

И. В. Андронов

ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ ДИФРАКЦИЯ ПОЛЯ ДИПОЛЯ НА СИЛЬНО ВЫТЯНУТОМ СФЕРОИДЕ

§1. ВВЕДЕНИЕ

При современном уровне развития вычислительной техники высокочастотные асимптотики могут служить в качестве тестового инструмента для верификации программ численного расчёта полей. Такая верификация была, например, произведена для случая акустической дифракции плоской волны на сильно вытянутом жёстком сфероиде в [1]. Для задач дифракции на сильно вытянутых телах аппроксимация, выражающаяся старшим членом асимптотики Фока [2], может быть использована только в случае очень высоких частот. С другой стороны такие задачи вызывают определённый интерес, так как в них проявляются специфические физические эффекты. В последнее время были построены асимптотические приближения в ряде задач дифракции на сильно вытянутых телах. В простейшем случае осесимметричного падения плоской волны старший член асимптотики индуцированных токов был построен в [3,4]. В этих работах рассматривался только волновой процесс, распространяющийся вперёд. В [5] были получены формулы, описывающие обратную волну, которая образуется в результате огибания прямой волной затенённого конца тела. Далее в [6] подход был расширен на случай падения под углом к оси тела, а в [7,8] была получена асимптотика дальнего поля и произведена верификация формул путём сравнения результатов с численным счётом. Вклад обратного волнового процесса при косом падении был получен в [9]. Во всех этих случаях волновое поле выражалось рядом Фурье, в котором для достижения точности, сравнимой с точностью численного расчёта, оказывалось достаточным учесть не более 10 гармоник. При этом каждая гармоника представлялась интегралом, содержащим функции Уиттекера, и интегрирование проводилось по их первому значку.

Ключевые слова: высокочастотная дифракция, сильно вытянутое тело, функции Уиттекера.

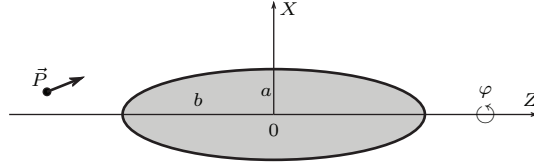


Рис. 1. Геометрия задачи.

В данной статье рассматривается дифракция поля точечного дипольного источника. Случай осевого расположения диполя с моментом параллельным оси сфероида был рассмотрен в [10]. В этой статье ориентация диполя может быть произвольной, а сам диполь может располагаться вблизи оси.

§2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача дифракции электромагнитного поля точечного диполя на сильно вытянутом идеально проводящем сфероиде. Степень вытянутости характеризуется параметром

$$\chi = 2k(b - p) \approx \frac{ka^2}{p},$$

где $k = \omega/c$ – волновое число (зависимость от времени предполагается в виде $e^{-i\omega t}$), a и b – малая и большая полуоси сфероида, $p = \sqrt{b^2 - a^2}$ – половина межфокусного расстояния. Предполагается, что параметр χ является ограниченной величиной порядка единицы, в то время как асимптотическое разложение ведётся по обратным степеням большого параметра $kp \gg 1$.

Выберем систему декартовых координат (X, Y, Z) таким образом, что ось OZ совпадает с осью сфероида, а начало координат совпадает с его центром (см. Рис. 1). Пусть диполь располагается в точке с координатами $(X_0, 0, Z_0)$, причём $Z_0/b < -1$ и $X_0/a < \text{const} = O(1)$. То есть, диполь расположен достаточно близко к оси сфероида и на некотором конечном расстоянии от его поверхности. Ориентация диполя произвольна.

Ищется решение уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \\ \nabla \times \mathbf{H} = -ik\mathbf{E}, \end{cases} \quad (1)$$

которые мы записали в симметричном виде для векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , где \mathbf{E} – электрический вектор делённый на импеданс пространства $\sqrt{\mu/\varepsilon}$, а \mathbf{H} – магнитный вектор. Краевые условия записываются в виде

$$\mathbf{E} - (\mathbf{E}, \mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n = 0,$$

где \mathbf{e}_n – единичная нормаль к поверхности. На бесконечности ставятся условия излучения для рассеянного поля $\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s$ определённого как разность между полным и падающим полем $\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i$.

