

В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский

**ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАМЕТРА МАНДЕЛЯ ДЛЯ
ОСЦИЛЛЯТОРОПОДОБНОЙ СИСТЕМЫ,
ПОРОЖДАЕМОЙ ОБОБЩЕННЫМИ ПОЛИНОМАМИ
ЧЕБЫШЕВА**

Нашему учителю
Василию Михайловичу Бабичу
с глубоким уважением

§1. ВВЕДЕНИЕ

Мы вычислим параметр Манделя Q_M для осциллятороподобной системы, порождаемой обобщенными полиномами Чебышева, введенными авторами ранее [1–3]. Настоящая работа является продолжением наших предыдущих работ [4, 5] по этой тематике.

Параметр Манделя был введен в работе [6]. Для стандартного гармонического осциллятора в пространстве Фока \mathcal{H}_F он вычисляется по формуле

$$Q_M = \frac{\langle (\Delta(n))^2 \rangle - \langle n \rangle}{\langle n \rangle}, \quad (1)$$

где $\Delta(n) = \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}$, а $n = a^+ a$ оператор числа частиц (возбуждений). Знак параметра Манделя определяет характер отклонения статистики возбуждений от пуассоновской. Для когерентных состояний $Q_M = 0$ (пуассоновская статистика), $Q_M > 0$ для обычных (классических) состояний (суперпуассоновский случай) и $Q < 0$ для неклассических состояний (субпуассоновский случай). При $Q < 0$ имеет место явление антигруппировки (antibunching) $\langle (\Delta(n))^2 \rangle < \langle n \rangle$. Физические аспекты группировки и антигруппировки фотонов в квантовой оптике см. в [7]. Подробный обзор неклассических состояний в квантовой оптике имеется в [8]. В этой работе рассмотрен большой класс неклассических состояний: когерентные и сжатые состояния, состояния с минимальной неопределенностью, интеллигентные состояния,

Ключевые слова: параметр Манделя, когерентные состояния, обобщенные многочлены Чебышева, обобщенный осциллятор Чебышева.

биномиальные состояния, деформированные когерентные состояния и др.

В работе [5] мы показали, что для когерентных состояний осцилятоподобных систем, порождаемых известными классами ортогональных многочленов, параметр Мандела может принимать как положительные так и отрицательные значения. В частности, для осцилляторов, порождаемых полиномами Шарлье [9], также как и для стандартного осциллятора (многочлены Эрмита), параметр Мандела принимает нулевое значение ($Q_M = 0$; статистика – пуассоновская). Для многочленов Лагерра и Мейкснера $Q_M < 0$ (субпуассоновская статистика). Для многочленов Чебышева и Лежандра $Q_M > 0$ (суперпуассоновская статистика). В случае полиномов Гегенбауера и Кравчука знак параметра Мандела зависит от значения собственного числа оператора уничтожения, соответствующего когерентного состояния. В случае деформированных q -полиномов Эрмита знак Q_M определяется величиной параметра деформации q . Именно, $Q_M < 0$ при $0 < q < 1$, а при $q > 1$ значение параметра Мандела положительно ($Q_M > 0$).

Отметим, что в работе [5] мы использовали когерентные состояния типа Барута - Жирарделло [10], которые определяются как собственные состояния оператора уничтожения (в случае когерентных состояний для групп – как собственные состояния понижающего оператора). Эти состояния можно также определить для обобщенных осцилляторов, связанных с классическими ортогональными многочленами и их q -аналогами, в случае, когда соответствующее гильбертово пространство бесконечномерно. Аналогичные результаты справедливы и для когерентных состояний типа Клаудера – Газо [11].

В настоящей работе мы показываем на примере обобщенного осциллятора Чебышева [1], что даже одномерное возмущение матрицы Якоби для полиномов Чебышева может изменить статистику когерентных состояний (с суперпуассоновской на субпуассоновскую). Для простейшего случая обобщенных многочленов Чебышева $Ch_n(z; 1; a)$ мы докажем, что критическое значение параметра возмущения равно $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$. При значениях $a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ статистика может стать субпуассоновской.

