Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 493, 2020 г.

В. М. Бабич

ПРИЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ АДАМАРА К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОПИСАНИЮ ВОЛНЫ ЦУНАМИ, ВОЗНИКШЕЙ ОТ ЛОКАЛИЗОВАННОГО ИСТОЧНИКА

§1. Введение

В работе рассматривается задача Коши для двумерного волнового уравнения с переменной скоростью. Скорость – гладкая положительная функция. Источник колебаний локализован. Такая задача Коши описывает (при должном выборе начальных данных и скорости) волну цунами (см. [1, 2]). В работе выводится приближенная формула для решения. Входящий в формулу коэффициент выражен через фундаментальное решение задачи Коши для рассматриваемого волнового уравнения (т.е. через функцию Адамара). О других подходах к построению приближенных формул, описывающих волну цунами, см. [1, 2] и указанную там литературу, где решаются более общие задачи, чем задача, рассматриваемая в настоящей заметке. Наш подход не использует сложной математической техники и показывает связь полученного решения с таким классическим понятием как элементарное решение (Адамара) гиперболического уравнения.

§2. О функции Адамара

Функцию Адамара для волнового оператора

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \operatorname{div}(c^2(x)\ \mathrm{grad}), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad c \in C^\infty, \quad c^2 > 0, \tag{1}$$

можно определить как фундаментальное решение задачи Коши для оператора $\Box$, т.е. решение задачи

$$\Box H(t,x,y) = \delta(t, x-y), \quad H|_{t<0} = 0,\ x, y \in \mathbb{R}^2. \tag{2}$$

Ключевые слова: локализованный источник, элементарное решение Адамара, волна цунами.

Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00627.

Здесь y фиксированная точка, где сосредоточена δ-функция (см. соответствующие определения в монографии [3]). По терминологии классической книги Адамара [4] $H(t,x,y)$ – элементарное решение уравнения $\Box u = 0$.

Если t, $|x|$, $|y|$ достаточно малы, то элементарное решение имеет вид:

$$H(t,x,y) = U(t,x,y)(t^2 - \tau^2(x,y))_+^{-\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Здесь U – функция своих аргументов, гладкая в области, занятой колебаниями, $\tau(x,y)$ – эйконал:

$$\tau(x,y) = \min \int\limits_y^x \frac{ds}{c}. \tag{4}$$

Минимум берется по всем гладким кривым, соединяющим точки y и x, а $(t^2 - \tau^2)_+^{-\frac{1}{2}} = (t^2 - \tau^2)^{-\frac{1}{2}}$ при $t^2 - \tau^2 > 0$ и 0 при $t^2 - \tau^2 \leqslant 0$. Подробнее об элементарном решении см. монографию [4], ($t^2 - \tau^2$ это Γ в обозначениях Адамара, см. [4] гл. 3).

Зная функцию Адамара, можно в квадратурах решить соответствующую задачу Коши.

Рассмотрим следующий пример (см. [2]):

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \operatorname{div}(c^2(x)\operatorname{grad} \eta) = \frac{\partial \delta(t)}{\partial t} V\left(\frac{x}{\mu}\right), \quad \eta|_{t<0} = 0. \tag{5}$$

Здесь $V(y)$ – гладкая положительная достаточно быстро убывающая на бесконечности функция в $\mathbb{R}^2$, $\mu > 0$ – малый параметр задачи. Функция V характеризует локализацию источника колебаний.

Решение задачи Коши (25) дает формула:

$$\eta(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} \int H(t,x,y) V\left(\frac{y}{\mu}\right) dy. \tag{6}$$

Область, по которой берётся интеграл (6) состоит из таких точек y, для которых $\tau(x,y) < t$ (см. формулу (3)). Этой же формулой выражается решение следующей задачи Коши (см. [2]):

$$\Box \eta = 0,\ \eta|_{t=0} = V\left(\frac{x}{\mu}\right),\ \left.\frac{\partial \eta}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{7}$$

Под приближенной формулой для η при малых μ мы понимаем асимптотическую формулу для η при $\mu \to +0$. Ее вывод – цель настоящей заметки.

Все рассмотрения проводятся в предположении, что $|\tau - t| > \mathrm{const} > 0$, т.е. не в окрестности фронта волны цунами – там уравнение $\Box\eta = 0$ ее не описывает.

