

А. Е. Баранов, А. И. Попов, И. Ю. Попов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ВОДЫ, СОСРЕДОТОЧЕННЫХ В ОКРЕСТНОСТИ ДВИЖУЩИХСЯ ТОЧЕК

§1. ВВЕДЕНИЕ

Одно из замечательных достижений В. М. Бабича и его научной группы — это разработка теории решений, сосредоточенных в окрестности движущихся по лучам точек. Такие решения принято называть квазифотонами, хотя их физическая природа не обязательно связана с оптикой, электромагнитными волнами. Это могут быть и акустические волны, и волны на поверхности воды. Основные положения этой теории изложены в монографии [1]. Сначала теория была создана для электромагнитных и акустических волн [2–6]. Позже этот подход был разработан для волн на поверхности жидкости [7,8] и для упругой среды [9–11]. Схожий подход используется и в квантовой механике [12,13].

Задачи о распространении волн на поверхности океана всегда представляют большой интерес. Их актуальность связана с важностью прогнозирования природных явлений для обеспечения безопасности людей и бесперебойного функционирования различных технических систем. В настоящей работе мы рассматриваем решения квазифотонного типа для волн на поверхности воды. Несмотря на то, что асимптотическая теория таких решений уже достаточно хорошо разработана и обоснована, расчеты возможных квазифотонных решений для реальных физических систем отсутствуют. Именно этот пробел мы и заполняем в этой статье. А именно, в работе построена численная модель движения квазифотонов на примере профиля дна Финского залива в прибрежной области Сестрорецкого подходного фарватера.

Ключевые слова: квазифотон, пространственно-временной луч, волна, численная модель, Финский залив.

§2. КВАЗИФОТОННОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ВОДЫ. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Приведем кратко основные результаты о квазифотонах на поверхности водоема конечной глубины [7, 8].

Пусть глубина D – медленно меняющаяся функция:

$$\begin{aligned} D &= D(\xi_1, \xi_2), \\ -D(\xi_1, \xi_2) &\leq z \leq 0, \\ \xi_i &= \varepsilon x_i, \quad -\infty < x_i < \infty, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

где ε – малый параметр задачи (в качестве которого необходимо взять скорость изменения глубины водоема), ξ_i – медленно меняющиеся координаты на плоской невозмущенной поверхности воды. Анзатц для пространственно-временного лучевого метода выбираем в виде [1]:

$$\Phi \sim e^{i\frac{\theta(\tau, \xi_1, \xi_2)}{\varepsilon}} \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j(\tau, \xi_1, \xi_2, z)(i\varepsilon)^j, \quad \tau = \varepsilon t. \quad (1)$$

где τ – медленно меняющееся время, θ – эйконал. Мы рассмотрим только главный член ряда Φ_0 . Уравнению для эйконала θ можно придать следующий вид [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + H(\xi^1, \xi^2, \theta_1, \theta_2) &= 0, \quad H = \sqrt{g \cdot k \cdot \tanh(k \cdot D)}, \\ \theta_i &= \frac{\partial \theta}{\partial \xi_i}, \quad i = 1, 2, \quad k = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где g – ускорение свободного падения, k – волновой вектор.

Традиционный метод решения уравнения (2) – метод характеристик (для подобной задачи он описан в работе [8]):

$$\frac{d\tau}{ds} = 1, \quad \frac{d\theta}{ds} = 0, \quad \frac{d\xi_i}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \theta_i}, \quad \frac{d\theta_i}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i}, \quad (3)$$

$$\theta|_{s=0} = v_0(\xi_1, \xi_2), \quad \theta_i|_{s=0} = \frac{\partial(\theta|_{s=0})}{\partial \xi_i}, \quad \xi_i|_{s=0} = a_i, \quad i = 1, 2,$$

где $v_0(\xi_1, \xi_2)$ – гладкая функция, задающая начальное состояние θ , a_i – начальное условие для пространственно-временного луча.

Решения $\tau = s$, $\xi_i = \xi_i(s)$ системы (3) называются бихарактеристиками уравнения или ПВ-лучами, в окрестности которых будут строиться квазифотоны.