§2. ОБОБЩЕННЫЕ ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЕВА

Обобщенные многочлены Чебышева $Ch_n(z; k; a)$, $k \geq 1$, определяются рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} b_n Ch_{n+1}(z; k; a) + b_{n-1} Ch_{n-1}(z; k; a) &= z Ch_n(z; k; a), \quad n \geq 0, \\ Ch_0(z; k; a) = 1, \quad Ch_{-1}(z; k; a) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $b_n = 1$ при $n \neq k - 1$, а $b_{k-1} = a$. Используя выражение, полученное в [5] для многочленов, связанных с соотношением (2) (и с соответствующей матрицей Якоби), мы имеем

$$Ch_n(z; k; a) = \sum_{m=0}^{Ent(\frac{n}{2})} \frac{(-1)^m}{\sqrt{[n]!}} b_0^{2m-n} \beta_{2m-1, n-1} z^{n-m},$$

где $\beta_{-1, n-1} = 1$, $n \geq 0$, и

$$\beta_{2m-1, n-1} = \sum_{k_1=2m-1}^{n-1} [k_1]! \sum_{k_2=2m-3}^{k_1-2} [k_2]! \cdots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}-2} [k_m]!$$

для всех $m \geq 1$. Здесь $[s] = \frac{b_s^2 - 1}{b_0^2}$, а $Ent(x)$ — целая часть x .

В качестве примера приведем последние формулы в случае $k = 1$, (обозначив $Ch_n(z; 1; a) = \Psi_n(z)$):

$$\begin{aligned} \Psi_0(z) &= 1, \quad \Psi_1(z) = \frac{z}{a}, \\ \Psi_n(z) &= \frac{z^n}{a} - \frac{n + (a^2 - 2)}{a} z^{n-2} \\ &+ \sum_{m=2}^{Ent(\frac{n}{2})} (-1)^m \frac{(n - m - 1)!(n + m(a^2 - 2))}{(n - 2m)!m!a} z^{n-2m}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Матрица Якоби J_k , связанная с обобщенными многочленами Чебышева $Ch_n(z; k; a)$, имеет следующий вид: все её элементы $j_{i,j}^k$ равны нулю кроме элементов, стоящих на первой над-диагонали и на первой под-диагонали, которые равны

$$\begin{cases} j_{i, i+1}^k = j_{i+1, i}^k = 1, & i \neq k; \\ j_{k, k+1}^k = j_{k+1, k}^k = a, & i = k, \end{cases}$$

Иными словами параметр a стоит в над-диагонали и под-диагонали на k -ом месте сверху, а все остальные элементы равны 1. В качестве

примера приведем J_k при $k = 1$ и $k = 4$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad J_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 1 & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением случаев $k = 1$ и $k = 2$

§3. ОБОБЩЕННЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР ЧЕБЫШЕВА (В СЛУЧАЕ $\mathbf{k = 1}$)

Пусть $a > 0$ и $\mathcal{H}_a = L^2(\mathbb{R}; \mu_a)$ – фиксированное гильбертово пространство, а $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ система многочленов, ортонормированных относительно меры μ_a , где

$$d\mu_a(x) = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \frac{a^2 \sqrt{4-x^2}}{a^4 - (a^2-1)x^2} dx, & \text{if } |x| \leq 2, \\ 0, & \text{if } |x| > 2. \end{cases}$$

Тогда, как следует из [2] (см. также [3]), многочлены $\varphi_n(x)$ есть обобщенные многочлены Чебышева $\Psi_n(x) = Ch_n(x; 1; a)$ (для случая $k = 1$) и рекуррентные соотношения (2) принимают вид:

$$\begin{aligned} a\Psi_1(x) &= x\Psi_0(x), & \Psi_2(x) + a\Psi_0(x) &= x\Psi_1(x), \\ \Psi_{n+1}(x) + \Psi_{n-1}(x) &= x\Psi_n(x), & n &\geq 2, \\ \Psi_0(x) &= 1, & \Psi_{-1}(x) &= 0, \end{aligned}$$