Асимптотику η при $\mu \to +0$ мы будем искать в предположении, что функция V такая же, как во многих работах (например, [5, 2]), посвященных близкой тематике:

$$V(x) = A\left(1 + \frac{x_1^2}{b_1^2} + \frac{x_2^2}{b_2^2}\right)^{-3/2}, \quad x = (x_1, x_2). \tag{8}$$

Здесь A, b_1, b_2 – заданные положительные константы.

Пусть $\varepsilon > 0$ – фиксированная малая положительная константа, точка x и t тоже фиксированы. $H(t, x, y)$ предполагается гладкой по y при $|y| \geqslant \varepsilon'$, где $\varepsilon' > \varepsilon$. Интеграл (6) разобьется на два слагаемых:

$$\eta(t, x) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|y|\leqslant\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|y|>\varepsilon} = Q_0 + Q_1. \tag{9}$$

Асимптотика Q_0 легко находится, а Q_1 – оценивается, что достаточно для нашей цели.

§3. Нахождение асимптотики Q_0

В силу гладкости $H(t, x, y)$ мы можем применить к $\frac{\partial}{\partial t}H(t, x, y)$ формулу Тейлора:

$$\frac{\partial}{\partial t}H(t, x, y) = \frac{\partial}{\partial t}H(t, x, 0) + \frac{\partial}{\partial t}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial H}{\partial y_j}y_j + R, \tag{10}$$

где R остаточный член. Соответственно Q_0 разобьется на три слагаемых:

$$\begin{aligned} Q_0 = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|y|\leqslant\varepsilon} H(t, x, 0)V\left(\frac{y}{\mu}\right)dy + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|y|\leqslant\varepsilon}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial H}{\partial y_j}y_j V\left(\frac{y}{\mu}\right)dy \\ + \int\limits_{|y|\leqslant\varepsilon} RV\left(\frac{y}{\mu}\right)dy = B_0 + B_1 + B_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Найдем сначала асимптотику B_0.

$$
\begin{aligned}
B_0 &= \frac{\partial}{\partial t} H(t,x,0) \int\limits_{|y|\leqslant\varepsilon} V\left(\frac{y}{\mu}\right) dy \\
&= \frac{\partial}{\partial t} H(t,x,0) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} V\left(\frac{y}{\mu}\right) dy - \int\limits_{|y|>\varepsilon} V\left(\frac{y}{\mu}\right) dy \right).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Интеграл $\int\limits_{|y|>\varepsilon}$ нетрудно оценить

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{|y|>\varepsilon} V\left(\frac{y}{\mu}\right) dy &= \int\limits_{|y|>\varepsilon} \frac{A dy}{\left(1+\frac{1}{\mu^2}\left(\frac{y_1}{b_1}\right)^2+\frac{1}{\mu^2}\left(\frac{y_2}{b_2}\right)^2\right)^{3/2}} \\
&\leqslant \int\limits_{|y|>\varepsilon} \frac{A dy}{\left(\frac{y_1^2+y_2^2}{\mu^2 b^2}\right)^{3/2}}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Здесь $b = \max(b_1, b_2)$. Вводя полярные координаты $y_1 = \rho\cos\varphi, y_2 = \rho\sin\varphi, \rho = \sqrt{y_1^2+y_2^2} = |y|$, вычислим последний интеграл. Он равен:

$$
2\pi A \int\limits_{\epsilon}^{\infty} \frac{\mu^3 b^3 \rho d\rho}{\rho^3} = 2\pi A \mu^3 b^3 \frac{1}{\varepsilon}. \tag{14}
$$

Таким образом, порядок по μ интеграла $\int\limits_{|y|>\varepsilon}$ равен $O(\mu^3)$. Интеграл по всей плоскости (см. (12)) легко вычисляется, если сделать подстановку:

$$
\frac{y_1}{\mu b_1} = z_1, \quad \frac{y_2}{\mu b_2} = z_2, \tag{15}
$$

и перейти к полярным координатам. Окончательно получаем:

$$
B_0 = 2\pi \frac{\partial}{\partial t} H(t,x,0) A b_1 b_2 \mu^2 + O(\mu^3). \tag{16}
$$

Интеграл B_1 равен нулю, как интеграл от нечетной функции по симметричному множеству.