В работах [2,3] предполагается, что θ – комплексная функция, причем $Im(\theta) \geq 0$, а равенство осуществляется только на фиксированном опорном луче, проходящем через начало координат, то есть $\xi_i(0) = 0$. Так как классическая теория характеристик – вещественная теория, неприменимая при $Im(\theta) \neq 0$, то в работе [5,7] вводится предположение, что θ – не функция в классическом смысле, а асимптотический ряд:

$$\begin{aligned} \theta(\eta_1, \eta_2) &= \theta^{(0)}(\eta_1, \eta_2) + \theta^{(1)}(\eta_1, \eta_2) + \theta^{(2)}(\eta_1, \eta_2) + \dots, \\ \eta_i &= \xi_i - \xi_i(\tau), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

где $\theta^{(r)}$ – однородный полином r -ой степени от η_i . Если $\theta^{(0)}$, $\theta^{(1)}$ – вещественные полиномы, а $\theta^{(2)}$ – квадратичная форма с положительно определенной мнимой частью, то такое решение называют квазифотонном.

Выражения для $\theta^{(r)}$ представлены в работе [7,8]:

$$\begin{aligned} \theta^{(0)} &= \text{const}, \\ \theta^{(1)} &= \sum_{i=1}^2 \theta_i \eta_i, \\ \theta^{(2)} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} \Gamma_{ij} \eta_i \eta_j, \end{aligned} \quad (4)$$

где Γ – симметричная матрица квадратичной формы $\theta^{(2)}$. Матрица Γ удовлетворяет матричному уравнению Риккати:

$$\frac{d\Gamma}{d\tau} = \Gamma A \Gamma + B \Gamma + \Gamma B^T + C,$$

где A, B, C – матрицы значений на “опорном” пространственно-временном луче следующего вида:

$$A_{i,j} = - \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_{\xi_i} \partial \theta_{\xi_j}} \right), \quad B_{i,j} = - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^i \partial \theta_{\xi_j}} \right), \quad C_{i,j} = - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \right). \quad (5)$$

Решение (5) находится в виде

$$\Gamma = ZY^{-1}, \quad (6)$$

где Z, Y – решения следующей системы:

$$\begin{cases} \frac{dZ}{d\tau} = BZ + CY \\ \frac{dY}{d\tau} = -AZ - B^T Y. \end{cases} \quad (7)$$

Также необходимо, чтобы матрицы Z и Y удовлетворяли следующим условиям:

$$Y^T Z - Z^T Y = 0, \quad (8)$$

$$Y^* Z - Z^* Y = iI, \quad (9)$$

где I – единичная матрица, T – операция транспонирования, $*$ – операция эрмитова сопряжения. Условия (8), (9) обеспечивают симметричность Γ и положительную определенность ее мнимой части (что обеспечит нам экспоненциальное убывание квазифотонного решения при отдалении от пространственно-временного луча). Помимо этого, условие (9) обеспечивает существование Y^{-1} , то есть неравенство $\det Y \neq 0$.

Итак, для того, чтобы приступить к построению квазифотона, необходимо только выражение для главного члена Φ_0 ряда в разложении (1), которое выведено в работах [7, 8] в следующем виде:

$$\Phi_0 \sim \frac{1}{\sqrt{\det Y}} \cdot \frac{\cosh(k(z + D))}{\cosh(k \cdot D)}, \quad (10)$$

где в качестве z мы возьмем значение $z = 0$, так как рассматриваем квазифотонное решение на поверхности воды, поэтому в формуле (10) в числителе и знаменателе сократятся гиперболические косинусы.

Конечное выражение для квазифотона в первом приближении выглядит следующим образом:

$$\Phi \sim \frac{e^{\frac{i}{z}(\theta^{(0)} + \theta^{(1)} + \theta^{(2)})}}{\sqrt{\det Y}}. \quad (11)$$

§3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Решение задачи численного моделирования разбито на три этапа: построение рельефа дна Финского залива в прибрежной зоне Сестрорецкого подходного фарватера, построение пространственно-временного луча, построение квазифотона в окрестности этого пространственно-временного луча.