Несколько первых многочленов равны:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= 1; & \Psi_3 &= \frac{x}{a} (x^2 - (a+1)); \\ \Psi_1 &= \frac{x}{a}; & \Psi_4 &= \frac{x^4 - (2+a)x^2 + a}{a}; \\ \Psi_2 &= \frac{x^2 - a}{a}; & \Psi_5 &= \frac{x}{a} (x^4 - (3+a)x^2 + (1+2a)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_6 &= \frac{x^6 - (4+a)x^4 + 3(a+1)x^2 - a}{a}; \\ \Psi_7 &= \frac{x}{a} (x^6 - (5+a)x^4 + (6+4a)x^2 - (1+3a)); \\ \Psi_8 &= \frac{x^8 - (6+a)x^6 + (10+5a)x^4 - (4+6a)x^2 + a}{a}; \\ \Psi_9 &= \frac{x}{a} (x^8 - (a+7)x^6 + (15+6a)x^4 - 10(1+a)x^2 + (1+4a)); \\ \Psi_{10} &= \frac{x^{10} - (8+a)x^8 + (21+7a)x^6 - (20+15a)x^4 + (5+10a)x^2 - a}{a}.\end{aligned}$$

В работе [12] было предложен метод построения осциллятороподобной алгебры \mathfrak{A}_Ψ соответствующей этой системе полиномов. Многочлены $\{\Psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ образуют базис Фока для этой алгебры \mathfrak{A}_Ψ в пространстве Фока \mathcal{H}_a . Генераторы $a_{\mu_a}^+$, $a_{\mu_a}^-$, N_Ψ алгебры \mathcal{A}_Ψ в этом представлении Фока действует следующим образом

$$a_{\mu_a}^+ \Psi_n = \sqrt{2}b_n \Psi_{n+1}, \quad a_{\mu_a}^- \Psi_n = \sqrt{2}b_{n-1} \Psi_{n-1}, \quad N_\Psi \Psi_n = n \Psi_n,$$

где

$$b_{-1} = 0, \quad b_0 = a, \quad b_n = 1, \quad n \geq 1.$$

Пусть I – единичный оператор в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_a . Определим $B_\Psi(N_\Psi)$ как операторозначную функцию, задаваемую равенствами

$$B_\Psi(N_\Psi)\Psi_n = b_{n-1}^2 \Psi_n, \quad B_\Psi(N_\Psi + I)\Psi_n = b_n^2 \Psi_n, \quad n \geq 0.$$

Тогда алгебра \mathfrak{A}_Ψ обобщенного осциллятора Чебышева порождается операторами a_Ψ^\pm , N_Ψ и I , удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{aligned}a_{\mu_a}^- a_{\mu_a}^+ \Psi_n &= 2B_\Psi(N_\Psi + I), \quad a_{\mu_a}^+ a_{\mu_a}^- \Psi_n = 2B_\Psi(N_\Psi), \\ [N_\Psi, a_{\mu_a}^\pm] &= \pm a_{\mu_a}^\pm,\end{aligned}$$

и коммутаторами этих операторов.

Аналогичным образом можно определить алгебру обобщенного осциллятора Чебышева \mathfrak{A}_k , соответствующую обобщенным многочленам Чебышева $Ch_n(z; k; a)$ при произвольном целом $k \geq 1$. Ясно, что $\mathfrak{A}_\Psi = \mathfrak{A}_1$.

Для алгебры \mathfrak{A}_k определим когерентные состояния типа Барута-Жирарделло стандартным образом [10] (см. также [5])

$$a_k^- |z\rangle = z|z\rangle,$$

$$|z\rangle = N^{-\frac{1}{2}}(|z|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\sqrt{2}b_{n-1})!} Ch_n(z; k; a),$$

где нормирующий множитель имеет вид

$$N(|z|^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{(2b_{n-1}^2)!}. \quad (3)$$

Для вычисления в когерентных состояниях $|z\rangle$ параметра Манделя в работе [5] была получена формула

$$Q_M(x) = x \left(\frac{N''(x)}{N'(x)} - \frac{N'(x)}{N(x)} \right), \quad (|z|^2 = x). \quad (4)$$

Используя значения коэффициентов b_n рекуррентных соотношений (2) для обобщенных многочленов Чебышева $Ch_n(z; k; a)$, $k \geq 1$, а также формулы (3) и (4), можно вычислить параметр Манделя $Q_M(x; k; a)$ для когерентных состояний алгебры \mathfrak{A}_k обобщенного осциллятора Чебышева.

