Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 493, 2020 г.

М. И. Белишев, Т. Ш. Хабибуллин

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ДАННЫХ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С МАТРИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

**Посвящается юбилею
Василия Михайловича Бабича**

§1. Введение

О работе. Главной целью работы является характеризация данных динамической обратной задачи для одномерного векторного волнового уравнения на полуоси с несамосопряженным матричным потенциалом. Характеризация состоит в описании необходимых и достаточных условий, обеспечивающих разрешимость обратной задачи.

Сама обратная задача, состоящая в восстановлении матричного потенциала по динамическим данным (оператору реакции), давно решена: см. [1, 2, 11]. Это одна из первых задач, решенных BC-методом. Вопрос закрыт, если речь идет лишь о процедуре, определяющей потенциал по данным. Однако, в понимании специалистов, обратная задача *вполне решена*, если в дополнение к процедуре приведена характеризация данных. В случае самосопряженного потенциала такие условия известны и фактически сводятся к положительной определенности т.н. связывающего оператора (СО) динамической системы с граничным управлением, эволюция которой определяется оператором Штурма–Лиувилля с данным потенциалом [8, 10, 12]. Высказывалась гипотеза, что в несамосопряженном случае разрешимость обеспечивается изоморфностью адекватного несамосопряженного аналога СО и, более того, соответствующий результат был анонсирован в [1]. Однако,

---

Ключевые слова: одномерное волновое уравнение с матричным потенциалом, достижимые множества, управляемость, распространение разрывов, характеризация данных обратной задачи.

Поддержано грантами РФФИ 18-01-00269 и 20-01-00627 и Фондом Volks Wagen Foundation.

Поддержано грантом No. 075-15-2019-1620 (по соглашению между МОН и ПОМИ РАН от 8 ноября 2019 г.)

доказательство так и не было представлено и, более того, появились сомнения в его правильности. В частности, было неясно, почему процедура, решающая обратную задачу, приводит к *локальному* потенциалу, не содержащему нелокальных вольтерровых добавок. Гарантирует ли одна изоморфность СО отсутствие таких добавок? Быстро решить его не удалось и главная цель работы – ликвидировать этот пробел в теории одномерных динамических обратных задач.

Постановки и результаты. Все пространства, классы функций и матрицы в работе вещественны. Используются обозначения $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ и $\Omega^T := [0, T] \subset \mathbb{R}_+$.

- Прямая задача это начально-краевая задача вида

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + Vu = 0, & x > 0,\ 0 < t < T \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, & x \geqslant 0 \\ u|_{x=0} = f, & 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{1}$$

где $V \in C^1_{\rm loc}(\mathbb{R}_+; \mathbb{M}^N)$ есть матрично-значная функция (*потенциал*), заданная на полуоси $x \geqslant 0$, $T > 0$ – финальный момент времени, $f \in L_2(([0, T]; \mathbb{R}^N)$ – *граничное управление*; $u = u^f(x, t)$ есть решение (*волна*) – $\mathbb{R}^N$-значная функция от x и t. В силу гиперболичности задачи (1), при всех t выполнено $\operatorname{supp} u^f(\cdot, t) \subset \Omega^t$.

Пусть $\mathscr{F}^T := L_2([0, T]; \mathbb{R}^N)$ есть пространство граничных управлений; волны $u^f(\cdot, t)$ суть зависящие от времени элементы пространства $\mathscr{H}^T := L_2(\Omega^T; \mathbb{R}^N)$. Задаче (1), как динамической системе, сопоставляются *оператор реакции* $R^T : \mathscr{F}^T \to \mathscr{F}^T$ и *оператор управления* $W^T : \mathscr{F}^T \to \mathscr{H}^T$, действующие по правилу

$$(R^T f)(t) := u^f_x(0, t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \qquad (W^T f)(x) := u^f(x, T), \quad x \in \Omega^T.$$

В силу гиперболичности задачи (1), ее расширение вида

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + V\,u = 0, & 0 < x < T,\ 0 < t < 2T - x \\ u|_{t<x} = 0 & \\ u|_{x=0} = f, & 0 \leqslant t \leqslant 2T \end{cases} \tag{2}$$

является корректной начально-краевой задачей, которой сопоставляется *расширенный оператор реакции*

$$(R^{2T} f)(t) := u^f_x(0, t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2T$$

действующий в пространстве $\mathscr{F}^{2T}$. Как и все атрибуты динамической системы (1), оператор R^{2T} определяется потенциалом $V|_{\Omega^T}$ (не зависит от значений $V|_{x>T}$).

• Задачей, двойственной к (1), мы называем задачу

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + V_\flat u = 0, & x > 0, \ 0 < t < T \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, & x \geqslant 0 \\ u|_{x=0} = f, & 0 \leqslant t \leqslant T \end{cases} \tag{3}$$

с потенциалом $V_\flat(x) := (V(x))^\flat$, где $(\dots)^\flat : \mathbb{M}^N \to \mathbb{M}^N$ – матричное транспонирование. Ее решение $u = u_\flat^f(x,t)$ обладает свойствами, вполне аналогичными свойствам u^f; отвечающие ей операторы суть

$$(R_\flat^T f)(t) := u^f_{\flat\,x}(0,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \quad (W_\flat^T f)(x) := u_\flat^f(x,T), \quad x \in \Omega\cdot$$

Операторы R^T и $R_\flat^T$ связаны простым соотношением и каждый из них определяет другой [1].

Оператор $C^T : \mathscr{F}^T \to \mathscr{F}^T$,

$$C^T := (W_\flat^T)^* W^T$$

называется *связывающим*. Он выражается через оператор R^{2T}, отвечающий системе (1) с удвоенным финальным моментом времени, явным и простым соотношением, установленным в [1] и приводимым ниже в работе.

• Обратная задача состоит в восстановлении потенциала $V|_{\Omega^T}$ по заданному оператору R^{2T}. Такая *локальная* постановка восходит к работам А. С. Благовещенского [10, 11]; она учитывает гиперболичность задачи (1). Ниже эта постановка будет уточнена.

Главный результат работы состоит в следующем. Наряду с задачами (1) и (3) рассматривается семейство "укороченных" задач с финальными моментами $t = \xi \leqslant T$, каждой из которых отвечает свой связывающий оператор C^ξ, действующий в соответствующем пространстве $\mathscr{F}^\xi$. Все C^ξ определяются одним лишь оператором R^{2T}. Мы показываем, что для того, чтобы заданный оператор R^{2T} был оператором реакции системы (1), необходимо и достаточно, чтобы *все* операторы C^ξ были изоморфизмами.

Необходимое условие, состоящее в изоморфности оператора C^T известно: оно установлено в [1] в ходе рассмотрения прямой задачи. В той же работе анонсирована достаточность (Теорема 3.2), но ясности с доказательством до настоящего момента не было. Данная работа устраняет этот пробел. В то же время, исправляется допущенная в [1] ошибка: утверждение о том, что для разрешимости обратной задачи достаточно изоморфности *одного лишь* оператора C^T, оказалось неверным.

Наш результат весьма близок к полученному А. С. Благовещенским в работе [11]. Новизна в том, что, во-первых, рассматривается граничное управление Дирихле, не входящее в класс управлений из [11] и, во-вторых, решение обратной задачи и характеризация данных даются в рамках техники BC-метода [3–5, 7–9].

§2. Прямая задача

Свойства волн. Приведем известные свойства решений задачи (1). Они либо сформулированы и доказаны, либо легко извлекаются из рассмотрений в [8, 12]. Для дальнейшего удобно принять

Соглашение 1. *Все зависящие от времени t функции считаются продолженными нулем на полуось $t < 0$.*

- Введем линеал гладких управлений

$$\mathscr{M}^T := \{f \in C^2([0,T];\mathbb{R}^N) \,|\, \operatorname{supp} f \subset (0,T]\}.$$

Отметим, что все его элементы аннулируются вблизи $t = 0$.