Мы ограничимся получением старшего члена асимптотики в пограничном слое вблизи поверхности и, в частности, получим асимптотику индуцированного тока. Для получения поля в дальней зоне эти асимптотики нужно подставить в формулу Грина (в электродинамике называемую формулой Страттона-Чу).

§3. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ПРОЦЕДУРА

Будет использован метод параболического уравнения в сфероидальных координатах (η, ξ, ϕ) , которые вводятся по формулам

$$\begin{aligned} x &= p\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{\xi^2-1}\cos\phi, \\ y &= p\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{\xi^2-1}\sin\phi, \\ z &= p\xi\eta. \end{aligned}$$

Поверхность сфероида совпадает с координатной поверхностью $\xi = \xi_0 = 1 + (a/p)^2$. Ввиду предположения о сильной вытянутости тела величина ξ_0 оказывается близка к единице. В связи с этим, радиальная координата ξ подвергается масштабированию, то есть, вместо неё вводится координата τ , такая что

$$\xi = 1 + \frac{\chi\tau}{2kp}.$$

Координаты (τ, η, ϕ) играют роль координат пограничного слоя [11]. Можно проверить, что масштабы, связывающие длину дуги с координатой η и нормаль, к координатой τ , по порядку величины в точности совпадают с масштабами, используемыми в области Фока. Поверхность

сфероида теперь задаётся уравнением $\tau = 1$, а ось сфероида соответствует $\tau = 0$.

Используя симметрию тела, произведём разложение в ряд Фурье по углу ϕ . Шесть компонент электромагнитного поля \mathbf{E} , \mathbf{H} можно, как известно, выразить через две функции. В качестве таких функций выберем угловые компоненты электрического и магнитного векторов E_ϕ и H_ϕ . Быстро осциллирующий множитель выделим в виде

$$\begin{aligned} E_\phi &= e^{ikp\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(E_n^{(0)} \cos(n\phi) + E_n^{(1)} \sin(n\phi) \right), \\ H_\phi &= e^{ikp\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(H_n^{(0)} \sin(n\phi) - H_n^{(1)} \cos(n\phi) \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Функции ослабления будем искать в виде асимптотических разложений по обратным степеням kp .

Чтобы не повторять одинаковые формулы, примем такое соглашение: Если верхний индекс не указан, то формула относится как к величинам с верхним индексом ⁽⁰⁾ так и с верхним индексом ⁽¹⁾.

В старшем порядке функции $E_n^{(0)}$, $E_n^{(1)}$, $H_n^{(0)}$ и $H_n^{(1)}$ удовлетворяют системе параболических уравнений. При помощи подстановки

$$E_n = A_n + B_n, \quad H_n = A_n - B_n$$

эта система расщепляется на два независимых уравнения

$$L_{n-1}A_n = 0, \quad L_{n+1}B_n = 0, \quad (3)$$

где

$$L_m = \tau \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{i\chi}{2} (1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\chi^2}{4} \tau - \frac{m^2}{4\tau} - \frac{i\chi}{2} \eta$$

и $A_0 \equiv 0$.

Уравнения (3) допускают разделение переменных, что позволяет записать решения в виде интегралов

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\sqrt{\chi\tau}\sqrt{1-\eta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-\eta}{1+\eta} \right)^{it} \\ &\quad \times \left[a_n(t) M_{it, \frac{n-1}{2}}(-i\chi\tau) + a_n^f(t) W_{it, \frac{n-1}{2}}(-i\chi\tau) \right] dt, \end{aligned} \quad (4)$$

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{\chi\tau}\sqrt{1-\eta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-\eta}{1+\eta} \right)^{it} \times \left[b_n(t) M_{it, \frac{n+1}{2}}(-i\chi\tau) + b_n^f(t) W_{it, \frac{n+1}{2}}(-i\chi\tau) \right] dt. \quad (5)$$

Здесь M и W – функции Уиттекера [12], а a_n , b_n , a_n^f и b_n^f пока произвольные функции.