Дальнейшая задача состоит в определении областей знакопостоянства параметра Манделя $Q_M(x; k; a)$ в зависимости от значений параметра возмущения a матрицы Якоби для обобщенных многочленов Чебышева.

§4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАМЕТРА МАНДЕЛЯ (В СЛУЧАЕ $\mathbf{k} = \mathbf{1}$)

Вычислим параметр Манделя $Q_M(x; 1; a)$ для когерентных состояний алгебры \mathfrak{A}_1 обобщенного осциллятора Чебышева. Начнем с вычисления нормирующего множителя N_1 . Из формулы (3) следует:

$$N_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2b_{n-1}^2)!}, \quad (5)$$

где $b_{-1} = 0$, $b_0 = a$, $b_n = 1$, $n \geq 1$. Выражение $(2b_{n-1}^2)!$ понимается как факториал по индексу, т.е. $(2b_{n-1}^2)! = (2b_0)(2b_1)\dots(2b_{n-1})$ и $(2b_{-1})! = 0! = 1$ т.к. $b_{-1} = 0$. Тогда получим

$$N_1(x) = a^{-2} \left(a^2 - 1 + \frac{2}{2-x} \right), \quad 0 < x < 2. \quad (6)$$

Ограничение $0 < x < 2$ обусловлено областью сходимости степенного ряда (5). Дифференцируя (6), находим

$$N_1'(x) = 2a^{-2}(2-x)^{-2}, \quad N_1''(x) = 4a^{-2}(2-x)^{-3}.$$

Из (4),(5) и (6) получаем искомую формулу

$$Q_M(x; 1; a) = \frac{2x}{2-x} \left(1 - \frac{1}{x + a^2(2-x)} \right), \quad 0 < x < 2. \quad (7)$$

Исследуем знак параметра Манделя при различных значениях параметра возмущения a . Заметим, что при $0 < x < 2$ множитель, стоящий перед скобкой в правой части равенства (7) положителен. Следовательно,

$$\text{sign}(Q_M(x; 1; a)) = \text{sign} \left(1 - \frac{1}{x + a^2(2-x)} \right), \quad 0 < x < 2. \quad (8)$$

Кроме того при $0 < x < 2$ положителен также знаменатель дроби стоящей в правой части равенства (8). Следовательно,

$$\text{sign}(Q_M(x; 1; a)) = \text{sign} (x(1-a^2) + 2a^2 - 1), \quad 0 < x < 2. \quad (9)$$

Покажем, что $Q_M(x; 1; a) > 0$ при $a^2 \geq \frac{1}{2}$ и любых $x \in (0; 2)$, и при $a^2 < \frac{1}{2}$, если $x > \frac{1-2a^2}{1-a^2}$. При $\frac{1}{2} \leq a^2 \leq 1$ ($0 < x < 2$) справедливость неравенства

$$x(1-a^2) > 1-2a^2. \quad (10)$$

очевидна. При $a^2 > 1$ перепишем неравенство (10) как равносильное ему неравенство

$$2a^2 - 1 > x(a^2 - 1),$$

которое эквивалентно неравенству

$$x < \frac{2a^2 - 1}{a^2 - 1} = 2 + \frac{1}{a^2 - 1}.$$

Последнее неравенство очевидным образом выполняется при $a^2 \geq 1$ и $0 < x < 2$. Следовательно, справедливость неравенства $Q_M(x; 1; a) > 0$ при $a^2 \geq \frac{1}{2}$ ($0 < x < 2$) доказана.

Если $a^2 < \frac{1}{2}$, то из неравенства (10) следует, что $Q_M(x; 1; a) > 0$, при

$$x > \frac{1-2a^2}{1-a^2}.$$

Следовательно, $Q_M(x; 1; a) < 0$ при $a^2 < \frac{1}{2}$ и

$$0 < x < \frac{1 - 2a^2}{1 - a^2}.$$

В качестве иллюстрации приведем графики $Q_M(x; 1; a)$ при $a = 0,5$ и $a = 0,65$ (графики слева на Рис. 1) и при $a = 1$ и $a = 2$ (графики справа на Рис. 1).