При $f \in \mathscr{M}^T$ задача (1) имеет единственное классическое решение u^f. Для него справедливо представление

$$u^f(x,t) = f(t-x) + \int\limits_x^t w(x,s) f(t-s)\, ds, \qquad x \in \Omega^T,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

в котором ядро w есть решение матричной задачи Гурса

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} + Vw = 0, & 0 < x < t < T \\ w(0,t) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant T \\ w(x,x) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^x V(s)ds, & 0 \leqslant x \leqslant T, \end{cases} \tag{5}$$

причем w дважды непрерывно дифференцируемо в области $\{(x,t)\,|\,x \in \Omega^T,\ 0 \leqslant x \leqslant t \leqslant T\}$.

При $f \in \mathscr{F}^T := L_2([0,T];\mathbb{R}^N)$ правая часть в (4) сохраняет смысл и по определению считается (обобщенным) решением задачи (1) класса

$C([0,T];L_2(\Omega^T))$. В дальнейшем мы используем следующие известные факты.

1. Для решения выполнено соотношение

$$\operatorname{supp} u^f(\,\cdot\,,t) \subset \Omega^t, \qquad t \geqslant 0, \tag{6}$$

которое показывает, что волны распространяются по полуоси $x \geqslant 0$ со скоростью 1.

2. Для управлений $f_\tau(t) := f(t-\tau)$ с задержкой $\tau > 0$ выполнено

$$u^{f_\tau}(\cdot,t) = u^f(\cdot,t-\tau), \qquad t \geqslant 0 \tag{7}$$

(напомним о Соглашении 1!); как следствие, для гладких управлений справедливы соотношения

$$u^f_t = u^{\frac{df}{dt}}, \quad u^f_{tt} = u^{\frac{d^2f}{dt^2}} \overset{\text{см. (4)}}{=} u^f_{xx} - Vu^f\,. \tag{8}$$

3. Как видно из непрерывности интеграла в (4), выполнено следующее. Если управление f кусочно-непрерывно и имеет разрыв первого рода в точке $t = T - \xi$ $(0 < \xi \leqslant T)$, то волна $u^f(\cdot,t)$ также кусочно-непрерывна и имеет разрыв в точке $x = \xi$, причем имеет место равенство

$$u^f(x,T)\Big|_{x=\xi-0}^{x=\xi+0} = -f(t)\Big|_{t=T-\xi-0}^{t=T-\xi+0} \tag{9}$$

в $\mathbb{R}^N$. Оно означает, что разрыв волны, инициированный разрывом управления, распространяется вдоль полуоси $x \geqslant 0$ с единичной скоростью, причем амплитуда разрыва остается постоянной.

4. Все приведенные выше свойства и соотношения сохраняют силу для решения $u^f_\flat$ двойственной задачи (3) и решения u^f расширенной задачи (2).

Динамическая система. Рассматривая задачу (1) как динамическую систему, снабдим ее стандартными атрибутами теории систем – пространствами и операторами. Систему обозначим символом α^T.

• Пространство управлений $\mathscr{F}^T = L_2((0,T),\mathbb{R}^N)$ со скалярным произведением

$$(f,g)_{\mathscr{F}^T} \;=\; \int_0^T \langle f(t),g(t)\rangle\,dt\,,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$, называется *внешним пространством* системы α^T. Оно содержит семейство расширяющихся подпространств

$$\mathscr{F}^{T,\xi}:=\{f\in\mathscr{F}^T\mid\operatorname{supp}f\subset[T-\xi,T]\},\qquad 0\leqslant\xi\leqslant T$$

($\mathscr{F}^{T,0}=\{0\}$, $\mathscr{F}^{T,T}=\mathscr{F}^T$), образованных запаздывающими управлениями: $T-\xi$ есть задержка, ξ – время действия управления.

Пространство $\mathscr{H}^T:=L_2(\Omega^T,\mathbb{R}^N)$ со скалярным произведением

$$(u,v)_{\mathscr{H}^T}:=\int\limits_{\Omega^T}\langle u(x),v(x)\rangle\,dx$$

называется *внутренним*, волны $u^f(\cdot,t)$ являются его элементами. Оно содержит семейство расширяющихся подпространств

$$\mathscr{H}^\xi:=\{y\in\mathscr{H}^T\mid\operatorname{supp}y\subset\Omega^\xi\},\qquad 0\leqslant\xi\leqslant T$$

($\mathscr{H}^0=\{0\}$). В силу конечности скорости распространения волн имеем $\operatorname{supp}u^f(\cdot,\xi)\subset\Omega^\xi$, что равносильно $u^f(\cdot,\xi)\in\mathscr{H}^\xi$.

• Оператор $W^T:\ \mathscr{F}^T\to\mathscr{H}^T$, действующий по правилу:

$$(W^Tf)(x):=u^f(x,T),\qquad x\in\Omega^T$$

называется *оператором управления*. Согласно (4) имеем представление:

$$(W^Tf)(x)=f(T-x)+\int\limits_x^T w(x,s)f(T-s)ds,\qquad x\in\Omega^T\,. \tag{10}$$

Оператор управления является изоморфизмом. В самом деле, уравнение $W^Tf=y$ есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода, корректно разрешимое относительно $f\in\mathscr{F}^T$ при любом $y\in\mathscr{H}^T$. Кроме того, из (4) легко следует:

$$W^T\mathscr{F}^{T,\xi}\,=\,\mathscr{H}^\xi\,,\qquad 0\leqslant\xi\leqslant T\,. \tag{11}$$

Второе равенство в (8) можно записать в виде:

$$W^T\,\frac{d^2}{dt^2}\,=\,-LW^T\,, \tag{12}$$

где $L=-\frac{d^2}{dx^2}+V$ - оператор Штурма–Лиувилля, определяющий эволюцию системы α^T.

• Оператор $R^T : \mathscr{F}^T \to \mathscr{F}^T$, $\operatorname{Dom} R^T = \{f \in \mathscr{F}^T \mid f' \in \mathscr{F}^T,\ f(0) = 0\}$,

$$(R^T f)(t) := u_x^f(0,t)\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

называется *оператором реакции* системы α^T. Дифференцирование в (4) ведет к представлению

$$(R^T f)(t) = -f'(t) + \int\limits_0^t r(t-s)f(s)ds\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где $r(s) := w_x(0, t-s)$ – непрерывно-дифференцируемая матричнозначная функция, которая называется функцией отклика.

Также системе α^T сопоставляется оператор реакции $R^{2T} : \mathscr{F}^{2T} \to \mathscr{F}^{2T}$, $\operatorname{Dom} R^{2T} = \{f \in \mathscr{F}^{2T} \mid f' \in \mathscr{F}^{2T},\ f(0) = 0\}$,

$$(R^{2T} f)(t) := u_x^f(0,t)\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2T,$$

расширенной задачи (2). Для него справедливо представление

$$(R^{2T} f)(t) = -f'(t) + \int\limits_0^t r(t-s)f(s)ds\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2T, \tag{13}$$

с матрицей-функцией отклика r, заданной и непрерывно дифференцируемой при $0 \leqslant t \leqslant 2T$. Вместе с решением u^f расширенной задачи, оператор R^{2T} и функция отклика $r|_{0\leqslant t\leqslant 2T}$ вполне определяются значениями потенциала $V|_{\Omega^T}$.

• Задача (3) описывает динамическую систему, которую назовем двойственной к системе α^T и обозначим $\alpha^T_\flat$. Они вполне равноправны и двойственная система обладает теми же атрибутами и свойствами, что и исходная. Внешнее и внутреннее пространства у систем общие, системе $\alpha^T_\flat$ отвечают операторы $W^T_\flat$, $R^T_\flat$ и $R^{2T}_\flat$, для которых справедливы все приведенные выше для α^T факты и представления. В частности, система $\alpha^T_\flat$ имеет функцию отклика $r_\flat$, определяющую расширенный оператора реакции $R^{2T}_\flat$. Как показано в [1], имеет место равенство

$$r_\flat(t) = (r(t))^\flat\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2T,$$

Отметим также, что оператор управления $W^T_\flat : \mathscr{F}^T \to \mathscr{H}^T$ изоморфно отображает $\mathscr{F}^T$ на $\mathscr{H}^T$ и выполнено

$$W^T_\flat \mathscr{F}^{T,\xi} = \mathscr{H}^\xi\,, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant T\,. \tag{14}$$

Как следствие, сопряженный к нему оператор $(W_\flat^T)^* : \mathscr{H}^T \to \mathscr{F}^T$ также является изоморфизмом.