Анализируя свойства решений, можно сделать вывод о том, что члены, содержащие функцию Уиттекера M , отвечают падающему полю. Эти члены могут быть продолжены внутрь тела вплоть до оси и не имеют там особенностей. Члены же, содержащие функцию Уиттекера W , удовлетворяют условию излучения и, следовательно, выражают рассеянное поле. Отметим, что это не полное рассеянное поле, так как представление (2) предполагает, что волна распространяется в положительном направлении z , в то время как в задаче присутствуют также волны распространяющиеся в противоположную сторону [5, 9]. То есть, в представлении (2) учтены только прямые волны, в знак чего их амплитуды снабжены значком f от английского «forward».

Для нахождения функций a_n , b_n , a_n^f и b_n^f в (4), (5) можно поступить следующим образом. Функции a_n и b_n найдём при помощи согласования формул с падающим полем, а функции a_n^f и b_n^f определятся после этого из краевых условий при $\tau = 1$. Формулы, выражающие a_n^f и b_n^f через a_n и b_n не зависят от падающего поля и могут быть взяты из [9]:

$$\begin{aligned} b_0^{f,(0)} &= -b_0^{i,(0)} \frac{M_{it, \frac{1}{2}}(-i\chi)}{W_{it, \frac{1}{2}}(-i\chi)}, \\ b_0^{f,(1)} &= -b_0^{i,(1)} \frac{M'_{it, \frac{1}{2}}(-i\chi)}{W'_{it, \frac{1}{2}}(-i\chi)}, \\ a_n^f &= -\frac{a_n}{Z_n} (M_- W'_+ + M'_- W_+) + \frac{b_n}{Z_n} \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1 - it)}, \\ b_n^f &= \frac{a_n}{Z_n} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\frac{n}{2} - it)} - \frac{b_n}{Z_n} (M_+ W'_- + M'_+ W_-). \end{aligned}$$

Здесь штрихи обозначают производную функции,

$$Z_n = W_+ W'_- + W'_+ W_-$$

и

$$W_{\pm} = W_{it, \frac{n \pm 1}{2}}(-i\chi), \quad M_{\pm} = M_{it, \frac{n \pm 1}{2}}(-i\chi).$$

Для поля на поверхности формулы могут быть упрощены, если воспользоваться значением для вронскиана

$$M'_{it, \frac{n}{2}} W_{it, \frac{n}{2}} - M_{it, \frac{n}{2}} W'_{it, \frac{n}{2}} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} - it\right)}.$$

В результате для поперечной компоненты магнитного вектора получаем

$$J_n = -\frac{2e^{ikp\eta}(n-1)!}{\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{\chi}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^{it} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2} - it\right) Z_n} \left[a_n W_+ - b_n \frac{n(n+1)}{\frac{n}{2} - it} W_- \right] dt, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

$$J_0^{(0)} = 0, \quad J_0^{(1)} = \frac{e^{ikp\eta}}{\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{\chi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^{it} \frac{b_0^{(1)}}{\Gamma(1-it)W'_{it, \frac{1}{2}}(-i\chi)} dt. \quad (7)$$

Формулы (6), (7) описывают прямую волну. Когда она достигает конца сфероида и огибает его, формируется обратная волна [9]. Эта волна также может быть представлена в рамках приближения параболического уравнения, но так как она распространяется в противоположном направлении, следует поменять знак у координаты η . Асимптотика токов обратной волны выражается формулами

$$I_n = \frac{2(-i)^n e^{ikp(2-\eta)}(n-1)!}{\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{\chi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)^{it} \frac{(4kp)^{-2it}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} - it\right)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1 + it\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1 - it\right)} \left[a_n W_- + b_n \frac{n(n+1)}{\frac{n}{2} + it} W_+ \right] \frac{dt}{Z_n}, \quad (8)$$

$$I_0^{(0)} = 0,$$

$$I_0^{(1)} = -\frac{e^{ikp(2-\eta)}}{\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{\chi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)^{it} \frac{(4kp)^{-2it}}{W'_{it, \frac{1}{2}}(-i\chi)} \frac{\Gamma(1+it)}{\Gamma^2(1-it)} b_0^{(1)} dt. \quad (9)$$

Формулы (6)–(9) справедливы для любого падающего поля. В случае падения плоской волны, коэффициенты a_n и b_n были получены в [9]. Для случая поля диполя выражения для этих функций будут получены ниже.