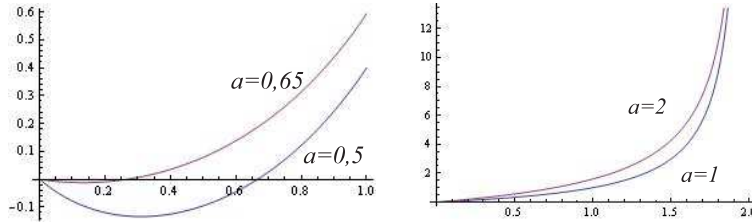


Рис. 1. Графики функции $Q_M(x; 1; a)$.

Из левого графика видно, что при $a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ чем меньше a , тем больше область с отрицательным значением параметра Манделя, а при $a > \frac{1}{\sqrt{2}}$, такая область отсутствует.

§5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАМЕТРА МАНДЕЛЯ ПРИ $k \geq 1$

Для дальнейшего рассмотрения удобно несколько преобразовать формулу (4). Начнем с рассмотрения нормирующего множителя $N_k(x; a^2)$. Согласно формуле (3) имеем

$$N_k(x; a^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2b_{n-1}^2)!} \quad k \geq 1,$$

где $x = |z|^2 > 0$, $b_{k-1} = a > 0$, $b_n = 1$ при $n \neq (k-1)$ и $b_{-1} = 0$. Условие сходимости бесконечной геометрической прогрессии приводит к ограничению $0 < x < 2$. При этом условии выражение $N_k(x; a^2)$

можно переписать в виде

$$\begin{aligned} N_k(x; a^2) &= \sum_{n=0}^{k-1} \frac{x^n}{2^n} + \frac{1}{a^2} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \\ &= \frac{1}{a^2} \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} + \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \frac{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^k}{1 - \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Обозначив $x = 2t$, $a^2 = \tau$, перепишем эту формулу в виде

$$N_k(t; \tau) = \frac{1}{\tau(1-t)} (\tau + (1-\tau)t^k), \quad (k \geq 1, 0 < t < 1, \tau > 0). \quad (11)$$

Подставляя (11) в формулу (4) для параметра Манделя (и учитывая, что $\frac{d}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}$), получаем

$$Q_k(t; \tau) = t \left(\frac{(N_k(t; \tau))''_{t^2}}{(N_k(t; \tau))'_t} - \frac{(N_k(t; \tau))'_t}{N_k(t; \tau)} \right). \quad (12)$$

Для краткости в дальнейшем мы не будем указывать зависимость от τ . Заметим, что

$$N_k(t) N'_k(t) = \frac{1}{2} (N_k^2(t))'_t,$$

и обозначим

$$q_k(t) = N''_k(t) N_k(t) - (N'_k(t))^2. \quad (13)$$

Тогда (12) можно переписать в виде

$$Q_k(t) = \frac{2t}{(N_k^2)'_t} q_k(t). \quad (14)$$

Напомним, что нас интересует знак $Q_k(t)$ при $0 < t < 1$, $\tau > 0$. Покажем, что этот знак совпадает со знаком $q_k(t)$. Для этого достаточно доказать, что $(N_k^2)'_t > 0$. Покажем, что функция $N_k(t; \tau)$ монотонно возрастает на промежутке $0 < t < 1$ при всех $\tau > 0$. Действительно, формулу (11) можно переписать в виде

$$N_k(t; \tau) = \frac{1-t^k}{1-t} + \frac{1}{\tau} \frac{t^k}{1-t} = (1+t+\dots+t^{k-1}) + \frac{1}{\tau} \frac{t^k}{1-t}. \quad (15)$$

Первое слагаемое в правой части (15) монотонно возрастает с ростом t , а во втором слагаемом при любом $\tau > 0$ числитель монотонно растёт, а знаменатель монотонно убывает с возрастанием t на интервале

(0; 1). Следовательно, функция $N_k(t; \tau)$, а значит и $N_k^2(t; \tau)$, монотонно возрастает на промежутке (0; 1) при любом $\tau > 0$. Отсюда следует, что $(N_k^2)'_t > 0$. Итак, мы показали, что

$$\text{sign}(Q_k(t; \tau)) = \text{sign}(q_k(t; \tau)), \quad 0 < t < 1, \tau > 0.$$