• Оператор $C^T : \mathscr{F}^T \to \mathscr{F}^T$,

$$C^T := (W_\flat^T)^* W^T \tag{15}$$

называется *связывающим.* Из определения имеем соотношения:

$$(C^T f, g)_{\mathscr{F}^T} = (W^T f, W_\flat^T g)_{\mathscr{H}^T} = (u^f(\cdot, T), u_\flat^g(\cdot, T))_{\mathscr{H}^T}\,,$$

которые показывают, что оператор C^T связывает метрики пространств $\mathscr{F}^T$ и $\mathscr{H}^T$. Как композиция двух изоморфизмов, он является изоморфизмом пространства управлений $\mathscr{F}^T$.

Ключевым фактом BC-метода как подхода к обратным задачам является простое и явное соотношение, выражающее связывающий оператор через оператор реакции. Как показано в [1], справедливо представление

$$(C^T f)(t) = f(t) + \int\limits_0^T C^T(t,s) f(s)\, ds\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{16}$$

с матричным ядром

$$C^T(t,s) = \frac{1}{2} \int\limits_{|t-s|}^{2T-t-s} r(\eta)\, d\eta\,.$$

Таким образом, связывающий оператор определяется функцией отклика $r|_{0\leqslant t\leqslant 2T}$.

Двойственная система $\alpha_\flat^T$ имеет связывающий оператор

$$C_\flat^T := (W^T)^* W_\flat^T = (C^T)^*,$$

для которого справедливо представление (16) с заменой ядра $C^T(t,s)$ на $C_\flat^T(t,s) = [C^T(t,s)]^\flat$.

Семейство систем. Рассмотрим семейство "укороченных" задач

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + Vu = 0, & x > 0,\ 0 < t < \xi \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, & x \geqslant 0 \\ u|_{x=0} = f, & 0 \leqslant t \leqslant \xi \end{cases}$$

с параметром $0 < \xi \leqslant T$. Соответствующие динамические системы α^ξ снабжены своими пространствами $\mathscr{F}^\xi$ и $\mathscr{H}^\xi$ и операторами W^ξ, R^ξ,

$R^{2\xi}$, C^{ξ}. При этом все C^{ξ} суть изоморфизмы пространств $\mathscr{F}^{\xi}$ для них справедливо представление (16), принимающее вид

$$(C^{\xi}f)(t) = f(t) + \int_0^{\xi} C^{\xi}(t,s)f(s)\,ds \quad 0 \leqslant t \leqslant \xi \tag{17}$$

с матричным ядром

$$C^{\xi}(t,s) = \frac{1}{2}\int_{|t-s|}^{2\xi-t-s} r(\eta)\,d\eta\,.$$

Все сказанное верно и для двойственных систем $\alpha^{\xi}_{\flat}$.

• Установим, как операторы C^{ξ} связаны с оператором C^{T}; эта связь используется при решении обратной задачи. Напомним о действии Соглашения 1. Введем вспомогательный оператор

$$e^{T,\xi} : \mathscr{F}^{\xi} \to \mathscr{F}^{T}, \quad (e^{T,\xi}f)(t) := f(t-(T-\xi))$$

и сопряженный к нему

$$(e^{T,\xi})^* : \mathscr{F}^{T} \to \mathscr{F}^{\xi}, \quad ((e^{T,\xi})^*f)(t) := f(t+(T-\xi))\,.$$

Легко проверяются соотношения

$$(e^{T,\xi})^* e^{T,\xi} = \mathbb{I}_{\mathscr{F}^{\xi}}; \qquad e^{T,\xi}(e^{T,\xi})^* = X^{T,\xi}\,, \tag{18}$$

где $\mathbb{I}_{\mathscr{F}^{\xi}}$ есть единичный оператор, $X^{T,\xi}$ – проектор в $\mathscr{F}^{T}$ на $\mathscr{F}^{T,\xi}$, действие которого сводится к срезке управлений на интервал $[T-\xi, T]$:

$$(X^{T,\xi}f)(t) := \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < T-\xi \\ f(t), & T-\xi \leqslant t \leqslant T \end{cases}. \tag{19}$$

Из представления (16) легко выводится представление

$$C^{\xi} = (e^{T,\xi})^* C^{T} e^{T,\xi}\,, \qquad 0 < \xi \leqslant T\,. \tag{20}$$

• Приведем соотношение для операторов реакции, которое позже используем в обратной задаче:

$$R^{\xi} = (e^{2T,\xi})^* R^{2T} e^{2T,\xi}\,, \qquad 0 < \xi \leqslant 2T\,. \tag{21}$$

Оно легко следует из представления (13).

§3. Обратная задача

Постановка. В соответствии с принципом локальности, функция отклика $r|_{0\leqslant t\leqslant 2T}$ (а с ней и оператор реакции R^{2T}) определяется значениями потенциала $V|_{\Omega^T}$ (не зависит от его значений при $x > T$). Постановка обратной задачи, адекватная этому свойству, состоит в восстановлении потенциала V на отрезке Ω^T по функции отклика r, заданной при временах $0 \leqslant t \leqslant 2T$.

В такой постановке задача решена в [1] и ниже мы кратко опишем процедуру ее решения. Процедуре предпошлем описание ее инструментов – проекторов и т.н. амплитудной формулы.

Проекторы. • Фиксируем положительное $\xi \leqslant T$. В системе α^T, образованное волнами подпространство

$$\mathscr{U}^\xi := W^T\mathscr{F}^{T,\xi} = \{u^f(\,\cdot\,,T) \mid f\in\mathscr{F}^{T,\xi}\} \overset{\text{см.}(7)}{=} \{u^f(\,\cdot\,,\xi) \mid f\in\mathscr{F}^{T}\}$$

называется *достижимым* (к моменту $t=\xi$).

Ортогональный проектор в $\mathscr{H}^T$ на $\mathscr{U}^T$ назовем *волновым проектором.* В силу (11), он совпадает с проектором в $\mathscr{H}^T$ на подпространство $\mathscr{H}^\xi$, который срезает $\mathbb{R}^N$-значные функции на Ω^ξ. Итак, имеем:

$$P^\xi y = \begin{cases} y & \text{в } \Omega^\xi \\ 0 & \text{в } \Omega^T\setminus\Omega^\xi, \end{cases} \qquad 0\leqslant\xi\leqslant T\,.$$

• В пространстве $\mathscr{F}^T$ определим оператор

$$\mathcal{P}^{T,\xi} := [W^T]^{-1}P^\xi W^T\,. \tag{22}$$

Так как W^T действует изоморфно, а $(\mathcal{P}^{T,\xi})^2=\mathcal{P}^{T,\xi}$, очевидно, выполнено, он является ограниченным проектором. Опишем его действие. Начнем с общей операторной леммы.

Пусть $\mathscr{F}$ и $\mathscr{H}$ суть гильбертовы пространства, $\mathscr{F}'\subset\mathscr{F}$ и $\mathscr{H}'\subset\mathscr{H}$ – (замкнутые) подпространства; $e:\mathscr{F}'\to\mathscr{F}$ – вложение, такое что $e^*e=\mathbb{I}_{\mathscr{F}'}$ и $ee^*=X$, где X проектирует ортогонально в $\mathscr{F}$ на $\mathscr{F}'$. Обозначим $\mathscr{F}'_\perp := \mathscr{F}\ominus\mathscr{F}'$ и $\mathscr{H}'_\perp := \mathscr{H}\ominus\mathscr{H}'$; пусть P есть ортогональный проектор в $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}'$.

Пусть $W:\mathscr{F}\to\mathscr{H}$ и $V:\mathscr{F}\to\mathscr{H}$ есть изоморфизм, такой, что выполнено $W\mathscr{F}'=V\mathscr{F}'=\mathscr{H}'$. Определим оператор $C:=V^*W:\mathscr{F}\to\mathscr{F}$ и подпространство $C^{-1}\mathscr{F}'_\perp\subset\mathscr{F}$. Оператор $\mathcal{P}:=W^{-1}PW$ действует в $\mathscr{F}$.