§4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ ДИПОЛЯ

В локальной сферической системе координат (r, θ, ϕ) поле, излучаемое диполем, записывается хорошо известным образом (см., например, [13, стр. 267])

$$\mathbf{H} = -\frac{k^2 D}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 + \frac{i}{kr}\right) \sin \theta \mathbf{e}_\phi. \quad (10)$$

Здесь D – длина вектора дипольного момента, направленного вдоль оси $\theta = 0$.

Используя уравнения Максвелла (1), несложно получить выражение и для электрического поля:

$$\mathbf{E} = \frac{k^2 D}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left[\left(\frac{2i}{kr} - \frac{2}{k^2 r^2} \right) \cos \theta \mathbf{e}_r + \left(1 + \frac{i}{kr} - \frac{1}{k^2 r^2} \right) \sin \theta \mathbf{e}_\theta \right]. \quad (11)$$

Формулы (10), (11) – точные. Однако нам потребуются приближённые выражения для этих полей в виде интегралов (2), написанных в системе координат, связанной со сфероидом. Такое представление возможно только в том случае, если лучи, испускаемые диполем и падающие на сфероид, идут под малым углом к оси Oz . Это условие было сформулировано в виде предположения о том, что координаты $(X_0, 0, Z_0)$ диполя удовлетворяют условиям $Z_0 < -b$ и $X_0 \sim a$.

Введём безразмерные координаты $\eta_0 = Z_0/p$, $\rho_0 = X_0/a$, и с точностью до членов асимптотически малого порядка представим экспоненциальный множитель в виде

$$kr \approx kp\eta - kZ_0 + \frac{\chi\tau\eta}{2} + \Phi - \Psi \cos \phi,$$

где

$$\Phi = \frac{\chi}{2} \frac{\rho_0^2 + \tau(1 - \eta^2)}{\eta - \eta_0}, \quad \Psi = \frac{\chi\rho_0\sqrt{\tau}\sqrt{1 - \eta^2}}{\eta - \eta_0}. \quad (12)$$

4.1. Диполь, ориентированный вдоль оси OZ . Для диполя с моментом, ориентированным вдоль оси сфероида, локальная и глобальная системы координат отличаются лишь сдвигом. Легко получить следующее представление для поля диполя в старшем по kr порядке

$${}^z H_\phi = \frac{k^2 D_z \sqrt{\chi}}{4\pi p \sqrt{kp}} \frac{\rho_0 \cos \phi - \sqrt{1-\eta^2} \sqrt{\tau}}{(\eta - \eta_0)^2} \times \exp \left\{ ikp\eta - ikZ_0 + i\frac{\chi\tau\eta}{2} + i\Phi - i\Psi \cos \phi \right\},$$

$${}^z E_\phi = \frac{k^2 D_z \sqrt{\chi}}{4\pi p \sqrt{kp}} \frac{\rho_0 \sin \phi}{(\eta - \eta_0)^2} \exp \left\{ ikp\eta - ikZ_0 + i\frac{\chi\tau\eta}{2} + i\Phi - i\Psi \cos \phi \right\}.$$

Здесь и ниже верхний значок z помечает величины, относящиеся к ориентации момента диполя вдоль оси Oz .

