Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 493, 2020 г.

И. В. Байбулов

К ОБОСНОВАНИЮ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ТРЕХ ОДНОМЕРНЫХ КОРОТКОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ $3 \to 2$

Посвящается В. М. Бабичу

§1. Введение

В работе [1] была сформулирована теорема о предельных значениях резольвенты оператора Шредингера трех одномерных частиц (с выделенным центром масс) на абсолютно непрерывном спектре. Напомним, оператор имеет вид

$$H = -\Delta + \sum_{i=1}^{3} v_i(x_i). \tag{1.1}$$

в $L_2(\mathbb{R}^2)$, где x_i это переменная в $\mathbb{R}^2$ вдоль вектора e_{x_i}. В случае равных масс частиц вектора $e_{x_1}, e_{x_2}, e_{x_3}$ образуют между собой равные углы $2\pi/3$. Здесь Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^2$. Функции $v_i(x_i)$ имеют смысл потенциала взаимодействия в паре частиц. Предположим, что в подсистемах возможно лишь конечное число двухчастичных состояний, то есть оператор

$$h_i = -\frac{d^2}{dx^2} + v_i(x)$$

в $L_2(\mathbb{R})$ имеет конечное число собственных значение λ_n^i и собственных функций ψ_n^i. С точки зрения физической постановки задачи прямые вдоль векторов e_{x_i} являются прямыми столкновения частиц в конфигурационном пространстве. Координаты x_i, y_i представляют собой координаты Якоби. Оператор h_i описывает систему двух частиц.

Асимптотика предельных значений интегрального ядра резольвенты $R(\lambda) = (H - \lambda)^{-1}$ оператора H на непрерывном спектре позволяет

Ключевые слова: квантовая задача рассеяния, три одномерные частицы, трехчастичная задача, связанные состояния.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение No. 075–15–2019–1619.

исследовать асимптотику собственных функций непрерывного спектра (обобщенные собственные функции). Члены в асимптотике обобщенных собственных функций вида

$$e^{i\sqrt{\lambda-\lambda_n^i}|y_i|}\psi_n^i(x_i)$$

отвечают каналам рассеяния, в которых две частицы образуют связанную пару. Именно включение таких состояний ведет к существенным усложнениям по сравнению с работой [3].

В рамках подхода Фаддеева [2] исследование резольvenты сводится к исследованию уравнения вида

$$\mathbf{L}\cdot\gamma = \operatorname{diag}(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) \tag{1.2}$$

относительно γ, в терминах которого выражается резольвента

$$R(\lambda) = R_0(\lambda)\cdot\sum_{i,j}\gamma_{ij}.$$

Здесь

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} I & \Gamma_1 & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & I & \Gamma_2 \\ \Gamma_3 & \Gamma_3 & I \end{pmatrix} = (I+\mathbf{\Gamma}).$$

Само уравнение выражается в терминах двухчастичных резольвент

$$\Gamma_j(\lambda) = v_j R_j(\lambda)\,, \tag{1.3}$$

где $R_j = (-\Delta + v(x_i))^{-1}$. При этом R_j распадается на сумму

$$R_j = R_j^{dc} + R_j^{cc} \tag{1.4}$$

отвечающую разбиению резольвенты оператора h_j на вклады дискретного и непрерывного спектра. Аналогично

$$\Gamma_j = \Gamma_j^{cc} + \Gamma_j^{dc}$$

разлагается в соответствующую сумму, как и матрица

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^{cc} + \mathbf{\Gamma}^{dc}.$$

В ходе решения уравнений Фаддеева в текущей постановке возникал вопрос обращения оператора специального вида ([1, Лемма 3.2]):

$$(I+\mathbf{\Gamma}^{dc}). \tag{1.5}$$

Именно этот оператор был ключевым при построении амплитуды рассеяния связанных состояний в асимптотике обобщенных собственных функций, поскольку резольвента представляется в виде

$$R = R_0 \left[\sum_{ij} \left(\mathbf{L}^{-1} \cdot \operatorname{diag}(\Gamma_1^{cc}, \Gamma_2^{cc}, \Gamma_3^{cc}) \right)_{ij} + \sum_{ij} \left(\mathbf{L}^{-1} \cdot \operatorname{diag}(\Gamma_1^{dc}, \Gamma_2^{dc}, \Gamma_3^{dc}) \right)_{ij} \right].$$

При этом в первом слагаемом в скобках (отвечает каналу рассеяния без связанных состояний $3 \to 3$) старшие члены асимптотики порождают лишь часть обратного к L оператора, тогда как во втором слагаемом (отвечающем связанным состояниям) важным оказывается весь оператор. Процедура обращения 1.5 в работе [1] не была рассмотрена.