Лемма 1. *Пусть* $C' := e^*C\,e$ *есть изоморфизм в* $\mathscr{F}'$. *Тогда имеет место разложение в прямую сумму* $\mathscr{F} = \mathscr{F}' \dotplus C^{-1}\mathscr{F}'_\perp$, *причем* $\mathcal{P}$ *есть (косой) проектор в* $\mathscr{F}$ *на* $\mathscr{F}'$ *параллельно* $C^{-1}\mathscr{F}'_\perp$. *Справедливо представление*

$$\mathcal{P} \,=\, e\,[C']^{-1}e^*\,C. \tag{23}$$

Доказательство. 1. Операторы W и V суть изоморфизмы, и выполнено $W\mathscr{F}' = V\mathscr{F}' = \mathscr{H}'$. Последнее равенство влечет $V^*\mathscr{H}'_\perp = \mathscr{F}'_\perp$ и ведет к

$$\mathscr{F} = W^{-1}[\mathscr{H}' \oplus \mathscr{H}'_\perp] = W^{-1}\mathscr{H}' \dotplus W^{-1}\mathscr{H}'_\perp = \mathscr{F}' \dotplus C^{-1}\mathscr{F}'_\perp\,.$$

2. Равенство $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ следует непосредственно из определения $\mathcal{P}$. Если $f \in \mathscr{F}'$, то $Wf \in \mathscr{H}'$ и, следовательно,

$$\mathcal{P}f = W^{-1}PWf = W^{-1}Wf = f\,.$$

Если $f \in C^{-1}\mathscr{F}'_\perp$, то $f = C^{-1}g$ с $g \in \mathscr{F}'_\perp$ и мы имеем

$$\mathcal{P}f = W^{-1}PW^TC^{-1}g = W^{-1}P[V^*]^{-1}g = 0$$

в силу of $[V^*]^{-1}g \in \mathscr{H}'_\perp$.

Таким образом, $\mathcal{P}$ есть идемпотент, действующий тождественно на $\mathscr{F}'$ и аннулирующий $C^{-1}\mathscr{F}'_\perp$. Поэтому он проектирует в $\mathscr{F}$ на $\mathscr{F}'$ параллельно $C^{-1}\mathscr{F}'_\perp$.

3. Пусть Q правая часть в (23). Тогда имеем:

$$Q^2 = e\,[C']^{-1}e^*\,C\,e\,[C']^{-1}e^*\,C = e\,[C']^{-1}C'\,[C']^{-1}e^*\,C = Q\,.$$

Если $f \in \mathscr{F}'$, то $Xf = ee^*f = f$ и, следовательно,

$$Qf = e\,[C']^{-1}e^*\,Cf = e\,[C']^{-1}e^*\,Ce\,e^*f = e\,[C']^{-1}C'e^*f = f\,.$$

Если $f \in C^{-1}\mathscr{F}'_\perp$, то $f = C^{-1}g$ с $g \in \mathscr{F}'_\perp$ и выполнено

$$Qf = e\,[C']^{-1}e^*\,CC^{-1}g = 0$$

в силу $e^*\mathscr{F}'_\perp = \{0\}$.

Итак, Q есть идемпотент, действующий тождественно на $\mathscr{F}'$ и аннулирующий $C^{-1}\mathscr{F}'_\perp$. Поэтому он проектирует в $\mathscr{F}$ на $\mathscr{F}'$ параллельно $C^{-1}\mathscr{F}'_\perp$ и, значит, совпадает с $\mathcal{P}$. □

Вернемся к определению (22). Применяя Лемму 1 к $\mathscr{F} = \mathscr{F}^T$, $\mathscr{F}' = \mathscr{F}^{T,\xi}$, $\mathscr{F}'_\perp = \mathscr{F}^{T,\xi}_\perp = \mathscr{F}^T \ominus \mathscr{F}^{T,\xi}$, $\mathscr{H} = \mathscr{H}^T$, $\mathscr{H}' = \mathscr{H}^\xi$, $W = W^T$, $V = W^T_\flat$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{T,\xi}$ и ссылаясь на (20), приходим к следующему.

Следствие 1. *Оператор $\mathcal{P}^{T,\xi}$ есть (косой) проектор в $\mathscr{F}^T$ на $\mathscr{F}^{T,\xi}$ параллельно $[C^T]^{-1}\mathscr{F}^{T,\xi}_\perp$. Справедливо представление*

$$\mathcal{P}^{T,\xi} \,=\, e^{T,\xi}[C^\xi]^{-1}(e^{T,\xi})^*C^T\,, \qquad 0<\xi\leqslant T\,. \tag{24}$$

• В силу полной равноправности систем α^T и $\alpha^T_\flat$, оператор

$$\mathcal{P}^{T,\xi}_\flat \,:=\, [W^T_\flat]^{-1}P^\xi W^T_\flat \tag{25}$$

имеет те же свойства, что и $\mathcal{P}^{T,\xi}$. Именно, он является проектором в $\mathscr{F}^T$ на $\mathscr{F}^{T,\xi}$ параллельно подпространству $[(C^T)^*]^{-1}\mathscr{F}^{T,\xi}_\perp$ и представим в виде.

$$\mathcal{P}^{T,\xi}_\flat \,=\, e^{T,\xi}[(C^\xi)^*]^{-1}(e^{T,\xi})^*(C^T)^*\,, \qquad 0<\xi\leqslant T\,. \tag{26}$$

Амплитудная формула. Фиксируем $0<\xi\leqslant T$ и выберем гладкое управление $f\in\mathscr{M}^T$. Для них имеем соотношения:

$$W^T\mathcal{P}^\xi f \overset{(22)}{=} P^\xi W^T f = P^\xi u^f(\cdot,T) = \begin{cases} u^f(\cdot,T) & \text{в } \Omega^\xi \\ 0 & \text{в } \Omega^T\setminus\Omega^\xi \end{cases}.$$

Управление $\mathcal{P}^\xi f\in\mathscr{F}^{T,\xi}$ аннулируется при $0\leqslant t<T-\xi$ и, вообще говоря, терпит разрыв первого рода в момент $t=T-\xi$. Волна $u^{\mathcal{P}^\xi f}=P^\xi u^f(\cdot,T)\in\mathscr{H}^\xi$ аннулируется вне Ω^ξ и, вообще говоря, имеет разрыв в точке $x=\xi$. Величины (амплитуды) этих разрывов связаны равенством (9), из которого, с учетом непрерывности волны $u^f(\cdot,T)$ в Ω^T, следует соотношение

$$(\mathcal{P}^\xi f)(T-\xi+0) \,=\, (P^\xi u^f(\cdot,T))(\xi-0) = u^f(\xi,T)\,.$$

Записывая его в виде

$$(W^Tf)(\xi) \,=\, (\mathcal{P}^\xi f)(T-\xi+0)\,, \qquad \xi\in\Omega^T, \tag{27}$$

получаем *амплитудную формулу*, с помощью которой будет решена обратная задача. Соотношения этого типа – ключевой инструмент всех вариантов BC-метода.

Восстановление потенциала. Пусть известно, что матрица-функция r является функцией отклика динамической системы α^T вида (1). По ней требуется определить потенциал V на отрезке Ω^T. Опишем процедуру, решающую эту задачу.

A. По заданному r определим операторы C^ξ для всех $0\leqslant\xi\leqslant T$ по представлению (17).

B. Найдем проекторы $\mathcal{P}^{T,\xi}$ для $0\leqslant\xi\leqslant T$ согласно (24).

C. Определим оператор управления W^T по формуле (27), затем найдем его ядро w (см. (10)). Зная ядро, восстановим потенциал $V|_{\Omega^T}$ по равенству $V(x)=-2\,\frac{dw(x,x)}{dx}$ (см. (5)).

Обратная задача решена.

§4. Характеризация данных

Под характеризацией понимаются необходимые и достаточные условия на матрицу-функцию r, которые гарантируют, что она является функцией отклика некоторой системы α^T и, тем самым, обеспечивают разрешимость обратной задачи. Как будет показано, эти условия сводятся к изоморфности операторов, определяемых (по r) правой частью соотношения (17). Необходимость этого условия уже установлена. В самом деле, если r есть функция отклика, то эта правая часть совпадает со связывающим оператором C^ξ системы α^ξ, который является изоморфизмом. Достаточность устанавливается сложнее и ее доказательство составляет оставшуюся часть работы.