Вычисляя интегралы Фурье, находим коэффициенты падающего поля в представлении (2). Имеем

$${}^z A_n^{(1)} = \Omega_z (-i)^{n-1} f_n(\eta, \tau), \quad {}^z A_n^{(0)} = 0, \quad (13)$$

$${}^z B_n^{(1)} = \Omega_z (-i)^{n-1} g_n(\eta, \tau), \quad {}^z B_n^{(0)} = 0, \quad (14)$$

где

$$\Omega_z = \frac{k^2 D_z \sqrt{\chi}}{4p \sqrt{kp}} e^{-ikZ_0},$$

$$f_n(\eta, \tau) = \frac{1}{(\eta - \eta_0)^2} \exp \left(\frac{i\chi}{2} \tau \eta + i\Phi \right) \left[\rho_0 J_{n-1}(\Psi) + i\sqrt{\tau} \sqrt{1-\eta^2} J_n(\Psi) \right], \quad (15)$$

$$g_n(\eta, \tau) = \frac{1}{(\eta - \eta_0)^2} \exp \left(\frac{i\chi}{2} \tau \eta + i\Phi \right) \left[\rho_0 J_{n+1}(\Psi) - i\sqrt{\tau} \sqrt{1-\eta^2} J_n(\Psi) \right].$$

Здесь $J_n(\cdot)$ – функции Бесселя, а величины Φ и Ψ были определены в (12).

Легко проверить, что поля (13) и (14) удовлетворяют параболическим уравнениям

$$L_{n-1} {}^z A_n = 0, \quad L_{n+1} {}^z B_n = 0$$

и, следовательно, их можно представить в виде интегралов (4) и (5) с подходящими функциями a_n и b_n . Это будет сделано в параграфе 5.

4.2. Диполи, ориентированные вдоль оси OX и OY . Рассмотрим теперь ориентацию диполя вдоль оси OX . Связь локальных (x, y, z) и глобальных координат выражается формулами

$$x = Z_0 - Z, \quad y = Y, \quad z = X - X_0.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} {}^x H_\phi &= \frac{k^2 D_x}{4\pi p} \frac{\sin \phi}{\eta - \eta_0} e^{ikp\eta - ikZ_0 + i\Phi - i\Psi \cos \phi}, \\ {}^x E_\phi &= \frac{k^2 D_x}{4\pi p} \frac{\cos \phi}{\eta - \eta_0} e^{ikp\eta - ikZ_0 + i\Phi - i\Psi \cos \phi}. \end{aligned}$$

Вычисляя интегралы Фурье получим формулы для гармоник

$${}^x A_n^{(0)} = 0, \quad {}^x A_n^{(1)} = \Omega_x (-i)^{n-1} h_n(\eta, \tau), \quad (16)$$

$${}^x B_n^{(0)} = 0, \quad {}^x B_n^{(1)} = \Omega_x (-i)^{n-1} h_{n+2}(\eta, \tau),$$

где

$$h_n(\eta, \tau) = \frac{1}{\eta - \eta_0} \exp\left(\frac{i\chi}{2}\tau\eta + i\Phi\right) J_{n-1}(\Psi),$$

$$\Omega_x = \frac{k^2 D_x}{4p} e^{-ikZ_0}.$$

Для диполя с моментом, ориентированным вдоль оси OY , аналогичным образом получаются формулы

$${}^y A_n^{(0)} = \Omega_y (-i)^{n-1} h_n(\eta, \tau), \quad {}^y A_n^{(1)} = 0, \quad (17)$$

$${}^y B_n^{(0)} = \Omega_y (-i)^{n-1} h_{n+2}(\eta, \tau), \quad {}^y B_n^{(1)} = 0,$$

где

$$\Omega_y = \frac{k^2 D_y}{4p} e^{-ikZ_0}.$$

Функции h_n удовлетворяют параболическим уравнениям $L_{n-1}h_n=0$ и, следовательно, их можно представить в виде интегралов (4) и (5), что мы и сделаем в следующем параграфе.

§5. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Функции a_n и b_n в представлениях (4) и (5) для падающего поля должны быть найдены путём приравнивания этих представлений и выражений для падающего поля. Это приводит к интегральным уравнениям

$$\frac{1}{\sqrt{\chi\tau}\sqrt{1-\eta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^{it} M_{it, \frac{n+1}{2}}(-i\chi\tau)w(t) dt = \dots, \quad (18)$$

где в качестве правой части надо взять функции f_n , g_n или h_n . Вычисления основываются на обращении интегрального оператора в (18). Однако, чтобы получить явные выражения для решений в терминах функций Уиттекера, удобно предварительно воспользоваться фактом независимости решения $w(t)$ от параметра τ , входящего в (18), и произвести упрощение интегральных уравнений. Для этого будем умножать левую и правую части интегральных уравнений на τ^α и устремлять τ к нулю. Показатель α будем подбирать таким, чтобы пределы были конечными.

