

С. С. Подкорытов

ОБ АЛГЕБРЕ МЁБИУСОВА ВЕНКА

Пусть Ω_r ($r = 0, 1, \dots, \infty$) – категория, объекты которой – множества $\langle p \rangle = \{1, \dots, p\}$, $p = 1, 2, \dots$, $p \leq r$, а морфизмы – сюръективные отображения. Пусть \mathbf{k} – поле; мы подразумеваем его, говоря о векторных пространствах, тензорных произведениях и т.д. Под *алгеброй* мы понимаем коммутативную неунитальную \mathbf{k} -алгебру. Алгебра A определяет функтор $L^r(A): \Omega_r \rightarrow \mathbf{k}\text{-Mod}$ (*представление* категории Ω_r), который посылает объект $\langle p \rangle$ в векторное пространство $A^{\otimes p}$, а морфизм $s: \langle p \rangle \rightarrow \langle q \rangle$ – в линейное отображение

$$A^{\otimes p} \rightarrow A^{\otimes q}, \quad a_1 \otimes \dots \otimes a_p \mapsto m_1 \otimes \dots \otimes m_q,$$

где

$$m_j = \prod_{i \in s^{-1}(j)} a_i$$

(вариант функтора Лодэ [4, Proposition 6.4.4]).

Следует ли изоморфность алгебр A и B из изоморфности представлений $L^r(A)$ и $L^r(B)$? Да, если $r = \infty$, поле \mathbf{k} алгебраически замкнуто и алгебры конечномерны ([1], ср. [2]). Цель работы – показать, что это неверно для сколь угодно большого конечного r . Для каждого $r = 1, 2, \dots$ и произвольного поля \mathbf{k} мы указываем две неизоморфные конечномерные алгебры A и B с изоморфными представлениями $L^r(A)$ и $L^r(B)$. Эти алгебры получаются из алгебр Стэнли–Рейснера определённых графов (“венков”) взятием однородных компонент степени 1 и 2.

Функтор L^r . Сопоставление $A \mapsto L^r(A)$ очевидным образом ковариантно, так что мы имеем функтор $L^r: \mathbf{k}\text{-Alc} \rightarrow \mathbf{Fun}(\Omega_r, \mathbf{k}\text{-Mod})$, где $\mathbf{k}\text{-Alc}$ – категория алгебр, а $\mathbf{Fun}(\Omega_r, \mathbf{k}\text{-Mod})$ – категория функторов $\Omega_r \rightarrow \mathbf{k}\text{-Mod}$ (представлений).

Категория действия $M \setminus\setminus S$. Пусть моноид M действует на множестве S слева. Для $s, t \in S$ пусть $M(s, t) = \{m : m \cdot s = t\} \subseteq M$.

Ключевые слова: функтор Лодэ.

Определена категория $M \parallel S$, где $\text{Ob } M \parallel S = S$, для каждых $s, t \in S$ задана биекция

$$M(s, t) \rightarrow \text{Мог}_{M \parallel S}(s, t), \quad m \mapsto m|_{s \rightarrow t},$$

$1_s = 1|_{s \rightarrow s}$ и композиция морфизмов даётся умножением в моноиде M .

Имеем не обязательно коммутативную унитарную \mathbf{k} -алгебру $\mathbf{k}[M]$. Для $s, t \in S$ имеем подпространство $\mathbf{k}[M(s, t)] \subseteq \mathbf{k}[M]$.

Рассмотрим линейную категорию $\mathbf{k}[M \parallel S]$. Для $s, t \in S$ зададим линейное отображение

$$\mathbf{k}[M(s, t)] \rightarrow \text{Мог}_{\mathbf{k}[M \parallel S]}(s, t), \quad X \mapsto X|_{s \rightarrow t},$$

правилом $[m] \mapsto [m|_{s \rightarrow t}]$. Очевидно, $1|_{s \rightarrow s} = 1_s$ ($s \in S$). Если $X \in \mathbf{k}[M(s, t)]$, $Y \in \mathbf{k}[M(t, u)]$ ($s, t, u \in S$), то $YX \in \mathbf{k}[M(s, u)]$ и

$$(YX)|_{s \rightarrow u} = Y|_{t \rightarrow u} \circ X|_{s \rightarrow t}.$$

Моноид W_n и элементы T_n и Z_n . Введём мультипликативный подмоноид $\mathbf{V} = \{1, -1, 0\} \subseteq \mathbb{Z}$ и его подмоноиды $\mathbf{U} = \{1, -1\}$ и $\mathbf{E} = \{1, 0\}$. Элементы 1 и -1 будем обозначать также $+$ и $-$ (соответственно).