Доказательство достаточности конструктивно. Фактически, оно сводится к применению процедуры **A**.$-$**C**. к заданной функции r, итогом чего является построение некоторой динамической системы α^T. В ходе построения проверяется, что условие изоморфности всех C^ξ обеспечивает выполнимость всех шагов процедуры. На заключительном этапе мы показываем, что функция отклика построенной системы совпадает с функцией r, с которой начиналось построение.

Приступим к реализации этой программы, начав с точной формулировки главного результата.

Теорема 1. *Матрица-функция $r\in C^1([0,2T];\mathbb{M}^N)$ является функцией отклика динамической системы вида (1), если и только если при каждом положительном $\xi\leqslant T$ определяемый ею оператор C^ξ, действующий по правилу*

$$(C^\xi f)(t)=f(t)+\int\limits_0^\xi C^\xi(t,s)f(s)\,ds\,,\qquad 0\leqslant t\leqslant\xi \tag{28}$$

с ядром

$$C^\xi(t,s)=\frac{1}{2}\int\limits_{|t-s|}^{2\xi-t-s} r(\eta)\,d\eta\,. \tag{29}$$

является изоморфизмом пространства $\mathscr{F}^\xi$.

Сделаем замечание по поводу обозначений в предстоящем доказательстве достаточности. В приведенной выше формулировке символ C^ξ не предполагает, что этот оператор заведомо является связывающим оператором какой-то системы α^ξ: он лишь является кандидатом на эту роль. Подобным же образом используются и другие символы $\mathcal{P}^\xi$, W^T, R^{2T} и т.д. Этот прием разгружает обозначения и, с другой стороны, проясняет смысл вводимых объектов.

Проекторы. • Приступая к реализации намеченного плана, мы последовательно вводим аналоги объектов, принадлежащих системе α^T. Начнем с проекторов $\mathcal{P}^{T,\xi}$. Ввести их согласно (22) сейчас нельзя, так как мы не располагаем оператором W^T. Поэтому, обращаясь к представлению (24), мы *определяем*

$$\mathcal{P}^{T,\xi} := e^{T,\xi}\,[C^\xi]^{-1}(e^{T,\xi})^*C^T\,, \qquad 0<\xi\leqslant T, \tag{30}$$

что корректно, поскольку все C^ξ суть изоморфизмы в силу условий Теоремы. Затем, в полной аналогии с (25), мы определяем

$$\mathcal{P}_\flat^{T,\xi} := e^{T,\xi}[(C^\xi)^*]^{-1}(e^{T,\xi})^*(C^T)^*\,, \qquad 0<\xi\leqslant T \tag{31}$$

(ср. с (25), (26)), что корректно, так как $(C^\xi)^*$ являются изоморфизмами.

Предложение 1. *Оператор* $\mathcal{P}^{T,\xi}$ *есть проектор в* $\mathscr{F}^T$ *на* $\mathscr{F}^{T,\xi}$ *параллельно* $[C^T]^{-1}\mathscr{F}_\perp^{T,\xi}$. *Оператор* $\mathcal{P}_\flat^{T,\xi}$ *проектирует в* $\mathscr{F}^T$ *на* $\mathscr{F}^{T,\xi}$ *параллельно* $[(C^T)^*]^{-1}\mathscr{F}_\perp^{T,\xi}$. *Справедливы равенства*

$$C^T\mathcal{P}^\xi = ({\mathcal{P}^\xi}_\flat)^*C^T, \quad \mathcal{P}^\xi(C^T)^{-1} = (C^T)^{-1}(\mathcal{P}_\flat^\xi)^*\,. \tag{32}$$

В самом деле, для проверки первого и второго утверждений надо лишь повторить аргументы пункта **3**. из доказательства Леммы 1. После этого, равенства (32) легко следуют из (30) и (31).

• Здесь мы получаем эффективные представления для проекторов $\mathcal{P}^{T,\xi}$ и $\mathcal{P}_\flat^{T,\xi}$. Напомним, что проектор $X^{T,\xi}$ определен в (19).

Лемма 2. *Для любого* $0<\xi\leqslant T$, *справедливо представление*

$$(\mathcal{P}^{T,\xi}f)(t) = (X^{T,\xi}f)(t) + \int_0^{T-\xi} m^\xi(t,s)f(s)\,ds, \qquad 0\leqslant t\leqslant T \tag{33}$$

с кусочно C^2-гладким ядром m^ξ, для которого выполнено

$$m^\xi(t,s)|_{t>T-\xi} \equiv 0.$$

Доказательство. (набросок) По общей теории интегральных уравнений Фредгольма, обратный к изоморфизму C^ξ имеет вид

$$((C^\xi)^{-1}f)(t) = f(t) - \int_0^\xi l^\xi(t,s)f(s)\,ds\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \xi \tag{34}$$

с матричным ядром l^ξ of той же гладкости, что и ядро C^ξ: оно непрерывно в квадрате $[0,\xi]\times[0,\xi]$ и дважды непрерывно дифференцируемо вне диагонали $t=s$.

Подставляя (28) (с $\xi = T$) и (34) в правую часть определения (30), в результате весьма громоздких выкладок (интегрирования по частям, замены порядков интегрирования и т.п.), придем к (33). Также, вычисления дают

$$m^\xi(t,s) = X^{T,\xi}C^T(t,s) - \int_0^\xi l^\xi(t-(T-\xi),\eta)\,C^T(\eta+(T-\xi),s)\,d\eta\,, \tag{35}$$

где $C^T(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ есть ядро (29) при $\xi = T$. □

Добавим, что пределы интегрирования в (33) соответствуют тому, как действует проектор $\mathcal{P}^{T,\xi}$. Если $f \in \mathscr{F}^{T,\xi}$, то $f|_{0\leqslant t\leqslant T-\xi} = 0$; поэтому интеграл исчезает, что дает $\mathcal{P}^{T,\xi}f = X^{T,\xi}f = f$. Также, поскольку $\mathcal{P}^{T,\xi}f|_{0\leqslant t\leqslant T-\xi} = 0$ для всех f, ядро m^ξ должно аннулироваться тождественно при $t > T-\xi$.

В силу (31), вполне аналогичные рассмотрения ведут к

$$(\mathcal{P}^{T,\xi}_\flat f)(t) = (X^{T,\xi}f)(t) + \int_0^{T-\xi} m^\xi_\flat(t,s)f(s)\,ds, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{36}$$

с ядром $m^\xi_\flat$, имеющим те же свойства, что и m^ξ.

Операторы W^T и $W^T_\flat$. • Следующее определение мотивировано амплитудной формулой (27). Напомним, что $\mathscr{H}^T = L_2(\Omega^T;\mathbb{R}^N)$ и введем оператор $W^T : \mathscr{F}^T \to \mathscr{H}^T$,

$$(W^T f)(x) := (\mathcal{P}^x f)(T-x+0), \qquad x \in \Omega^T. \tag{37}$$

В настоящий момент это некоторый оператор, определенный (в несколько шагов) по исходной функции $r|_{[0,2T]}$, однако впоследствии он окажется оператором управления адекватной системы α^T. Ее построение – главная сюжетная линия доказательства достаточности.

Используя (33) для $t = T - x + 0$ и меняя переменную в интеграле, получаем представление для оператора W^T:

$$(W^T f)(x) = f(T-x) + \int\limits_x^T w(x,s) f(T-s)\, ds, \qquad x \in \Omega^T \tag{38}$$

с матричным ядром, дважды непрерывно дифференцируемым при $0 \leqslant x \leqslant s \leqslant T$. Опуская простые, но громоздкие вычисления, приведем выражение для ядра:

$$\begin{aligned} w(x,s) \;=\; & C^T(T-x, T-s) - \\ - & \int\limits_0^x l^x(0,\eta)\, C^T(\eta + (T-x), T-s)\, d\eta\,, \qquad 0 \leqslant x \leqslant s \leqslant T\,, \end{aligned} \tag{39}$$

где l^x определено в (34). Подставляя $x = 0$ в (39), с учетом $C^T(T,T) \overset{(29)}{=} 0$ получим равенство

$$w(0,s) \;=\; 0, \qquad 0 \leqslant s \leqslant T\,. \tag{40}$$

Представление (38) полезно сравнить с (10).