Интегральные уравнения с правыми частями h_n уже встречались в [14], что позволяет воспользоваться найденным там решением

$$w_n^h = \frac{(-1)^n}{\pi[(n-1)!]^2\sqrt{\chi\rho_0}} e^{-i\beta\eta_0/2} \left(\frac{\eta_0+1}{\eta_0-1}\right)^{it} \times \Gamma\left(\frac{n}{2}+it\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-it\right) M_{it, \frac{n-1}{2}}(i\beta), \quad (19)$$

где

$$\beta = \frac{\chi\rho_0^2}{\eta_0^2-1}.$$

В случае расположения диполя на оси, то есть, при $\rho_0 = 0$, раскрывая неопределённость, получим

$$w_1^h = -\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\eta_0^2-1}} \frac{1}{\cosh(\pi t)} \left(\frac{\eta_0+1}{\eta_0-1}\right)^{it}.$$

При этом все остальные $w_n^h = 0$, $n = 2, 3, \dots$

Амплитуды a_n и b_n выражаются через w^h в соответствии с формулами (16) и (17).

Рассмотрим случай правой части f_n , определённой в (15). При $\tau \rightarrow 0$ имеем

$$f_n \sim \frac{\rho_0^n \chi^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!} \exp\left(\frac{i\chi}{2} \frac{\rho_0^2}{\eta - \eta_0}\right) \frac{(1 - \eta^2)^{\frac{n-1}{2}}}{(\eta - \eta_0)^{n+1}} \tau^{\frac{n-1}{2}}.$$

И ввиду асимптотики функции Уиттекера при малом аргументе, получаем упрощённое интегральное уравнение в виде

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1 - \eta}{1 + \eta}\right)^{it} w_n^f(t) dt = C_n \exp\left(\frac{i\chi}{2} \frac{\rho_0^2}{\eta - \eta_0}\right) \frac{(1 - \eta^2)^{\frac{n-1}{2}}}{(\eta - \eta_0)^{n+1}}, \quad (20)$$

где

$$C_n = \frac{i^{\frac{n}{2}} \chi^{\frac{n}{2}-1} \rho_0^n}{2^{n-1}(n-1)!}.$$

Обратив (20), получим интеграл

$$w_n^f = \frac{C_n}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1 + \eta}{1 - \eta}\right)^{it} \exp\left(\frac{i\chi}{2} \frac{\rho_0^2}{\eta - \eta_0}\right) \frac{(1 - \eta^2)^{\frac{n}{2}-1}}{(\eta - \eta_0)^{n+1}} d\eta. \quad (21)$$

Далее, чтобы выразить этот интеграл через функции Уиттекера, произведём некоторые преобразования. Сначала заменим переменную интегрирования на s , определяемую формулами

$$\eta = \frac{1 - s}{1 + s}, \quad s = \frac{1 - \eta}{1 + \eta}, \quad d\eta = -\frac{2}{(1 + s)^2} ds.$$

Заметим также, что

$$\eta - \eta_0 = \frac{1 - s}{1 + s} - \eta_0 = -(\eta_0 - 1) \frac{1 + \Theta s}{1 + s},$$

где

$$\Theta = \frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1} < 1.$$

Тогда интеграл (21) преобразуется к виду

$$w_n^f = \frac{C_n}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n-1}}{(\eta_0 - 1)^{n+1}} \int_0^{+\infty} s^{\frac{n}{2} - it - 1} e^{\kappa(s)} \left(\frac{1 + s}{1 + \Theta s}\right)^{n+1} \frac{ds}{(1 + s)^n},$$

