператор* $A$ *– оператор конечного ранга, действующий в пространство, натянутое на функции вида* (24), *оператор* $B$ *– компактный оператор.*

Следует подчеркнуть, что оператор $A$ – оператор живущий в параболических областях.

## Список литературы

1. И. В. Байбулов, А. М. Будылин, С. Б. Левин, *Задача рассеяния нескольких одномерных квантовых частиц. Структура и асимптотика предельных значений ядра резольвенты.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **461** (2017), 14–51.
2. В. С. Буслаев, С. П. Меркурьев, С. П. Саликов, *О дифракционном характере рассеяния в квантовой системе трех одномерных частиц.* — Проблемы матем. физики, Ленингр. университет, Ленинград **9** (1979), 14–30.
3. В. С. Буслаев, С. П. Меркурьев, С. П. Саликов, *Описание парных потенциалов, для которых рассеяние в системе трех одномерных частиц свободно от дифракционных эффектов.* — Граничные задачи математической физики и смежные вопросы в теории функций, 11. Зап. научн. сем. ЛОМИ **84** (1979), 16–22.
4. V. S. Buslaev, S. B. Levin, *Asymptotic behavior of the eigenfunctions of many-particle Schrödinger operator. I. One-dimensional particles*; in: Selected topics in mathematical physics, Amer. Math. Soc.Transl. (2) **225**, pp.55–71 (2008).
5. С. П. Меркурьев, Л. Д.Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*, М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1985.
6. Рихард Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, Москва, 1964.
7. В. С. Буслаев, С. Б. Левин, *Асимптотическое поведение собственных функций трехчастичного оператора Шредингера. II Одномерные заряженные частицы.* — Алгебра и анализ, **22**, No. 3 (2010), 60–79.

Budylin A. M., Levin S. B. The scattering problem of three one-dimensional quantum particles. The case of pair Coulomb potentials of repulsion at large distances.

In the present work the quantum scattering problem for three one-dimensional particles with pair potenrials of Coulomb repulsion at large distances is considered. The coordinate asymptotics of the resolvent kernel in the so called BBK-domain is calculated, it making possible a reduction to the already solved scattering problem with short-range potentials. On the basis of the reduction the coordinate asymptotics resolvent kernel in all configuration space is constructed, with the spectral parameter sitting on the absolutely continuous spectrum. The formulas obtained allow to strictly justify the coordinate asymptotics of the absolutely continuous spectrum wave functions received in frames of the diffraction approach.

Ст.-Петербургский Государственный Университет
Ст.Петербург, Россия

Поступило 2 ноября 2020 г.

*E-mail*: a.budylin@spbu.ru

*E-mail*: s.levin@spbu.ru