3.1. Построение прибрежного рельефа дна Финского залива.

Для того, чтобы построить квазифотонное решение и пространственно-временные лучи, в окрестности которых оно сосредоточено, необходимо построить матрицу карты глубин, которая будет являться дискретным аналогом функции глубины $D(\xi_1, \xi_2)$. Был использован ресурс [14], предлагающий карты рельефа дна Финского залива в открытом доступе.

Для построения карты рельефа дна были покоординатно выписаны точки на карте в трехмерной форме (x, y, z) , а затем интерполированы кубическими сплайнами. В результате получилась дискретная равномерная сетка глубин, представленная на рис. 1. Поскольку исходная

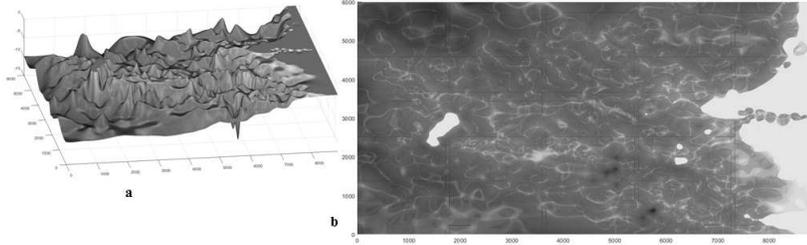


Рис. 1. Построенная карта глубин методом интерполяции кубическими сплайнами, а) вид сбоку; б) вид сверху.

сетка указанных глубин неравномерная, для получения равномерной сетки узлов проводилась интерполяция кубическими сплайнами для соседних от точки узлов, как показано на рис. 2.

3.2. Построение пространственно-временных лучей. Для того, чтобы построить ПВ-лучи, необходимо решить каноническую систему уравнений (3). Вычислив производные от $H(\xi^1, \xi^2, \theta_1, \theta_2)$, получим следующую систему:

$$\frac{d\xi_i}{ds} = \frac{\theta_i(2 \cdot D \cdot \kappa \cdot \operatorname{csch}(2 \cdot D \cdot \kappa) + 1) \cdot H}{2\kappa^2}, \quad (12)$$

$$\frac{d\theta_i}{ds} = -\kappa \frac{\partial D}{\partial \xi_i} \operatorname{csch}(2 \cdot D \cdot \kappa) \cdot H, \quad (13)$$

$$\theta|_{s=0} = v_0(\xi_1, \xi_2), \quad \theta_i|_{s=0} = \frac{\partial(\theta|_{s=0})}{d\xi_i}, \quad \xi_i|_{s=0} = a_i, \quad i = 1, 2. \quad (14)$$

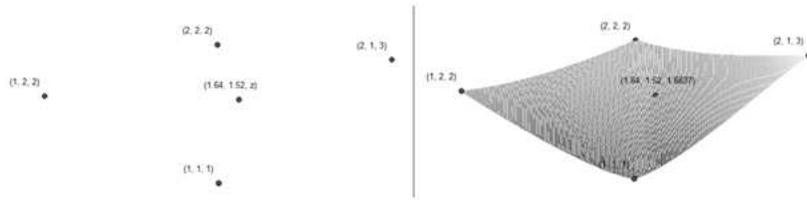


Рис. 2. Узлы карты глубин и точка, значение в которой необходимо найти (слева), интерполированная область для узлов и найденное значение для точки (справа).

Решая численно с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка задачу Коши для системы уравнений (12), (13) с начальными условиями (14) мы получаем бихарактеристики $\xi_i = \xi_i(s)$ (их зависимость от времени можно проследить на рис. 4), которые будут отображать положение пространственно-временного луча в момент времени s , а также $\theta_i = \theta_i(s)$. Среди характерных структур, имеющих в построенном поле лучей можно отметить структуры, показанные на рис. 3. На рис. 4 показаны конкретные лучи, для которых далее будет рассчитываться квазифотон, на рис. 5