Пусть $W_n \subseteq \mathbf{V}^{2n+1}$ – подмоноид, образованный наборами

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_{2n+1}),$$

в которых $w_{2i+1} \in \mathbf{U}$ ($i = 0, \dots, n$) и $w_j w_{j+1} \in \mathbf{E}$ ($j = 1, \dots, 2n$).

Пусть $g_i, h_i \in W_n$ ($i = 1, \dots, n$):

$$g_i = (\underbrace{+, \dots, +}_{2i}, 0, \underbrace{+, \dots, +}_{2i}), \quad h_i = (\underbrace{-, \dots, -}_{2i}, 0, \underbrace{+, \dots, +}_{2i})$$

и $T_n, Z_n \in \mathbf{k}[W_n]$:

$$T_n = \sum_{i=1}^n (1 - [g_1]) \dots (1 - [g_{i-1}])[h_i], \quad Z_n = (1 - [g_1]) \dots (1 - [g_n]).$$

Используя коммутативность моноида W_n и соотношения $g_i^2 = h_i^2 = g_i$ и $g_i h_i = h_i$, получаем

$$T_n^2 = 1 - Z_n.$$

Два действия моноида W_n и их категории. Моноид W_n действует на множестве \mathbf{U} слева по правилу $w \cdot s = w_1 w_{2n+1} s$. Так как

$T_n \in \mathbf{k}[W_n(s, -s)]$, $Z_n \in \mathbf{k}[W_n(s, s)]$ для каждого $s \in \mathbf{U}$, то в категории $\mathbf{k}[W_n \setminus \mathbf{U}]$ имеем

$$T_n \parallel_{-s \rightarrow s} \circ T_n \parallel_{s \rightarrow -s} = 1_s - Z_n \parallel_{s \rightarrow s}. \quad (1)$$

Рассмотрим одноэлементное множество $\{\star\}$ с левым действием моноида W_n . Отображение $\mathbf{U} \rightarrow \{\star\}$ индуцирует функторы

$$\omega_n: W_n \setminus \mathbf{U} \rightarrow W_n \setminus \{\star\} \quad \text{и} \quad \mathbf{k}[\omega_n]: \mathbf{k}[W_n \setminus \mathbf{U}] \rightarrow \mathbf{k}[W_n \setminus \{\star\}].$$

Для любых $s, t \in \mathbf{U}$ и $X \in \mathbf{k}[W_n(s, t)]$ имеем

$$\mathbf{k}[\omega_n]: X \parallel_{s \rightarrow t} \mapsto X \parallel_{\star \rightarrow \star}. \quad (2)$$

Графы. Под *графом* мы понимаем пару $G = (G_1, G_2)$, где G_1 – множество, а $G_2 \subseteq G_1 \times G_1$ – рефлексивное симметричное отношение. *Вершины* графа G – элементы множества G_1 ; *рёбра* – множества $\{x, y\}$, где $(x, y) \in G_2$, $x \neq y$.

Морфизм графов $f: G \rightarrow H$ – пара $f = (f_1, f_2)$, где $f_p: G_p \rightarrow H_p$, $p = 1, 2$, – такие отображения, что $f_2(x, y) = (f_1(x), f_1(y))$, $(x, y) \in G_2$. Графы и их морфизмы образуют категорию **Graph**.

Кофунктор Q : алгебра графа. Пусть дан граф G . Симметрическая группа Σ_2 действует на множестве $G_2 \subseteq G_1 \times G_1$ перестановками координат. Имеем проекцию

$$\mathbf{k}^{G_2} \rightarrow (\mathbf{k}^{G_2})_{\Sigma_2}, \quad u \mapsto \bar{u}.$$

Пусть A^\bullet – градуированная алгебра, сосредоточенная в степенях 1 и 2:

$$A^1 = \mathbf{k}^{G_1}, \quad A^2 = (\mathbf{k}^{G_2})_{\Sigma_2},$$

в которой если $a, b \in A^1$, то $ab = \bar{u} \in A^2$, где $u \in \mathbf{k}^{G_2}$, $u(x, y) = a(x)b(y)$.