Интеграл B_2 просто оценить. Остаточный член R в формуле (10) оценивается $\mathrm{const}\,|y|^2 = \mathrm{const}(|y_1|^2 + |y_2|^2)$, поэтому

$$|B_2| \leqslant \iint\limits_{|y|<\varepsilon} \frac{\mathrm{const}(y_1^2 + y_2^2)dy_1dy_2}{\left(1 + \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{y_1}{b_1}\right)^2 + \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{y_2}{b_2}\right)^2\right)^{3/2}} = O(\mu^3). \tag{17}$$

Собирая полученные результаты, придем к равенству:

$$Q_0 = 2\pi\frac{\partial}{\partial t}H(t,x,0)Ab_1b_2\mu^2 + O(\mu^3). \tag{18}$$

§4. Оценка Q_1

Нам осталось оценить

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|y|>\epsilon} H(t,x,y)V\left(\frac{y}{\mu}\right)dy. \tag{19}$$

Функция V и ее производные по y_j равномерно во всей области интегрирования оцениваются выражениями вида const μ^3.

Запишем формулу для Q_1 подробнее:

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|y|>\epsilon} \left(t^2 - \tau^2(x,y)\right)_+^{-\frac{1}{2}} U(t,x,y)V\left(\frac{y}{\mu}\right)dy. \tag{20}$$

Для нахождения искомой оценки введем лучевые координаты τ, α с центром в точке x. В лучевых координатах Q_1 запишется в виде:

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\substack{|y|>\varepsilon\\ 0\leqslant\tau<t\\ 0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi}} \left(t^2 - \tau^2\right)_+^{-\frac{1}{2}} U(t,x,\bar{y}(\tau,\alpha))V\left(\frac{\bar{y}(\tau,\alpha)}{\mu}\right)\mathcal{J}d\tau d\alpha, \tag{21}$$

где $\mathcal{J} = \frac{D(y_1,y_2)}{D(\tau,\alpha)}$. Если в интеграле (21) сделать подстановку $\tau = tt_1$, то мы придем к выражению

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}(1-t_1^2)^{-\frac{1}{2}}UV\mathcal{J}dt_1d\alpha. \tag{22}$$

Учитывая оценки V, ее производных, гладкость U и ограниченность области, по которой производится интегрирование, нетрудно придти к искомой оценке

$$|Q_1| \leqslant \mathrm{const}\ \mu^3. \tag{23}$$

§5. Заключение

Учитывая формулу (18) и оценку (23), мы приходим к выводу, что асимптотика функции η вне некоторой окрестности волнового фронта дается формулой

$$\eta = 2\pi A b_1 b_2 \mu^2 \frac{\partial}{\partial t} H(t, x, 0) + O(\mu^3). \qquad (24)$$

Формула (24) соответствует тому, что при $\mu \to +0$ рассматриваемый в этой заметке источник колебаний становится всё более локализованным. В самом деле: будем рассматривать $V(\frac{y}{\mu})$ как обобщённую функцию – линейный функционал на множестве финитных гладких функций в $\mathbb{R}^2$, тогда в смысле обобщённых функций:

$$\frac{1}{\mu^2} V\left(\frac{y}{\mu}\right) \longrightarrow 2\pi b_1 b_2 \delta(y) \text{ при } \mu \to +0, \qquad (25)$$

где δ дельта-функция Дирака. Правая часть соответствует точечному источнику колебаний. Остаётся обратиться к формуле (6).

Список литературы

1. Е. Н. Пелиновский, *Гидродинамика волн цунами.* — Нижний Новгород, ИПФ РАН (1996).
2. С. Ю. Доброхотов, А. Ю. Аникин, *О приближении решений двумерного волнового уравнения с переменной скоростью и локализованной правой частью с помощью некоторых "простых" решений.* — Матем. заметки, **100**, No. 6 (2016), 825–837.
3. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними.* — М., Физматгиз (1958).
4. Ж. Адамар, *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа.* — М. Наука (1978).
5. С. Ю. Доброхотов, С. Я. Секерж-Зенькович, *Один класс точных алгебраических локализованных решений многомерного волнового уравнения.* — Матем. заметки, **88**, No. 6 (2010), 942-–945.

Babich V. M. Application of Hadamard's function to mathematical description of tsunami wave created by localized source.

A special case of the Cauchy problem for two-dimensional equation with variable velocity is considered. The source of waves is localized. An approximate formula for the solution is derived. The formula contains

derivatives of Hadamard's "elementary solution" of the wave equation and describes (in a linear approximation) tsunami wave from a localized source.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
набережная реки Фонтанки, 27,
Санкт-Петербург, 191011
E-mail: babich@pdmi.ras.ru

Поступило 01 ноября 2020 г.