Как видно из представления (38), оператор W^T есть *изоморфизм* из $\mathscr{F}^T$ на $\mathscr{H}^T$, причем выполнено соотношение

$$W^T \mathscr{F}^{T,\xi} \;=\; \mathscr{H}^\xi\,, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant T\,, \tag{41}$$

которое полезно сравнить с равенством (11), установленным в прямой задаче. Кроме того, по известным аргументам теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода, для $y \in \mathscr{H}^T$ имеем

$$([W^T]^{-1} y)(t) = y(T-t) - \int\limits_0^t w^{-1}(t,s)\, y(T-s)\, ds, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{42}$$

с ядром w^{-1}, дважды непрерывно дифференцируемым при $0 \leqslant s < t \leqslant T$. Для ядра выполнено равенство

$$w^{-1}(T,s) \;=\; 0, \qquad 0 \leqslant s \leqslant T\,,$$

следующее из (40). Для его проверки достаточно выписать интегральное уравнение, связывающее ядра прямого и обратного операторов и положить в нем $x = 0$.

• Вполне аналогично, оператор $W_\flat^T : \mathscr{F}^T \to \mathscr{H}^T$,

$$(W_\flat^T)(x) := (\mathcal{P}_\flat^{T,x} f)(T - x + 0), \qquad x \in \Omega^T.$$

обладает теми же свойствами, что и W^T. Именно, справедливо представление

$$(W_\flat^T)(x) = f(T - x) + \int\limits_x^T w_\flat(x, s) f(T - s)\, ds, \qquad x \in \Omega^T \tag{43}$$

с ядром $w_\flat$ той же гладкости, что и w и удовлетворяющим $w_\flat(0, s) = 0$, $0 \leqslant s \leqslant T$. Он является изоморфизмом, для которого выполнено

$$W_\flat^T \mathscr{F}^{T,\xi} = \mathscr{H}^\xi, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T\,. \tag{44}$$

Обратный к нему имеет вид

$$([W_\flat^T]^{-1} y)(t) = y(T - t) - \int\limits_0^t w_\flat^{-1}(t, s)\, y(T - s)\, ds, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

с ядром $w_\flat^{-1}$, таким, что $w_\flat^{-1}(0, s) = 0$, $0 \leqslant s \leqslant T$.

• Пусть Y^ξ есть (ортогональный) проектор в $\mathscr{H}^T$ на $\mathscr{H}^\xi$; его действие сводится к срезке вектор-функций на отрезок Ω^T:

$$(Y^\xi y)(x) = \begin{cases} y(x), & x \in \Omega^\xi \\ 0, & x \in \Omega^T \setminus \Omega^\xi \end{cases}.$$

Лемма 3. *При каждом $0 < \xi \leqslant T$ справедливо соотношение:*

$$W^T \mathcal{P}^\xi = Y^\xi W^T; \qquad W_\flat^T \mathcal{P}^\xi{}_\flat = Y^\xi W_\flat^T. \tag{45}$$

Доказательство. Используем два факта:

1) поскольку подпространства $\mathscr{F}^{T,\xi}$ расширяются с ростом ξ, для проекторов выполнено

$$\mathcal{P}^x \mathcal{P}^\xi = \begin{cases} \mathcal{P}^x & \text{при } x < \xi \\ \mathcal{P}^\xi & \text{при } x > \xi \end{cases};$$

2) если $f \in \mathscr{F}^T$, то $\mathcal{P}^\xi f \in \mathscr{F}^{T,\xi}$; поэтому $\operatorname{supp} \mathcal{P}^\xi f \subset [T - \xi, T]$ и, следовательно, $(\mathcal{P}^\xi f)(T - x + 0) = 0$ при $x > \xi$.

Как следствие, согласно определению (37) получаем:

$$\begin{aligned}&\big(W^T\mathcal{P}^\xi f\big)(x)\\&=\begin{cases}(\mathcal{P}^x\mathcal{P}^\xi f)(T-x+0)=(\mathcal{P}^x f)(T-x+0)=\big(W^T f\big)(x) & \text{при } x<\xi\\(\mathcal{P}^x\mathcal{P}^\xi f)(T-x+0)=(\mathcal{P}^\xi f)(T-x+0)=0 & \text{при } x>\xi\end{cases}\\&=(Y^\xi W^T f)(x)\,.\end{aligned}$$

Второе равенство в (45) доказывается вполне аналогично. □

• Здесь мы установим соотношение, которое связывает операторы W^T, $W^T_\flat$ и C^T. По своей форме оно дублирует определение (15). Тем не менее, в данный момент W^T и $W^T_\flat$ являются лишь операторами, построенными по функции r и мы не утверждаем, что C^T есть связывающий оператор некоторой системы α^T: это еще предстоит доказать.

Лемма 4. *Справедливо соотношение*

$$C^T\;=\;(W^T_\flat)^*W^T\,. \tag{46}$$

Доказательство. 1. Обозначим $A\;:=\;W^T[C^T]^{-1}(W^T_\flat)^*$ и проверим равенство

$$AY^\xi\;=\;Y^\xi A\,. \tag{47}$$

Умножая первое равенство в (45) справа на $[C^T]^{-1}(W^T_\flat)^*$ имеем:

$$W^T\mathcal{P}^\xi\;[C^T]^{-1}(W^T_\flat)^*=Y^\xi W^T\;[C^T]^{-1}(W^T_\flat)^*=Y^\xi A\,. \tag{48}$$

Во втором равенстве в (45) переход к сопряженным операторам (в $\mathscr{F}^T$) дает $(\mathcal{P}^\xi{}_\flat)^*(W^T_\flat)^*=(W^T_\flat)^*Y^\xi$. Умножая обе части слева на $W^T[C^T]^{-1}$, получаем:

$$W^T[C^T]^{-1}(\mathcal{P}^\xi{}_\flat)^*(W^T_\flat)^*=W^T[C^T]^{-1}(W^T_\flat)^*Y^\xi=AY^\xi\,. \tag{49}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}Y^\xi A&\overset{\text{см. (48)}}{=}W^T\mathcal{P}^\xi\;[C^T]^{-1}(W^T_\flat)^*\\&\overset{\text{см. (45)}}{=}W^T[C^T]^{-1}(\mathcal{P}^\xi{}_\flat)^*(W^T_\flat)^*\overset{\text{см. (49)}}{=}AY^\xi\,.\end{aligned}$$

Итак, (47) установлено.

2. Из представлений (34) (с $\xi=T$), (38) и (43) легко следует, что оператор $A=W^T\;[C^T]^{-1}(W^T_\flat)^*$ имеет вид

$$A=\mathbb{I}+K\,,$$

где K есть компактный интегральный оператор в $\mathscr{H}^T$. Коммутация (47) ведет к $KY^\xi = Y^\xi K$ и, затем, к $K^*Y^\xi = Y^\xi K^*$. В результате имеем:

$$K^*KY^\xi = K^*Y^\xi K = Y^\xi K^*K,$$

так что *самосопряженный* оператор K^*K коммутирует с семейством проекторов $\{Y^\xi\}_{0\leqslant\xi\leqslant T}$. По известным аргументам спектральной теории, последнее возможно если и только если K^*K есть умножение на вещественную ограниченную измеримую функцию. Однако, поскольку K^*K *компактен*, такое возможно если и только если $K^*K = \mathbb{O}$, что равносильно $K = \mathbb{O}$. Таким образом, мы приходим к $A = \mathbb{I}$.

3. По определению оператора A выполнено

$$A := W^T[C^T]^{-1}(W_\flat^T)^* = \mathbb{I}\,,$$

что, в силу изоморфности операторов W^T и $W_\flat^T$, ведет к (46). □

Оператор L. Напомним, что $\mathscr{M}^T$ есть линеал гладких управлений в $\mathscr{F}^T$. Условимся под *гладкостью* понимать C^2-гладкость.