Положим $Q^\bullet(G) = A^\bullet$. Пусть $Q(G)$ – та же алгебра без градуировки. Сопоставление $G \mapsto Q(G)$ очевидным образом контравариантно, так что мы имеем кофунктор $Q: \mathbf{Graph} \rightarrow \mathbf{k}\text{-Alc}$. Нам понадобятся следующие его свойства.

1°. Если граф G конечен, то алгебра $Q(G)$ конечномерна.

2°. Если морфизмы графов $f_i: G_i \rightarrow H$, $i \in I$, образуют *покрытие*, т. е.

$$\bigcup_{i \in I} \text{Im } f_i \upharpoonright_p = H_p, \quad p = 1, 2,$$

то линейное отображение

$$(Q(f_i))_{i \in I}: Q(H) \rightarrow \prod_{i \in I} Q(G_i)$$

инъективно.

3°. Если конечные графы G и H неизоморфны, то алгебры $Q(G)$ и $Q(H)$ тоже неизоморфны. Это следует из теоремы Губеладзе [3, Theorem 3.1], но в нужном нам частном случае достаточно совсем простых соображений.

Назовём граф G *допустимым*, если для любых различных $x, y \in G_1$ существует такое $z \in G_1$, что $(x, z) \notin G_2$ и $(y, z) \in G_2$. (Например, допустим любой граф без треугольников и висячих вершин.) Покажем, что допустимый граф G восстанавливается по алгебре $Q(G)$.

Пусть дана градуированная алгебра A^\bullet , сосредоточенная в степенях 1 и 2. Рассмотрим проективное пространство $P(A^1)$. Пусть

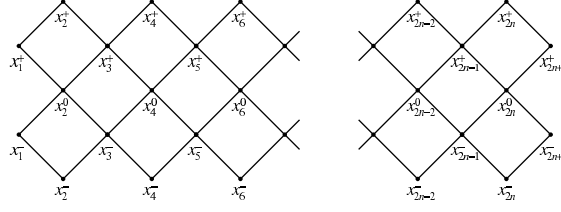
$$[\]: A^1 \setminus \{0\} \rightarrow P(A^1)$$

– проекция. Введём на $P(A^1)$ симметричное отношение $\#$ (*зависимость*): $[a] \# [b] \Leftrightarrow ab \neq 0$, и предпорядок \lesssim : $p \lesssim q \Leftrightarrow p^\# \subseteq q^\#$, где $r^\# = \{s : r \# s\}$. Пусть $R \subseteq P(A^1)$ – множество *минимальных* точек, т. е. таких точек p , что $\{s : s \lesssim p\} = \{p\}$. Если $A^\bullet = Q^\bullet(G)$ для некоторого графа G , то есть инъективное отображение $e: G_1 \rightarrow P(A^1)$, $x \mapsto [\delta_x]$, где $\delta_x \in A^1 = \mathbf{k}^{G_1}$, $\delta_x(y)$ равно 1 при $y = x$ и 0 иначе. Обратный образ отношения $\#$ при отображении e равен G_2 . Нетрудно проверить, что если граф G допустим, то $\text{Im } e = R$. Остаётся добавить, что градуированная алгебра A^\bullet восстанавливается по неградуированной алгебре $A = Q(G)$: A^\bullet канонически изоморфна градуированной алгебре B^\bullet с компонентами B^1 и B^2 , где $B^2 = \{b : bA = 0\} \subseteq A$, а $B^1 = A/B^2$ (так что $B^2 = A^2$, а $B^1 \cong A^1$), и умножением, индуцированным умножением в A .

Граф B_n . Пусть B_n – показанный на рисунке граф с вершинами x_j^v , где $j = 1, \dots, 2n + 1$, $v \in \mathbf{V}$, причём $v \in \mathbf{U}$, если j нечётно.

Моноид W_n действует на графе B_n слева по правилу $w \cdot x_j^v = x_j^{w_j v}$. Пусть $w_*: B_n \rightarrow B_n$ – действие элемента $w \in W_n$. Граф B_n с действием моноида W_n задаёт функтор

$$\underline{B}_n: W_n \setminus \{*\} \rightarrow \mathbf{Graph}, \quad * \mapsto B_n, \quad w|_{*\rightarrow*} \mapsto w_*.$$



Так как $\mathbf{Fun}(\Omega_r, \mathbf{k}\text{-Mod})$ – линейная категория, то кофунктор

$$W_n \setminus \{\star\} \xrightarrow{E_n} \mathbf{Graph} \xrightarrow{Q} \mathbf{k}\text{-Alc} \xrightarrow{L^r} \mathbf{Fun}(\Omega_r, \mathbf{k}\text{-Mod})$$

продолжается до линейного кофунктора

$$b_n^r : \mathbf{k}[W_n \setminus \{\star\}] \rightarrow \mathbf{Fun}(\Omega_r, \mathbf{k}\text{-Mod}).$$

Лемма. Имеем $b_n^{n-1}(Z_n \parallel_{\star \rightarrow \star}) = 0$.