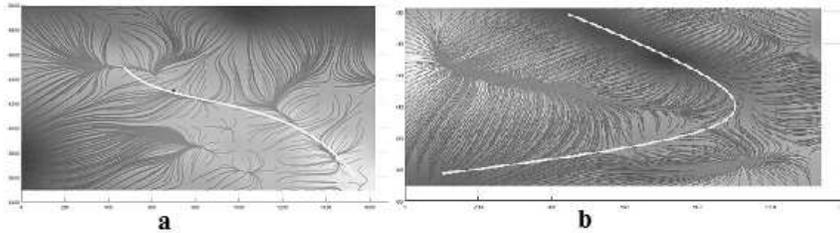


Рис. 3. Поле ПВ-лучей $\xi_i(s)$ для разных профилей дна: а) профиль типа “хребет”; б) профиль типа “ров”.

На рис. 6 более теплые цвета (от холодного синего к теплему оранжевому) показывают, в какие области будут стремиться пространственно-временные лучи, в окрестности которых будет сосредоточен квазифотон.

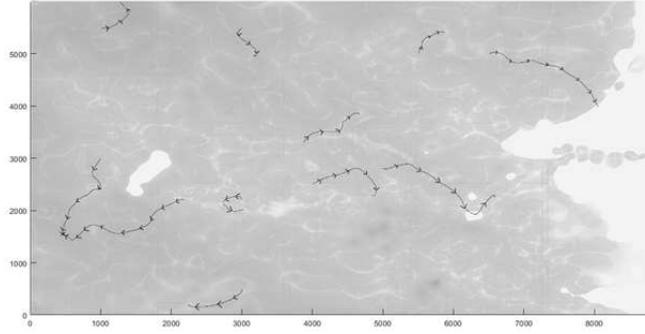


Рис. 4. Траектории ПВ-лучей $\xi_i(s)$ для разных начальных a_i при прочих равных начальных данных; на карте показаны лучи, для которых далее будут рассчитаны квазифотоны.

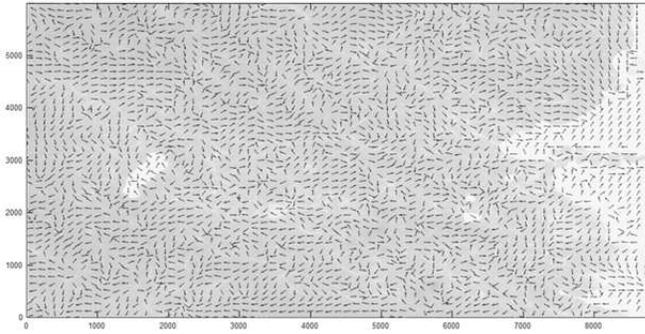


Рис. 5. Градиент групповых скоростей $\xi_i(s)$ ПВ-лучей.

3.3. Построение квазифотонного решения в окрестности пространственно-временного луча. Для построения квазифотона в окрестности ПВ-луча, необходимо решить систему матричных дифференциальных уравнений (7). Для этого находим выражения для матриц A , B , C из формул (5):

$$A_{i,i} = \frac{H \cdot \left(2\kappa^2 (2D \cdot \kappa \cdot \operatorname{csch}(2D \cdot \kappa) + 1) - \theta_i^2 \left(D^2 \kappa^2 \left(\operatorname{csch}^2(D \cdot \kappa) + 3\operatorname{sech}^2(D \cdot \kappa) \right) + 3 \right) \right)}{4\kappa^4}, \quad (15)$$

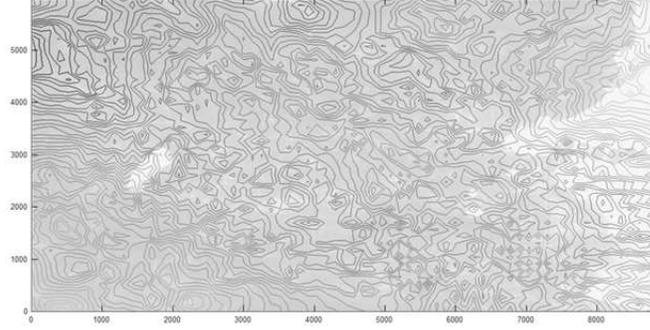


Рис. 6. Линии уровня, отображающие области в момент времени s , в которые стремятся ПВ-лучи.