Ориентируясь на соотношение (12), определим в $\mathscr{H}^T$ оператор

$$L := -W^T\,\frac{d^2}{dt^2}\,[W^T]^{-1}\,, \quad \operatorname{Dom} L = W^T\mathscr{M}^T\,. \tag{50}$$

Используя вид (38) оператора W^T и характер гладкости ядра w легко показать, что $\operatorname{Dom} L = W^T\mathscr{M}^T = \{y \in C^2(\Omega^T;\mathbb{R}^N)\,|\,\operatorname{supp} y \subset [0,T)\}$. Следующий результат устанавливает его вид: L есть оператор Штурма–Лиувилля.

Лемма 5. *Справедливо представление*

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + V \tag{51}$$

с потенциалом $V(x) := -2\,\frac{dw(x,x)}{dx} \in C^1(\Omega^T;\mathbb{M}^N)$, *где w есть ядро интегральной части оператора W^T в (38).*

Доказательство. (набросок)
1. Приведем вспомогательное соотношение. Упрощая запись, используем обозначение $\dot{(...)} = \frac{d}{dt}$.

Фиксируем положительное $\xi < T$. Пусть управления $f, g \in \mathscr{M}^T$ таковы, что $f(T) = g(T) = 0$. Справедливо равенство

$$(C^T\ddot g, f)_{\mathscr{F}^T} = (C^T g, \ddot f)_{\mathscr{F}^T}\,. \tag{52}$$

Оно устанавливается интегрированием по частям, которое проводится с учетом условий на f и g при $t=0$ и $t=T$. При этом существенным образом используется специфический вид (29) (с $\xi=T$) ядра оператора C^T.

2. Покажем, что оператор L является *локальным*, т.е. удовлетворяет соотношению $\operatorname{supp} Ly \subset \operatorname{supp} y$.

Пусть $y \in \operatorname{Dom} L$ и $\operatorname{supp} y \subset \Omega^\xi$. Тогда, в силу (41), для $f := [W^T]^{-1}y$ выполнено $f \in \mathscr{M}^T \cap \mathscr{F}^{T,\xi}$ и, следовательно, $\ddot f \in \mathscr{F}^{T,\xi}$. Еще раз ссылаясь на (41), имеем: $Ly = -W^T\ddot f \in \mathscr{H}^\xi$, а, значит, $\operatorname{supp} Ly \subset \Omega^\xi$. Таким образом, L не растягивает носитель функции *вправо*.

Пусть $y \in \operatorname{Dom} L$ и $\operatorname{supp} y \subset \overline{\Omega^T \setminus \Omega^\xi} = [\xi, T]$. Тогда $f := [W^T]^{-1}y \in \mathscr{M}^T$ выполнено $f(T) = y(0) = 0$. Выберем $g \in \mathscr{M}^T \cap \mathscr{F}^{T,\xi}$ $g(T)=0$. Таким образом, f и g удовлетворяют условиям, при которых установлено (52). Далее имеем:

$$
\begin{aligned}
&-(Ly, W_\flat^T g)_{\mathscr{H}^T} = -(LW^T f, W_\flat^T g)_{\mathscr{H}^T} = (W^T\ddot f, W_\flat^T g)_{\mathscr{H}^T}\\
&\overset{\text{см. (46)}}{=} (C^T\ddot f, g)_{\mathscr{F}^T} \overset{\text{см. (52)}}{=} (C^T f, \ddot g)_{\mathscr{F}^T} = (y, W_\flat^T \ddot g)_{\mathscr{H}^T} = 0\,,
\end{aligned}
$$

поскольку $\ddot g \in \mathscr{F}^{T,\xi}$, в силу чего $W_\flat^T \ddot g \in \mathscr{H}^\xi$, в то время как $y \in \mathscr{H}^T \ominus \mathscr{H}^\xi$ по условию на носитель y. Так как выбранные g плотны в $\mathscr{F}^{T,\xi}$, их образы $W_\flat^T g$ плотны в $\mathscr{H}^\xi$ (см. (44)). Поэтому из установленного равенства $(Ly, W_\flat^T g)_{\mathscr{H}^T} = 0$ следует $Ly \in \mathscr{H}^T \ominus \mathscr{H}^\xi$, а, значит, $\operatorname{supp} Ly \subset \overline{\Omega^T \setminus \Omega^\xi}$. Таким образом, L не растягивает носитель функции *влево*.

Итак, оператор L не расширяет носитель функций, т.е. действует локально.

3. Представление (51) устанавливается на следующем пути. Выбирается $f \in \mathscr{M}^T$ и, с использованием (38), выводится соотношение

$$
\begin{aligned}
&(W^T f)''(x) - (W^T\ddot f)(x)\\
&= V(x) f(T-x) + \int_x^T [w_{xx}(x,s) - w_{ss}(x,s)]\, f(T-s)\, ds\\
&= V(x)(W^T f)(x) + \int_x^T [w_{xx}(x,s) - w_{ss}(x,s) - V(x)w(x,s)]\, f(T-s)\, ds
\end{aligned}
$$

где $(\dot{\ })' = \frac{d}{dx}$ и $V := -2\,\frac{dw(x,x)}{dx}$. Заметим, что выполняемые при выводе операции, – дифференцирование интегралов и интегрирование по частям, – корректны в силу C^2-гладкости ядер интегралов. Далее, подстановкой $f = [W^T]^{-1}y$ с использованием (42) соотношение приводится к виду

$$(Ly)(x) = -y''(x) + V(x)y(x) + \int\limits_x^T K(x,s)y(s)\,ds, \qquad x \in \Omega^T \tag{53}$$

с непрерывным ядром K.

4. Мы опускаем простое доказательство следующего факта: оператор вида (53) *локален* если и только если интегральное слагаемое отсутствует. Таким образом, мы приходим к (51). □

Оператор $L_\flat$. • По вполне аналогичной схеме устанавливается, что оператор

$$L_\flat := -W_\flat^T\,\frac{d^2}{dt^2}\,[W_\flat^T]^{-1}\,, \quad \operatorname{Dom} L_\flat = W_\flat^T \mathscr{M}^T\,.$$

допускает представление

$$L_\flat \;=\; -\,\frac{d^2}{dx^2}\;+\;V_\flat$$

с потенциалом $V_\flat(x) := -2\,\frac{dw_\flat(x,x)}{dx} \in C^1(\Omega^T;\mathbb{M}^N)$, где $w_\flat$ есть ядро интегральной части оператора $W_\flat^T$ в (43).

• Покажем, что операторы L и $L_\flat$ сопряжены по Даламберу, т.е. для $y,v \in C_0^\infty(\Omega^T;\mathbb{R}^N)$ выполнено

$$(Ly,v)_{\mathscr{H}^T} \;=\; (y, L_\flat v)_{\mathscr{H}^T}\,.$$

В самом деле, по выбору y и v, управления $f = [W^T]^{-1}y$ и $g = [W_\flat^T]^{-1}v$ аннулируются вблизи $t = 0$ и выполнено $f(0) = g(0) = 0$. Отсюда имеем:

$$\begin{aligned}(Ly,v)_{\mathscr{H}^T} &= (W^T\ddot{f}, W_\flat^T g)_{\mathscr{H}^T} = (C^T\ddot{f}, g)_{\mathscr{F}^T} \overset{\text{см. (52)}}{=} (C^T f, \ddot{g})_{\mathscr{F}^T}\\ &= (W^T f, W_\flat^T \ddot{g})_{\mathscr{H}^T} = (y, L_\flat v)_{\mathscr{H}^T}\,.\end{aligned}$$

Из установленной сопряженности легко следует связь потенциалов:

$$V_\flat(x) = V^\flat(x), \qquad x \in \Omega^T\,.$$

Завершение доказательства Теоремы 1. Оператор L определяет динамическую систему α^T вида

$$\begin{cases} u_{tt} + Lu = 0, & x > 0,\ 0 < t < T \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, & x \geqslant 0 \\ u|_{x=0} = f, & 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{54}$$

Из (50) легко усмотреть, что определяющий L оператор W^T является оператором управления этой системы.

Вполне аналогично, система $\alpha^T_\flat$ вида

$$\begin{cases} u_{tt} + L_\flat u = 0, & x > 0,\ 0 < t < T \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, & x \geqslant 0 \\ u|_{x=0} = f, & 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

имеет оператор управления, совпадающий с $W^T_\flat$.