Доказательство. Возьмём $p = 1, \dots, n-1$. Моноид W_n действует на графе B_n слева. Индуцированное правое действие на векторном пространстве $Q(B_n)^{\otimes p}$ делает его правым $\mathbf{k}[W_n]$ -модулем. Нужно показать, что $Q(B_n)^{\otimes p} Z_n = 0$.

Для $i = 1, \dots, n$ пусть F_i – подграф графа B_n , порождённый вершинами x_j^v с $|j - 2i| \leq 1$, и пусть $e_i : F_i \rightarrow B_n$ – морфизм включения. Так как подграфы F_i покрывают граф B_n , то (по свойству 2°) линейное отображение

$$(Q(e_i))_{i=1}^n : Q(B_n) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n Q(F_i)$$

инъективно. Возводя его в тензорную степень p , получаем инъективное линейное отображение

$$E_p : Q(B_n)^{\otimes p} \rightarrow \bigoplus_{i_1, \dots, i_p} S_{i_1 \dots i_p}, \quad S_{i_1 \dots i_p} = Q(F_{i_1}) \otimes \dots \otimes Q(F_{i_p}).$$

Подграфы F_i инвариантны относительно действия моноида W_n . Индуцированное правое действие на векторных пространствах $S_{i_1 \dots i_p}$ делает их правыми $\mathbf{k}[W_n]$ -модулями. Отображение E_p – гомоморфизм $\mathbf{k}[W_n]$ -модулей. Так как оно инъективно, то достаточно показать, что

$$S_{i_1 \dots i_p} Z_n = 0.$$

Элемент g_i действует тривиально на подграфах $F_{i'}$, $i' \neq i$. Поэтому если i отлично от i_1, \dots, i_p , то g_i действует тривиально на $S_{i_1 \dots i_p}$ и,

следовательно, $S_{i_1 \dots i_p} Z_n = 0$. Так как $p < n$, то такое i найдётся для любых i_1, \dots, i_p . \square

Графы C_n^s (венки). Пусть $n \geq 2$. Для $s \in U$ пусть C_n^s – граф, получающийся из графа B_n отождествлениями вершины x_{2n+1}^v с вершиной x_1^{sv} для каждого $v \in U$. Пусть $f_n^s: B_n \rightarrow C_n^s$ – морфизм проекции. Мы называем C_n^+ *простым*, а C_n^- *мёбиусовым венками*.

Графы C_n^s , $s \in U$, неизоморфны (рёбра, содержащие вершины валентности 2, образуют в C_n^+ два цикла, а в C_n^- один). Они конечны и допустимы, и поэтому (см. свойства 1° и 3°) их алгебры $Q(C_n^s)$ конечномерны и неизоморфны. Покажем, что представления $L^{n-1}(Q(C_n^s))$, $s \in U$, изоморфны.

Для $s, t \in U$ и $w \in W_n(s, t)$ зададим морфизм $w_*: C_n^s \rightarrow C_n^t$ условием коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{f_n^s} & C_n^s \\ w_* \downarrow & & \downarrow w_* \\ B_n & \xrightarrow{f_n^t} & C_n^t. \end{array}$$

Таким образом определён функтор

$$\underline{C}_n: W_n \parallel U \rightarrow \mathbf{Graph}, \quad s \mapsto C_n^s, \quad w|_{s \rightarrow t} \mapsto w_*.$$

Морфизмы f_n^s , $s \in U$, образуют морфизм функторов $f_n: \underline{B}_n \circ \omega_n \rightarrow \underline{C}_n$:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{Graph} & \\ \underline{B}_n \nearrow & & \nwarrow \underline{C}_n \\ W_n \parallel \{\star\} & \xrightarrow{f_n} & W_n \parallel U \\ & \xleftarrow{\omega_n} & \end{array}$$