$$A_{i,j} = A_{j,i} = \frac{g^2 \theta_i \theta_j (8D^2 \cdot \kappa^2 (1 - 2 \cosh(2D \cdot \kappa)) - 3 \cosh(4D \cdot \kappa) + 3) \operatorname{sech}^4(D \cdot \kappa)}{32\kappa^2 \cdot H^3}, \quad (16)$$

$$B_{i,j} = \frac{g^2 \kappa \frac{\partial D}{\partial \xi_i} \theta_j \operatorname{sech}^4(D \cdot \kappa) \cdot (2D \cdot \kappa (1 - 2 \cosh(2D \cdot \kappa)) + 3 \sinh(2D \cdot \kappa))}{8 \cdot H^3}, \quad (17)$$

$$C_{i,j} = \frac{g^2 \kappa^3 \operatorname{sech}^4(D \cdot \kappa) \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \sinh(2D \cdot \kappa) + \frac{\partial D}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial D}{\partial \xi_2} \kappa (1 - 2 \cosh(2D \cdot \kappa)) \right)}{4 \cdot H^3}. \quad (18)$$

Из условий (8), (9) получаются следующие выражения для матриц $Z|_{\tau=0}$, $Y|_{\tau=0}$:

$$Z|_{\tau=0} = 0.5iI, Y|_{\tau=0} = \cdot I, \quad (19)$$

где I – единичная матрица.

Решая задачу Коши методом Рунге–Кутты 4-го порядка для системы матричных дифференциальных уравнений (7) с начальными данными (19), при этом вычисляя матрицы A , B , C из уравнений (15), (16), (17), (18) на "опорном" пространственно-временном луче, получаем матрицы $Z(\tau)$ и $Y(\tau)$. Затем вычисляем матрицу $\Gamma(\tau)$ при помощи представления (6), подставляем ее в выражение (4) для вычисления квадратичной формы $\theta^{(2)}$. Получившийся в результате квазифотон, построенный с помощью разложения (11), можно увидеть на рис. 7.

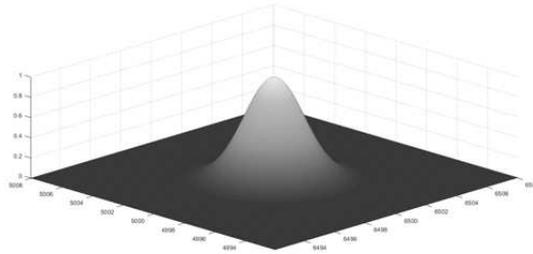


Рис. 7. Квазифотонное решение в момент времени τ_1 в окрестности “опорного” ПВ-луча в точке $\xi_1|_{\tau=\tau_1}$, $\xi_2|_{\tau=\tau_1}$.

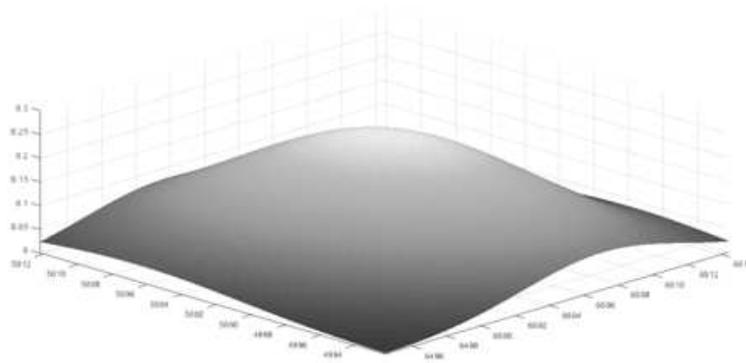


Рис. 8. Квазифотонное решение в момент времени τ_2 в окрестности “опорного” ПВ-луча в точке $\xi_1|_{\tau=\tau_2}$, $\xi_2|_{\tau=\tau_2}$.