В предположении компактности носителя потенциалов взаимодействия

$$v_i \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

мы продемонстрируем, как именно происходит его обращение.

§2. Процедура обращения оператора

Мы исследуем оператор

$$(I + \mathbf{\Gamma}^{dc}), \tag{2.1}$$

где

$$\mathbf{\Gamma^{dc}} = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_1^{dc} & \Gamma_1^{dc} \\ \Gamma_2^{dc} & 0 & \Gamma_2^{dc} \\ \Gamma_3^{dc} & \Gamma_3^{dc} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

$$\Gamma_i^{dc}(\lambda) = \sum_n v_i(x_i) \frac{\psi_n^i(x_i)\psi_n^i(x_i')e^{i\sqrt{\lambda-\lambda_n^i}|y_i - y_i'|}}{2\sqrt{|\lambda_n^i|}\sqrt{\lambda-\lambda_n^i}}.$$

Оператор рассматривается в пространстве

$$\mathcal{B} = \{(v_1\psi_1 \times f_1, v_2\psi_2 \times f_2, v_3\psi_3 f_3)^t | f_i(y_i) \in B(\mathbb{R}), \psi_i \in \operatorname{span}\{\psi_n^i(x_i)\}\}.$$

Здесь $B(\mathbb{R})$ – это пространство ограниченных функций. Вообще говоря, в рамках задачи рассеяния трех частиц f_i необходимо брать из иного пространства, в которое текущее вкладывается непрерывно, но здесь это не имеет существенного значения.

Мы покажем, что матричный элемент итерации имеет вид

$$[(\mathbf{\Gamma}^{dc})^N]_{ij} = \widetilde{C}_N + \widetilde{D}_N,$$

где $\widetilde{C}_N$ – оператор, норма которого убывает с ростом N факториальным образом, $\widetilde{D}_N$ – оператор конечного ранга.

Для упрощения записи рассмотрим случай, когда все потенциалы равны между собой, $v_i = v$, а в парных подсистемах возможно лишь одно двухчастичное состояние, то есть $\psi_n^i(x) = \psi_1(x)$. Тогда

$$\Gamma_i^{dc}(\lambda) = v(x_i)\frac{\psi_1(x_i)\psi_1(x_i')e^{i\sqrt{\lambda-\lambda_1}|y_i-y_i'|}}{2\sqrt{|\lambda_1|}\sqrt{\lambda-\lambda_1}}.$$

Как мы увидим позже, это ограничение не является не принципиальным. Так же для определённости рассмотрим элемент $i = j = 1$. При этом нам необходимо это сделать лишь для достаточно малых $\operatorname{Im}\lambda > 0$, поскольку при прочих λ операторы "очень хорошие", то есть действуют в пространство функций убывающих экспоненциальным образом. Положим

$$\Gamma_i^{dc,\pm}(z_i, z'|\lambda) = \theta\left(\pm(y_i - y_i')\right)\Gamma_i^{dc}(z_i, z'|\lambda)$$

или

$$\Gamma_i^{dc,\pm}(z_i, z_i', \lambda) = v(x_i)\theta\left(\pm(y_i - y_i')\right)\frac{\psi_1(x_i)\psi_1(x_i')}{2\sqrt{|\lambda_1|}\sqrt{\lambda-\lambda_1}}e^{\pm i\sqrt{\lambda-\lambda_1}y_i}e^{\mp i\sqrt{\lambda-\lambda_1}y_i'}.$$