Таким образом, надо вычислить $q_k(t; \tau)$. Из формулы (11) имеем

$$(N_k)'_t(t) = \frac{1}{\tau(1-t)^2} (\tau + (1-\tau)(kt^{k-1} + (1-k)t^k)),$$

$$(N_k)''_t(t) = \frac{1}{\tau(1-t)^3} \times (2\tau + (1-\tau)(k(k-1) - 2k(k-2)t + (k-1)(k-2)t^2)t^{k-2}). \quad (16)$$

Тогда из (13)-(16) следует

$$q_k(t; \tau) = \frac{1}{\tau^2(1-t)^4} P_k(t; \tau), \quad (17)$$

где

$$P_k(t; \tau) = [2\tau + (1-\tau)t^{k-2} ((k-1)(k-2)t^2 - 2k(k-2)t + k(k-1))] \times (\tau + (1-\tau)t^k) - (\tau + (1-\tau)t^{k-1}(k + (1-k)t))^2. \quad (18)$$

Из (17) следует, что $\text{sign}(q_k(t; \tau)) = \text{sign}(P_k(t; \tau))$ при $0 < t < 1$, $\tau > 0$. Следовательно, задача свелась к определению знака многочлена $P_k(t; \tau)$, который удобно записать в виде

$$P_k(t; \tau) = \tau^2 + \tau(1-\tau)k(k-1)t^{k-2} - 2\tau(1-\tau)k(k-1)t^{k-1} + \tau(1-\tau)(k(k-1) + 2)t^k - (1-\tau)^2kt^{2k-2} + 2(1-\tau)^2kt^{2k-1} - (1-\tau)^2(k-1)t^{2k}.$$

Итак, для определения знака параметра Манделя $Q_M(t; \tau)$ в полосе $0 < t < 1$, $\tau > 0$ нужно найти в этой полосе корни и области знакопостоянства полинома $P_k(t; \tau)$. Мы не рассматриваем в данной работе решение этой общей задачи, но обсудим возникающие технические трудности на примере $P_2(t; \tau)$.

§6. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗНАКА ПАРАМЕТРА МАНДЕЛЯ
ПРИ $k = 2$

При $k = 2$ формула (18) принимает вид

$$P_2(t; \tau) = \tau(2 - \tau) + 4\tau(\tau - 1)t + 2(1 - \tau)(3\tau - 1)t^2 + 4(\tau - 1)^2t^3 - (\tau - 1)^2t^4.$$

Наша задача – исследовать $\text{sign}(P_2(t; \tau))$ в области $\Pi : 0 < t < 1, \tau > 0$. Разобьём область Π на три части

$$\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3,$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \{0 < t < 1, 0 < \tau \leq 1\} \\ \Pi_2 &= \{0 < t < 1, 1 < \tau \leq 2\} \\ \Pi_3 &= \{0 < t < 1, \tau > 2\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Рассмотрим сначала случай Π_2 , (в который входят и классические многочлены Чебышева 1-го и 2-го рода). Докажем, что в области Π_2 параметр Мандела положителен, т.е.

$$\text{sign}(P_2(t; \tau)) > 0 \quad 0 < t < 1, 1 < \tau \leq 2.$$

Для доказательства разобьём слагаемые в правой части равенства на следующие части:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \tau(2 - \tau) = 1 - (\tau - 1)^2; \\ \sigma_2 &= 4\tau(\tau - 1)t; \\ \sigma_3 &= 2(1 - \tau)(3\tau - 1)t^2 = -2(\tau - 1)^2t^2 + 4\tau(1 - \tau)t^2 = \sigma_{31} + \sigma_{32}; \\ \sigma_4 &= 4(\tau - 1)^2t^3 = 3(\tau - 1)^2t^3 + (\tau - 1)^2t^3 = \sigma_{41} + \sigma_{42}; \\ \sigma_5 &= -(\tau - 1)^2t^4. \end{aligned}$$

Далее докажем, что в полосе Π_2 выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (\sigma_1 + \sigma_{31} + \sigma_{41}) > 0; \\ \gamma_2 &= (\sigma_2 + \sigma_{32}) > 0; \\ \gamma_3 &= (\sigma_{42} + \sigma_5) > 0. \end{aligned}$$

Справедливость неравенств для γ_2 и γ_3 достаточно очевидна. Действительно,

$$\gamma_2 = 4\tau(\tau - 1)t(1 - t) > 0 \quad \text{и} \quad \gamma_3 = (\tau - 1)^2(1 - t)t^3 > 0,$$

так как в рассматриваемой области все сомножители положительны.