§4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате работы была полностью выполнена поставленная задача: была построена и представлена численная модель квазифотонного решения, сосредоточенного в окрестности пространственно-временного луча. Выяснилось, что квазифотон во время движения постепенно “расплывается”. При анализе связанной с этим физической картины

следует учесть, что для решения были введены “медленные” горизонтальные координаты и “медленное” время. Для получения реальных горизонтальных координат и времени следует умножить их в нашем случае на 200. Пример того, какую форму приобретает квазифотонное решение через некоторое время после того, как было зафиксировано (рис. 7), можно пронаблюдать на рис. 8. За прошедшее между двумя картинками время $(\tau_2 - \tau_1)/\varepsilon$ квазифотон прошел 1,0 км (в реальном масштабе).

Проведенные численные эксперименты при разных начальных данных $v_0(\xi_1, \xi_2)$ и a_i для ξ_i и различных ПВ-лучей (приведенных на Рис. 4) показали примерно одинаковый характер расплывания волнового пакета квазифотона. В данной работе мы не рассматривали формирование волн квазифотонного типа, а исследовали только их эволюцию при заданных начальных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков, *Пространственно-временной лучевой метод: линейные и нелинейные волны*. — Ленинград: Издательство ЛГУ (1985), 272 с.
2. В. М. Бабич, В. В. Улин, *Комплексный пространственно-временной лучевой метод и квазифотоны*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **117** (1981), 5–11.
3. В. М. Бабич, В. В. Улин, *Комплексные лучевые решения и собственные функции, сосредоточенные в окрестности замкнутой геодезической*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **104** (1980), 6–13.
4. В. Е. Номофилов, *Асимптотические решения системы уравнений второго порядка, сосредоточенные в окрестности луча*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **104** (1980), 170–179.
5. А. П. Качалов, *Система координат при описании квазифотонов*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **140** (1984), 73–76.
6. В. М. Бабич, *Квазифотоны и пространственно-временной лучевой метод*. — Записки научных семинаров ПОМИ, **342** (2008), 5–13.
7. В. М. Бабич, А. И. Попов, *Квазифотоны волн на поверхности тяжелой жидкости*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **379** (2010), 5–23.
8. В. М. Бабич, А. И. Попов, *Асимптотическое решение уравнения Гамильтона-Якоби, сосредоточенное вблизи поверхности*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **393** (2011), 23–28.
9. А. П. Качалов, *Нестационарные электромагнитные гауссовы пучки в неоднородной анизотропной среде*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **264** (2000), 83–100.
10. A. S. Golubeva, *Solutions of the membrane equation concentrated near extremal loops*. — Zap. Nauchn. Sem. POMI, **230**, POMI, St. Petersburg, 1995, 41–51; J. Math. Sci. (New York), 91:2 (1998), 2725–2732

11. M. M. Popov, *Ray Method and Gaussian Beam Method for Geophysicists*. — EDUFBA, Salvador (2002).
12. В. В. Белов, А. Ю. Трифонов, А. В. Шаповалов, *Квазиклассическое траекторно-когерентное приближение для уравнений типа Хартри*. — Теоретическая и математическая физика, **130(8)** (2002), 460–492.
13. V. G. Bagrov, V. V. Belov, A. Y. Trifonov, *Semiclassical trajectory-coherent approximation in quantum mechanics I. High-order corrections to multidimensional time-dependent equations of Schrödinger type*. — Annals of Physics. **246(2)** (1996), 231–290.
14. Карта глубин Финского залива. <http://fishingpiter.ru/maps/zaliv/>.

Baranov A. E., Popov A. I., Popov I. Yu. Modelling of surface water waves concentrated near moving points.

A numerical model of wave packets on the surface of the reservoir was built with slowly changing depth, concentrated in the vicinity moving points along space-time rays with group velocity (such wave packets are called quasiphotons). At the bottom, profile of the reservoir was taken as the bottom profile of the Gulf of Finland in the coastal zone of the Sestroretsk approach fairway.

Университет ИТМО,
197101, Россия, Санкт-Петербург,
Кронверкский пр., 49

E-mail: abaranov1996@gmail.com

E-mail: popov239@gmail.com

E-mail: popov1955@gmail.com

Поступило 01 ноября 2020 г.