где

$$\kappa(s) = -\frac{i\chi\rho_0^2}{2(\eta_0 - 1)} \frac{1 + s}{1 + \Theta s}.$$

Теперь перепишем $\kappa(s)$ в виде

$$\kappa(s) = -\frac{i\chi\rho_0^2}{2(\eta_0 + 1)} - \frac{i\beta}{1 + \Theta s}$$

и поменяем переменную интегрирования на $\sigma = \Theta s$. Это даёт

$$w_n^f = \frac{C_n}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n-1}}{(\eta_0 - 1)^{n+1}} \exp\left(-\frac{i\chi\rho_0^2}{2(\eta_0 + 1)}\right) \Theta^{it - \frac{n+1}{2}} \\ \times \int_0^{+\infty} \sigma^{-it} \exp\left(-\frac{i\beta}{1 + \sigma}\right) \left[\sqrt{\Theta}\sigma^{\frac{n}{2}-1} + \frac{\sigma^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\Theta}}\right] \frac{d\sigma}{(1 + \sigma)^{n+1}}.$$

Наконец, перейдём к переменной интегрирования ξ такой, что

$$\frac{1}{1 + \sigma} = \frac{\xi + 1}{2},$$

то есть,

$$\sigma = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad d\sigma = -\frac{2}{(1 + \xi)^2} d\xi.$$

Тогда,

$$w_n^f = \frac{C_n}{2\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{(\eta_0 - 1)^{n+1}} \exp\left(-\frac{i\chi\rho_0^2}{2(\eta_0 + 1)} - \frac{i\beta}{2}\right) \Theta^{it - \frac{n+1}{2}} \\ \times \left[\Theta^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^{+1} (1 + \xi)^{it + \frac{n}{2}} (1 - \xi)^{-it + \frac{n}{2} - 1} \exp\left(-\frac{i\beta\xi}{2}\right) d\xi \right. \\ \left. + \Theta^{-\frac{1}{2}} \int_{-1}^{+1} (1 + \xi)^{it + \frac{n}{2} - 1} (1 - \xi)^{-it + \frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{i\beta\xi}{2}\right) d\xi \right]. \quad (22)$$

Сравнивая интегралы в (22) с интегральным представлением для функций Уиттекера [15, формула 9.221], окончательно получим

$$w_n^f = \frac{e^{-i\pi/4} (-1)^{n-1}}{\pi(n-1)! n! \chi \rho_0} e^{-i\beta\eta_0/2} \Gamma\left(\frac{n}{2} + it\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} - it\right) \left(\frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1}\right)^{it} \\ \times \left[\sqrt{\frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1}} \left(\frac{n}{2} + it\right) M_{it + \frac{1}{2}, \frac{n}{2}}(i\beta) + \sqrt{\frac{\eta_0 - 1}{\eta_0 + 1}} \left(\frac{n}{2} - it\right) M_{it - \frac{1}{2}, \frac{n}{2}}(i\beta) \right].$$

Пользуясь свойствами функций Уиттекера, это выражение можно также записать в виде

$$w_n^f = \frac{(-1)^n}{\pi n!(n-1)!} \frac{e^{-i\beta\eta_0/2}}{\eta_0^2 - 1} \Gamma\left(\frac{n}{2} + it\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} - it\right) \times \left(\frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1}\right)^{it} \left[\frac{n^2 + 4t^2}{2n(n+1)} M_{it, \frac{n+1}{2}}(i\beta) - (n\eta_0 + 2it) M_{it, \frac{n-1}{2}}(i\beta) \right]. \quad (23)$$

Отметим, что при $\rho_0 = 0$ все функции w_n^f обращаются в нуль.