Так как $\mathbf{Fun}(\Omega_r, \mathbf{k}\text{-Mod})$ – линейная категория, то кофунктор

$$W_n \parallel U \xrightarrow{\underline{C}_n} \mathbf{Graph} \xrightarrow{Q} \mathbf{k}\text{-Alc} \xrightarrow{L^r} \mathbf{Fun}(\Omega_r, \mathbf{k}\text{-Mod})$$

продолжается до линейного кофунктора

$$c_n^r: \mathbf{k}[W_n \parallel U] \rightarrow \mathbf{Fun}(\Omega_r, \mathbf{k}\text{-Mod}).$$

Морфизм f_n индуцирует морфизм кофункторов

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{Fun}(\Omega_r, \mathbf{k}\text{-Mod}) & \\
 b_n^r \nearrow & & \nwarrow c_n^r \\
 \mathbf{k}[W_n \setminus \{\star\}] & \xleftarrow{\mathbf{k}[\omega_n]} & \mathbf{k}[W_n \setminus U]
 \end{array}$$

т. е. для любых $s, t \in U$ и $X \in \mathbf{k}[W_n(s, t)]$ мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 L^r(Q(B_n)) & \xleftarrow{L^r(Q(f_n^s))} & L^r(Q(C_n^s)) \\
 b_n^r(X \parallel_{\star \rightarrow \star}) \uparrow & & \uparrow c_n^r(X \parallel_{s \rightarrow t}) \\
 L^r(Q(B_n)) & \xleftarrow{L^r(Q(f_n^t))} & L^r(Q(C_n^t))
 \end{array}$$

(использовано правило (2)). Так как морфизм f_n^s – покрытие, то (по свойству 2°) гомоморфизм $Q(f_n^s): Q(C_n^s) \rightarrow Q(B_n)$ инъективен и, следовательно, морфизм $L^r(Q(f_n^s))$ пообъектно инъективен.

Теперь пусть $r = n - 1$, $s = t$ и $X = Z_n$. По лемме, $b_n^{n-1}(Z_n \parallel_{\star \rightarrow \star}) = 0$. Значит, $c_n^{n-1}(Z_n \parallel_{s \rightarrow s}) = 0$ (в силу коммутативности диаграммы и указанной пообъектной инъективности). Покажем, что в диаграмме

$$\begin{array}{ccc}
 L^{n-1}(Q(C_n^+)) & \xrightarrow{c_n^{n-1}(T_n \parallel_{-\rightarrow +})} & L^{n-1}(Q(C_n^-)) \\
 & \xleftarrow{c_n^{n-1}(T_n \parallel_{+\rightarrow -})} &
 \end{array}$$

стрелки взаимно обратны. Для каждого $s \in U$ имеем

$$\begin{aligned}
 c_n^{n-1}(T_n \parallel_{s \rightarrow -s}) \circ c_n^{n-1}(T_n \parallel_{-s \rightarrow s}) &= c_n^{n-1}(T_n \parallel_{-s \rightarrow s} \circ T_n \parallel_{s \rightarrow -s}) = \\
 &= c_n^{n-1}(1_s - Z_n \parallel_{s \rightarrow s}) = 1_{L^{n-1}(Q(C_n^s))} - c_n^{n-1}(Z_n \parallel_{s \rightarrow s}) = 1_{L^{n-1}(Q(C_n^s))}
 \end{aligned}$$

(использовано равенство (1)).

Я благодарю И. С. Баскова, из моих разговоров с которым получилась эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. С. Подкорытов, *Коммутативные алгебры и представления категории конечных множеств*. — Зап. науч. семин. ПОМИ **388** (2011), 189–195.
2. W. Dreckmann, *Linearization reflects isomorphism*, препринт (2012), <https://www.idmp.uni-hannover.de/fileadmin/institut/IDMP-Studium-Mathematik/downloads/Dreckmann/lincat.pdf>.
3. J. Gubeladze, *The isomorphism problem for commutative monoid rings*. — J. Pure Appl. Algebra **129** (1998), 35–65.
4. J.-L. Loday, *Cyclic homology*, Springer-Verlag, 1992.

Podkorytov S. S. On the algebra of the Möbius crown.

A commutative algebra over a field gives rise to a representation of the category of finite sets and surjective maps. We consider the restriction of this representation to the subcategory of sets of cardinality at most r . For each r , we present two non-isomorphic algebras that give rise to isomorphic representations of this subcategory.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: ssp@pdmi.ras.ru

Поступило 14 мая 2020 г.