Рассмотрим теперь $\gamma_1 = \gamma_1(t; \tau)$. Имеем

$$\gamma_1(t; \tau) = 1 - (\tau - 1)^2 - 2(\tau - 1)^2 t^2 + 3(\tau - 1)^2 t^3.$$

Обозначим $\xi = \tau - 1$. Тогда $0 < \xi < 1$,

$$\gamma_1(t; \tau) = \gamma_1(t; \xi) = 1 - \xi^2(3t^3 - 2t^2 - 1) \quad (20)$$

и для доказательства положительности $\gamma_1(t; \tau)$ достаточно показать, что функция $\psi(t) = 3t^3 - 2t^2 - 1$ удовлетворяет неравенству $\psi(t) \leq 1$ на промежутке $0 < t < 1$. Последнее неравенство выполняется, так как простой анализ на экстремум показывает, что на самом деле на этом промежутке справедливо даже более сильное неравенство $\psi(t) \leq 0$.

Итак мы доказали, что в области Π_2 параметр Мандела положителен.

К сожалению в областях Π_1 и Π_3 ситуация обстоит значительно сложнее — границы участков, в которых параметр Мандела знакопостоянен, можно установить для конкретных значений параметра a только приближенно, привлекая численные методы. Приводимые ниже таблицы позволяют установить характер расположения областей знакопостоянства параметра Мандела. В этих таблицах мы возвращаемся к исходным переменным x и a в которых параметр Мандела при $k = 2$ имеет вид

$$Q_M(x; 2; a) = \frac{x(a^4(x-2)^4 + x^2(8-8x+x^2) - 2a^2(16-16x+16x^2-8x^3+x^4))}{(x-2)(a^2(x-2)^2 - (x-4)x)(a^2(x^2-4) - x^2)}.$$

Для области Π_3 при $a > \sqrt{2}$ имеем

a	$Q_M > 0$	$Q_M < 0$	$Q_M(x_{min})$
1,5	$x > 0,108$	$x \in (0; 0,107)$	$Q^{min}(0,054) = -0,0015$
2,0	$x > 0,47$	$x \in (0; 0,46)$	$Q^{min}(0,247) = -0,0325$
2,5	$x > 0,66$	$x \in (0; 0,65)$	$Q^{min}(0,363) = -0,0666$
3,0	$x > 0,79$	$x \in (0; 0,78)$	$Q^{min}(0,450) = -0,0961$
4,0	$x > 0,97$	$x \in (0; 0,96)$	$Q^{min}(0,581) = -0,1419$
5,0	$x > 1,09$	$x \in (0; 1,08)$	$Q^{min}(0,678) = -0,1755$
6,0	$x > 1,18$	$x \in (0; 1,17)$	$Q^{min}(0,755) = -0,2015$
7,0	$x > 1,25$	$x \in (0; 1,24)$	$Q^{min}(0,818) = -0,2222$
8,0	$x > 1,31$	$x \in (0; 1,30)$	$Q^{min}(0,871) = -0,2392$
9,0	$x > 1,36$	$x \in (0; 1,35)$	$Q^{min}(0,918) = -0,2534$
10	$x > 1,39$	$x \in (0; 1,38)$	$Q^{min}(0,958) = -0,2656$
20	$x > 1,60$	$x \in (0; 1,59)$	$Q^{min}(1,2005) = -0,3331$
100	$x > 1,86$	$x \in (0; 1,85)$	$Q^{min}(1,5989) = -0,4255$

Из результатов, приведенных в этой таблице следует, что при увеличении параметра a интервал, в котором Q_M отрицательно увеличивается, минимальное значение Q^{min} сдвигается к правому концу интервала $(0; 2)$ а абсолютная величина $|Q^{min}|$ возрастает.