Рассмотрим теперь случай правой части g_n . Используя рекуррентные соотношения для функций Бесселя, несложно заметить, что

$$g_n = f_{n+2} - \frac{2i(n+1)}{\chi\rho_0} h_{n+2}.$$

Таким образом, мы можем воспользоваться уже найденными решениями (19) и (23), и получить

$$w_n^g = w_{n+2}^f - \frac{2i(n+1)}{\chi\rho_0} w_{n+2}^h. \quad (24)$$

Для случая $\rho_0 = 0$ необходимо раскрыть неопределённость во втором члене в (24). В результате получим

$$w_0^g = \frac{2}{\sqrt{\chi}(\eta_0^2 - 1)} \frac{t}{\sinh(\pi t)} \left(\frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1}\right)^{it}$$

и $w_n^g = 0$ при $n = 1, 2, \dots$

Полученные формулы позволяют выписать приближения для электромагнитного поля и для токов на поверхности сфероида, которые возбуждаются произвольно ориентированным диполем, находящимся в параксиальной области. Эти формулы с достаточно высокой точностью приближают поля на поверхности сфероида везде, за исключением малых окрестностей вершин.

Можно проверить, что при устремлении точки расположения диполя на бесконечность, формулы сводятся к полученным в [9] для падения плоской волны. Также в случае осевого расположения диполя с моментом, направленным вдоль оси OZ , формулы редуцируются к приведённым в [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. I. V. Andronov, E. V. Chernokozhin, A. Boag, *Mutual Validation of a Fast Solver Based on the Multilevel Nonuniform Grid Approach and an Asymptotic Approximation for High-frequency Scattering by Strongly Elongated Spheroids*. — Proc. GASS URSI 2020, [to be published].
2. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн*, “Советское радио,” М. 1970, с. 520.
3. I. V. Andronov, *High frequency asymptotics of electromagnetic field on a strongly elongated spheroid*. — PIERs Online, **5**, no. 6, (2009), 536–540.
4. I. V. Andronov, D. Bouche, M. Duruflé, *High-frequency diffraction of plane electromagnetic wave by an elongated spheroid*. — IEEE Transactions on Antennas and Propagation, **60**, no. 11, (2012), 5286–5295.
5. I. V. Andronov, D. Bouche, *Forward and backward waves in high-frequency diffraction by an elongated spheroid*. — Progress in Electromagn. Res. B, **29**, (2011), 209–231.
6. I. V. Andronov, *The currents induced by a high-frequency wave incident at a small angle to the axis of strongly elongated spheroid*. — Progress in Electromagn. Res. M, **28**, (2013), 273–287.
7. I. V. Andronov, D. A. Shevnin, *High-frequency scattering by perfectly conducting prolate spheroids*. — J. of Electromagnetic Waves and Applications, **28**, no. 11, (2014), 1388–1396.
8. I. V. Andronov, R. Mittra, *High-frequency Asymptotics for the Radar Cross-Section Computation of a Prolate Spheroid with High Aspect Ratio*. — IEEE Transactions on Antennas and Propagation, **63**, no. 1, (2015), pp. 336–343.
9. I. V. Andronov, D. Bouche, M. Duruflé, *High-frequency currents on a strongly elongated spheroid*. — IEEE Transactions on Antennas and Propagation, **65**, no. 2, (2017), 794–804.
10. I. V. Andronov, *Axial diffraction of a dipole field by a strongly elongated spheroid*. — J. Electromagn. Waves and Appl. **32**, no. 12, (2018), 1535–1540.
11. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции*, Л: Изд. ЛГУ, 1974, с. 124.
12. *Справочник по специальным функциям* под ред. М. Абрамовица и И. Стиган, “Наука,” М. 1979, с. 832.
13. И. В. Комаров, Л. И. Пономарёв, С. Ю. Славянов, *Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции*, “Наука,” М. 1976, с. 320.
14. I. V. Andronov, *Point source diffraction by a strongly elongated spheroid*. — J. of Sound and Vibration **355**, (2015), 360–368.
15. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, М. 1963, с. 1108.

Andronov I. V. High-frequency diffraction of a dipole field on a strongly elongated spheroid.

The problem of high-frequency diffraction of a dipole field by a perfectly conducting strongly elongated spheroid is considered in parabolic equation

approximation. The leading order term is represented in the form of Fourier series with each harmonics expressed by an integral involving Whittaker functions. The amplitudes under the sign of integration are obtained as the solutions of the integral equations and are expressed explicitly in terms of Whittaker functions.

Санкт-Петербургский
государственный университет
E-mail: iva--@list.ru

Поступило 5 ноября 2020 г.