Из (46) следует, что оператор C^T, введенный в рассмотрение *определением* (28) (для $\xi = T$), является связывающим оператором системы (54). Интегральная часть связывающего оператора однозначно определяет функцию отклика при временах $0 \leqslant t \leqslant 2T$. Отсюда заключаем, что функция отклика системы (54) совпадает с матрицей-функцией $r|_{0\leqslant t\leqslant 2T}$, с которой начались наши построения.

Итак, $r|_{0\leqslant t\leqslant 2T}$ есть функция отклика динамической системы вида (1).

Достаточность условий Теоремы 1 доказана.

Комментарии. • Хорошо известна глубокая связь обратных задач с задачей треугольной факторизации операторов. Она прослеживается и в данной работе.

Напомним определения. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathscr{F}$ задано монотонное семейство (*цепочка*) подпространств $\mathfrak{f} = \{\mathscr{F}^\xi\}_{0\leqslant\xi\leqslant T}$: $\mathscr{F}^\xi \subset \mathscr{F}^{\xi'}$ при $\xi < \xi'$. Оператор Z называется *треугольным* относительно этой цепочки, если $Z\mathscr{F}^\xi \subset \mathscr{F}^\xi$, т.е. все $\mathscr{F}^\xi$ суть подпространства, инвариантные для Z. Говорят, что операторы Z и $Z_\flat$, треугольные относительно цепочки $\mathfrak{f}$, доставляют *треугольную факторизацию* действующему в $\mathscr{F}$ оператору C, если выполнено $C = Z^*_\flat Z$.

В нашей работе, в пространстве $\mathscr{F}^T$ выделена цепочка подпространств $\mathfrak{f} = \{\mathscr{F}^{T,\xi}\}_{0\leqslant\xi\leqslant T}$. Введем изометрию

$$I^T : \mathscr{H}^T \to \mathscr{F}^T, \quad (I^T y)(t) := y(T-t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

и отметим, что $(I^T)^*I^T = \mathbb{I}_{\mathscr{F}^T}$. Как следует из (41) и (44), операторы $Z^T := I^TW^T$ и $Z^T_\flat := I^TW^T_\flat$ суть треугольные относительно данной цепочки. Согласно (15) имеем:

$$C^T = (W^T_\flat)^*W^T = (I^TW^T_\flat)^*I^TW^T \;=\; (Z^T_\flat)^*Z^T\,.$$

Следовательно, пара Z^T, $Z^T_\flat$ дает треугольную факторизацию связывающего оператора системы α^T относительно цепочки подпространств, образованных запаздывающими управлениями.

Таким образом, решая обратную задачу с помощью процедуры **A**.–**C**., описанной в конце раздела 3, мы фактически решаем задачу треугольной факторизации оператора C^T. Эти задачи *эквивалентны*.

Задача факторизации операторов вида "единичный + компактный" в общем виде решена в [13]: см. Теорему 2.1, в которой приведены необходимые и достаточные условия ее разрешимости. Условия на семейство операторов C^ξ, принятые в нашей Теореме 1, вполне адекватны упомянутым классическим.

• Существенное отличие задачи с несамосопряженным потенциалом V от задачи с $V^\flat = V$ состоит в следующем. Во втором случае связывающий оператор $C^T = (W^T)^*W^T$ *положительно определен* и, как следствие, таковыми оказываются все "укороченные" операторы C^ξ. Поэтому в характеризации достаточно требовать изоморфности C^T: изоморфность всех C^ξ из нее следует. В общем случае изоморфность C^T, вообще говоря, не гарантирует изоморфности C^ξ. В этом состоит ошибка, допущенная в формулировке условий Теоремы 3.2 в работе [1].

Есть случай, когда изоморфность всех C^ξ заведомо обеспечена. Если $T > 0$ мало, то интегральные части операторов C^ξ имеют норму меньше 1 и все C^ξ оказываются изоморфизмами. С этой оговоркой утверждение упомянутой Теоремы 3.2 становится верным.

• Схема, которая используется для характеризации данных в нашей работе, традиционна для BC-метода. Ее суть состоит, во-первых, в разработке эффективной процедуры, которая решает обратную задачу, и, затем, нахождении условий, обеспечивающих реализуемость этой процедуры. Такая схема успешно работает в одномерных обратных задачах: см. [4,9]. Есть некоторые результаты и для многомерных задач, но список характеристических условий в этом случае оказывается весьма длинным [6].

Список литературы

1. S. A. Avdonin, M. I. Belishev, *Boundary control and dynamical inverse problem for nonselfadjoint Sturm-Liouville operator (BC-method).* — Control and Cybernetics, **25**, No 3 (1996), 429–440.
2. С. А. Авдонин, М. И. Белишев, Ю. С. Рыжков, *Динамическая обратная задача для несамосопряженного оператора Штурма-Лиувилля.* Зап. Научн. Семин. ПОМИ, **250** (1998), 7–21.
3. M. I. Belishev, *Boundary Control Method in Dynamical Inverse Problems – An Introductory Course by M. I. Belishev.* Gladwell G. M. L., Morassi A., Editors (2011). Dynamical Inverse Problems: Theory and Application. CISM Courses and Lectures, Vol. 529, Wien, Springer, p. 85–150.
4. М. И. Белишев, А. Л. Пестов, *Характеризация данных обратной задачи для одномерной двухскоростной динамической системы.* — Алгебра Анализ, **26**, No. 3 (2014), 89–130.
5. M. I. Belishev, *Boundary Control Method.* — Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics, Volume no: 1, Pages: 142–146. DOI: 10.1007/978-3-540-70529-1. ISBN 978-3-540-70528-4
6. M. I. Belishev, A. F. Vakulenko, *On characterization of inverse data in the boundary control method.* — Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, **48** (2016), 49–77.
7. М. И. Белишев, *Граничное управление и томография римановых многообразий.* — Успехи Математических Наук, **72**, вып. 4(436), 3-66.
8. М. И. Белишев, А. С. Благовещенский, *Динамические обратные задачи теории волн.* С-Пб Государственный Университет, СПб, 1999.
9. M. I. Belishev, V. S. Mikhaylov, *Inverse problem for one-dimensional dynamical Dirac system (BC-method).* — Inverse Problems,**30**, No. 12 (2014).
10. А. С. Благовещенский, *О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны.* — Труды МИАН Стеклова, **115** (1971), 28–38.
11. А. С. Благовещенский. *О несамосопряженной матричной обратной задаче для гиперболического дифференциального уравнения.* — Проблемы Мат. Физики, **5** (1972), 38–61, 1972..
12. A. S. Blagovestchenskii, *Inverse Problems of Wave Processes.* ZSP, Netherlands, 2001.
13. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения.* Москва, Наука, 1967.

Belishev M. I., Khabibullin T. Sh. Characterization of data in dynamical inverse problem for the 1d wave equation with matrix potential.

The dynamical system under consideration is

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} + Vu = 0, \qquad x > 0, \;\; t > 0;\\
&u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \;\; x \geqslant 0; \quad u|_{x=0} = f, \;\; t \geqslant 0,
\end{aligned}
$$

where $V = V(x)$ is a matrix-valued function (*potential*); $f = f(t)$ is an $\mathbb{R}^N$-valued function of time (*boundary control*); $u = u^f(x,t)$ is a *trajectory* (an $\mathbb{R}^N$-valued function of x and t). The input/output map of the system is a *response operator* $R : f \mapsto u^f_x(0,\cdot),\ \ t \geqslant 0$.

The *inverse problem* is to determine V from given R. To characterize its data is to provide the necessary and sufficient conditions on R that ensure its solvability.

The procedure that solves this problem has long been known and the characterization has been announced (Avdonin and Belishev, 1996). However, the proof was not provided and, moreover, it turned out that the formulation of the sufficiency must be corrected. Our paper fills this gap.

С.-Петербургское Отделение
Математического Института им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: `belishev@pdmi.ras.ru`

Поступило 1 июля 2020 г.

С.-Петербургскй
Государственный Университет
E-mail: `timur19983@outlook.com`