В первой строке представим

$$\Gamma_1^{dc} = \Gamma_1^{dc,+} + \Gamma_1^{dc,-} = \Gamma_1^{dc,+} + \left(1 - \theta(y_1 - y_1')\right)\Gamma_1^{dc,-} = \widetilde{\Gamma}_1^{dc,+} + \widetilde{\Gamma}_1^{dc},$$

где мы использовали тождество $(1 - \theta(y_1 - y_1')) = \theta(y_1' - y_1)$ и ввели обозначения

$$\widetilde{\Gamma}_1^{dc,+}(z_1, z_1', \lambda) = v(x_1)\theta(y_1 - y_1')\frac{\psi_1(x_1)\psi_1(x_1')}{\sqrt{|\lambda_1|}\sqrt{\lambda-\lambda_1}}\,i\sin\left(\sqrt{\lambda-\lambda_1}(y_1 - y_1')\right),$$

$$\widetilde{\Gamma}_i^{dc}(z_i, z_i', \lambda) = v(x_i)\frac{\psi_1(x_i)\psi_1(x_i')}{2\sqrt{|\lambda_1|}\sqrt{\lambda-\lambda_1}}e^{-i\sqrt{\lambda-\lambda_1}(y_i-y_i')}.$$

Похожим образом введем при $i \neq 1$ операторы

$$\widetilde{\Gamma}_i^{dc,+}(z_i, z_i', \lambda) = v(x_i)\theta(-(y_i - y_i'))\frac{\psi_1(x_i)\psi_1(x_i')}{\sqrt{|\lambda_1|}\sqrt{\lambda-\lambda_1}} \times i\sin\left(-\sqrt{\lambda-\lambda_1}(y_i - y_i')\right)$$

и

$$\widetilde{\Gamma}_i^{dc}(z_i, z_i', \lambda) = v(x_i)\frac{\psi_1(x_i)\psi_1(x_i')}{2\sqrt{|\lambda_1|}\sqrt{\lambda-\lambda_1}}e^{i\sqrt{\lambda-\lambda_1}(y_i-y_i')}.$$

Здесь инверсия в направлении связана с тем, что $\langle e_{y_i}, e_{y_j}\rangle < 0$. Положим

$$\mathbf{\Gamma}^{dc} = \widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{dc,+} + \widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{dc}.$$

Заметим, что $\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{dc}$ – конечномерный оператор, элементы которого это проекторы, умноженные на v_i:

$$v(x_i)q_{ij}(z)(\cdot, q_{ij}).$$

Здесь $\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{dc,+}$ – оператор "типа Вольтерра", такой что в его итерациях элементы $\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{dc,+}_{11}$ убывают по норме со скоростью факториала. Сперва продемонстрируем эту идею при $\operatorname{Im}\lambda = 0$.

Элементы матрицы $(\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{dc,+})^n$, состоят из альтернирующих произведений, причем

$$\left(\left(\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{dc,+}\right)^n\right)_{ij} = \Gamma_i^{dc,+}\left[\left(\left(\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{dc,+}\right)^{n-1}\right)_{lj} + \left(\left(\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{dc,+}\right)^{n-1}\right)_{mj}\right],$$

где $m \neq l \neq i$. Это позволит нам провести доказательство по индукции.

Посмотрим на первую итерацию, заменив при этом в $\Gamma_2^{dc,+}$ и $\Gamma_3^{dc,+}$ переменные y_2, y_2', y_3, y_3' на переменные с противоположным знаком.

$$|\widetilde{\Gamma}_1^{dc,+}\widetilde{\Gamma}_j^{dc,+}(z_i, z_j'')| \leqslant |\frac{C|v(x_i)||\psi_1(x_i)||\psi_1(x_j'')|}{|\lambda_1|(|\lambda-\lambda_1|)}$$
$$\int dy_i' \int dx_i' |v(x_j')\psi_1(x_j')\psi_1(x_i')|\theta(y_i - y_i')\theta(y_j' - y_j'').$$