В полосе $\Pi_2 : 0 < a < 1$ ситуация, как видно из следующей таблицы, несколько отличается.

a	$Q_M > 0$	$Q_M < 0$	$Q_M(x_{min})$
0,01	$x \in (0; 0,020)$ $x \in (1,18; 2)$	$x \in (0,021; 1,17)$	$Q^{min}(0,168) = -0,925$
0,1	$x \in (0; 0,20)$ $x \in (1,15; 2)$	$x \in (0,21; 1,14)$	$Q^{min}(0,575) = -0,563$
0,2	$x \in (0; 0,43)$ $x \in (1,07; 2)$	$x \in (0,44; 1,106)$	$Q^{min}(0,742) = -0,223$
0,25	$x \in (0; 0,61)$ $x \in (0,97; 2)$	$x \in (0,62; 0,96)$	$Q^{min}(0,787) = -0,066$
0,3	$x \in (0; 2)$	—	$Q^{min}(0,812) = 0,080$

С ростом a интервал, в котором Q_M отрицателен и абсолютная величина $|Q^{min}|$ уменьшаются. При $0,3 \leq a < 1$ параметр Мандела положителен.

Благодарности. Авторы признательны И. К. Лицкевич за содействие при выполнении некоторых вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *Локальное возмущение дискретного уравнения Шредингера и обобщенный осциллятор Чебышёва*. — ТМФ **200**, No. 3 (2019), 494–506.
2. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, *Generalized Chebyshev polynomials connected with a point interaction for the discrete Schrödinger equation*, Proc. of the International Conference DAYS on DIFFRACTION'2018, 2018.
3. D. R. Yafaev, *A point interaction for the discrete Schrödinger operator and generalized Chebyshev polynomials*. — J. Math. Phys. **58**, 063511 (2017).
4. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, *Coherent states and uncertainty relations for generalized oscillators connected with the given families of orthogonal polynomials*, с. 40–49 Proceedings of the International Conference “Days on Diffraction-2005,” IEEE, 2005.
5. В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *Вычисление параметра Мандела для обобщенных когерентных состояний деформированных осцилляторов, связанных с ортогональными полиномами*. Препринт ПОМИ РАН No. 21 (2005).
6. L. Mandel, *Sub-Poissonian photon statistics in resonance fluorescence*. — Optics Letters **4**, No. 7 (1979), 205–207.
7. M. C. Teich, B. E. A. Saleh, *Photon Bunching and Antibunching*, pp. 2-104 in book: PROGRESS IN OPTICS XXVI Chapter 1, North Holland 1988.
8. V. V. Dodonov, *“Nonclassical” states in quantum optics: a “squeezed” review of the first 75 years*. — J. Opt. B. **4**, No. 1 (2002), R1–R33.
9. В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *Полиномы Шарлье и осциллятор Шарлье как дискретная реализация гармонического осциллятора*. — Пробл. матем. анализа **30** (2005), 3–15.
10. A. O. Barut, L. Girardello, *New “Coherent States” Associated with Non-Compact Groups*. — Commun. Math. Phys. **21**, No. 1 (1972), 41–55.
11. J-P. Gazeau, J. R. Klauder, *Coherent states for systems with discrete and continuous spectrum*. — J. Phys. A. **32**, No. 1 (1999), 123–132.
12. V. V. Borzov, *Orthogonal polynomials and generalized oscillator algebras*. — Integral Transforms and Special Functions **12** (2001), 115–138.

Borzov V. V., Damaskinskiy E. V. Calculating the Mandel parameter for an oscillator-like system generated by generalized Chebyshev polynomials.

In this paper, we calculate the Mandel parameter Q_M for an oscillator-like system generated by generalized Chebyshev polynomials [1–3]. The

sign of the Mandel parameter Q_M characterizes the deviation of the excitation statistics from the Poisson one. This work is a continuation of our works [4, 5].

С.-Петербургский государственный
университет телекоммуникаций,
кафедра математики
С.-Петербург, Россия
E-mail: `borzov.vadim@yandex.ru`

Поступило 2 ноября 2020 г.

Военный институт (инженерно технический),
кафедра математики
Захарьевская 22, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `evd@pdmi.ras.ru`