где $j = 2$ или $j = 3$. Заметим, что первый столбец действует на пространство $v(x_1)\psi_1(x_1) \times B(\mathbb{R})$, следовательно все интегралы быстро сходятся в силу компактности носителя и убывания ψ_1:

$$|\widetilde{\Gamma}_1^{dc,+}\widetilde{\Gamma}_j^{dc,+} f_1(y_1'')v_1(x_1'')\psi_1^1(x_1'')| \leqslant C\|f\|_B \frac{|v(x_1)||\psi_1(x_1)|}{|\lambda_1|(|\lambda-\lambda_1|)}$$
$$\times \int dy_i' \int dx_i' |v(x_j')\psi_1(x_j')\psi_1(x_1')|\theta(y_1 - y_1').$$

Положим

$$f_{ij}(y_i) = \int\limits_{-\infty}^{y_i} dy_i' \int dx_i' |v(x_j')\psi_1(x_j')\psi_1(x_i')|$$

и заметим что $f_{12} = f_{23} = f_{31}$ и $f_{21} = f_{13} = f_{32}$ как функция одной переменной. Рассмотрим элемент матрицы третьей итерации $\left((\widetilde{\mathbf{\Gamma}}_i^{dc,+})^3\right)_{11}$

$$\left|\widetilde{\Gamma}_1^{dc,+}(\widetilde{\Gamma}_2^{dc,+}\widetilde{\Gamma}_3^{dc,+} + \widetilde{\Gamma}_3^{dc,+}\widetilde{\Gamma}_2^{dc,+})fv_1\psi_1\right| \leqslant \frac{C\|f\||v(x_1)||\psi_1(x_1)|}{|\lambda_1|^{3/2}(|\lambda-\lambda_1|)^{3/2}}$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{y_1} dy_1' \int dx_1'(|v(x_2')\psi_1(x_2')\psi_1(x_1')|f_{12}(y_2') + |v(x_3')\psi_1(x_3')\psi_1(x_1')|f_{13}(y_3'))$$

с некоторой константной C. Мы воспользовались замеченным ранее равенством. Теперь заметим, что под интегралом

$$f_{12}(y_2') \leqslant f_{12}(ay_1' + b)$$

в силу огранниченности носителя потенциала и монотонности функции. Постояные a, b зависят от v, ψ_1. То есть имеем (добавив положительные слагаемые)

$$\begin{aligned}
&\left|\widetilde{\Gamma}_1^{dc,+}(\widetilde{\Gamma}_2^{dc,+}\widetilde{\Gamma}_3^{dc,+} + \widetilde{\Gamma}_3^{dc,+}\widetilde{\Gamma}_2^{dc,+})fv_1\psi_1\right| \\
\leqslant &\frac{C\|f\||v(x_1)||\psi_1(x_1)|}{|\lambda_1|^{3/2}(|\lambda-\lambda_1|)^{3/2}} \int\limits_{-\infty}^{y_1} dy_1'(f_{12}(ay_1'+b) + f_{13}(a'y_1'+b)) \\
\times &\int dx_1'(|v(x_2')\psi_1(x_2')\psi_1(x_1')| + |v(x_3')\psi_1(x_3')\psi_1(x_1')|).
\end{aligned}$$

Наконец, заметим, что для $y_1' \in (-\infty, y_1)$ верно

$$g(y_1') = \int dx_1'(|v(x_2')\psi_1(x_2')\psi_1(x_1')| + |v(x_3')\psi_1(x_3')\psi_1(x_1')|) \leqslant C'g(ay_1' + b)$$

с некоторой константой C'. Это проверяется явно для достаточно больших (по абсолютной величине) y_1'. Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\left|\widetilde{\Gamma}_1^{dc,+}(\widetilde{\Gamma}_2^{dc,+}\widetilde{\Gamma}_3^{dc,+} + \widetilde{\Gamma}_3^{dc,+}\widetilde{\Gamma}_2^{dc,+})fv_1\psi_1\right| \leqslant \frac{C'C\|f\||v(x_1)||\psi_1(x_1)|}{|\lambda_1|^{3/2}(|\lambda-\lambda_1|)^{3/2}} \\
&\quad \times \int\limits_{-\infty}^{C'y_1} dy_1' \frac{1}{2a}\frac{d}{dy_1}(f_{12}(ay_1'+b) + f_{13}(ay_1'+b))^2.
\end{aligned}$$

В последующих итерациях в общем случае индукцией мы получаем оценку вида

$$\left|\left(\left(\widetilde{\mathbf{\Gamma}}_i^{dc,+}\right)^N\right)_{11} f v_1 \psi_1\right| \leqslant \frac{CC'\|f\||v(x_1)||\psi_1(x_1)|}{|\lambda_1|^{N/2}(1+|\lambda-\lambda_1|)^{N/2}} \times \frac{(f_{12}(\rho^{N-1}y_1')+f_{13}(\rho^{N-1}y_1'))^{N-1}}{(N-1)!a^{N-1}}.$$

Здесь ρ – соответствующая замена из оценок выше, $\rho y = ay + b$. Каждый элемент матрицы $\left(\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{dc,+}\right)^N$ содержит не более чем 2^{N-1} слагаемых такого вида, следовательно итерации убывают. Для остальных элементов матрицы рассуждение проводится по аналогии. Таким образом,

$$(\mathbf{\Gamma}^{dc})^N = \widetilde{C}_N + \widetilde{D}_N.$$

Для общего случая (разные потенциалы и конечное число связанных состояний в подсистемах) достаточно взять

$$v(x) = \max_i |v_i(x)|, \quad \psi_1(x) = \max_{i,n} |\psi_n^i(x)|.$$

Тогда аналогичные оценки становятся возможными. При этом число слагаемых возрастает, но вновь ограничивается степенным образом. При $\operatorname{Im}\lambda > 0$, нам необходима оценка при $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ и при $x > t$

$$\left|\frac{\sin(k(x-t))}{k}\right| \leqslant C\frac{e^{\operatorname{Im} k(x-t)}}{1+|k|}$$

и ограничение $0 < \operatorname{Im}\lambda < \sqrt{3}/2 \inf \lambda_n$. С небольшими изменениями вновь становится возможна такая же оценка. Наконец, мы приходим к тому, что для любого $\varepsilon > 0$, при $\inf_n |\lambda - \lambda_n| > \varepsilon$, для достаточно больших N обратимость оператора записанного в виде

$$(I + \mathbf{\Gamma}^{dc})^{-1} = \left(I + \sum_{n=1}^{N-1} (-\mathbf{\Gamma}^{dc})^n\right)(I - (-\mathbf{\Gamma}^{dc})^N)^{-1}$$

сводится к обращению

$$(I - (-\mathbf{\Gamma}^{dc})^N)^{-1},$$

при этом уравнение становится Фредгольмовым и анализ его разрешимости остается в рамках схемы уравнений Фаддеева (леммы 3.2 работы [1]).

Список литературы

1. И. В. Байбулов, А. М. Будылин, С. Б. Левин, *Задача рассеяния трех одномерных короткодействующих квантовых частиц при наличии связанных состояний в парных подсистемах. Координатные асимптотики ядра резольвенты и собственных функций абсолютно непрерывного спектра.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **483** (2019), 5–18.
2. Л. Д. Фаддеев, *Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц.* — Тр. МИАН СССР **69** (1963), 3–122.
3. I. V. Baibulov, A. M. Budylin, S. B. Levin, *On justification of the asymptotics of eigenfunctions of the absolutely continuous spectrum in the problem of three one-dimensional short-range quantum particles with repulsion.* — J. Math. Sci. **238**, No. 5 (2019), 566–590.

Baibulov I. V. Justification of the asymptotics of three one-dimensional short-range particles scattering problem solution for the processes $3 \to 2$.

The present work is a continuation of the 3 body one-dimensional scattering problem in the presence of the bound states. Full description and justification of the generalized eigenfunction asymptotics in the case of the repulsive potentials have a simple geometric description. In the case of the presence of the bound states, additional terms appear in the eigenfunction asymptotics. In previous works during the analysis of Faddeev's equations in coordinate representation an operator of special form appeared which was connected to scattering amplitude and which did not have a simple description. In the current work, some properties of that operator are described. In particular, we derive the solvability of Faddeev's equations.

Санкт-Петербургский
международный математический институт
им. Л. Эйлера
E-mail: molezz@bk.ru

Поступило 1 ноября 2020 г.