Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 492, 2020 г.

В. В. Нестеров

ИЗВЛЕЧЕНИЕ МАЛОРАНГОВЫХ УНИПОТЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В $\mathrm{GL}(4, K)$

§1. Введение

В данной работе доказано, что подгруппа, порожденная парой 2-торов в $\mathrm{GL}(4, K)$, содержит унипотентные элементы ранга не более двух при условии, что поле K состоит из не менее чем девятнадцати элементов. С учетом результатов работ [3] и [5] это утверждение будет верным для любой полной линейной группы $\mathrm{GL}(n, K)$.

Задача извлечения унипотентных элементов и подгрупп известна давно. Она оказалась ключевой и наиболее сложной в описании подгрупп групп Шевалле, содержащих расщепимый максимальный тор. Основные идеи этого описания и многочисленные ссылки можно найти в обзоре Н. А. Вавилова [2].

Впервые задача об извлечении унипотентных элементов в $\mathrm{GL}(n, K)$, насколько известно автору, появилась в работе З. И. Боревича [1] при описании подгрупп, содержащих группу диагональных матриц. В работах [8, 10, 12] аналогичная задача была решена для произвольных групп Шевалле над полем.

Данная работа является одной из целой серии работ, посвященных изучению подгрупп групп Шевалле, порожденных торами. В идейном смысле эти планируемые работы продолжают работу Н. А. Вавилова [3], в которой описаны все подгруппы, порожденные парой 1-торов.

Конечно, результат данной работы сразу будет следовать из описания подгрупп, порожденных парой 2-торов. Но, во-первых, это описание достаточно большое и требует очень громоздких вычислений. Во-вторых, теорему об извлечении унипотентов интересно получить, и не прибегая к описанию.

В работе [5] мы доказали, что пара 2-торов (X, Y) одновременным сопряжением вкладывается, вообще говоря, в $\mathrm{GL}(6, K)$. Тем не менее, целесообразно разбить пары торов по минимальной степени вложения на случаи вложения в $\mathrm{GL}(4, K)$, $\mathrm{GL}(5, K)$ или $\mathrm{GL}(6, K)$. В работе [6] мы описали порождения парой 2-торов в $\mathrm{GL}(5, K)$ и $\mathrm{GL}(6, K)$. Общим

Ключевые слова: Линейные группы, унипотентные элементы, торы.

и наиболее сложным случаем является ситуация, когда пара 2-торов (X, Y) вкладывается в $\mathrm{GL}(4, K)$.

Итак, мы формулируем наш основной результат.

Теорема 1. *Пусть X и Y – два некоммутирующих 2-тора в $\mathrm{GL}(4, K)$. Предположим, что поле K содержит по крайней мере 19 элементов. Тогда подгруппа $\langle X, Y\rangle$, порождённая группами X и Y, содержит однопараметрическую подгруппу унипотетных элементов, сопряженную группе*

$$\{t_{12}(\varepsilon)t_{34}(\zeta\varepsilon),\ \varepsilon \in K\}$$

для некоторого фиксированного $\zeta \in K$.

В более общем контексте рассмотренные нами 2-торы в $\mathrm{GL}(n, K)$ являются микровесовыми торами в расширенной группе Шевалле типа A_ℓ. В свою очередь, микровесовые элементы – это наиболее просто устроенные полупростые элементы в группах Шевалле, геометрия которых еще очень далека от понимания.

С точки зрения приложений наиболее интересно получить аналогичный нашему результат для пары некоммутирующих микровесовых торов в группах Шевалле типа E_6 и типа E_7. Более детально об этом мы говорили в обзоре [4].

Настоящая работа организована следующим образом. В §2 мы фиксируем стандартные обозначения, в §3 цитируем некоторые результаты о парах 2-торов и доказываем ключевую лемму. §4 посвящен доказательству основной теоремы 1 в общем случае и в §5 мы отдельно рассматриваем случай поля $\mathbb{F}_{19}$.

§2. Стандартные обозначения

Зафиксируем стандартные обозначения. Пусть $G = \mathrm{GL}(n, K)$ – полная линейная группа степени n над полем K. В дальнейшем нам встретятся следующие подгруппы G: группа верхних треугольных матриц $\mathrm{B}(n, K)$, группа диагональных матриц $\mathrm{D}(n, K)$, мономиальная группа $\mathrm{N}(n, K)$ и группа верхних унитреугольных матриц $\mathrm{U}(n, K)$.

Фактор-группа $\mathrm{N}(n, K)/\mathrm{D}(n, K)$ изоморфна симметрической группе S_n. Обозначим через W_n группу матриц перестановок в G. Тогда группы S_n и W_n отождествляются посредством изоморфизма $\pi \mapsto w_\pi$, где w_π обозначает матрицу, у которой в позиции (i, j) стоит $\delta_{i,\pi j}$. Через w_{ij} мы обозначаем матрицу перестановки, отвечающей транспозиции (i, j).

Для матрицы $g \in G$ мы обозначаем через g_{ij} ее матричный элемент в позиции (i,j), так что $g = (g_{ij})$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$. Пусть e – единичная матрица, а e_{ij} – стандартная матричная единица, т.е. матрица, у которой коэффициент в позиции (i,j) равен 1, в то время как все остальные коэффициенты равны 0. Тогда $g = \sum g_{ij} e_{ij}$.

Через $t_{ij}(\varepsilon) = e + \varepsilon e_{ij}$ для $\varepsilon \in K$ и $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ мы обозначаем элементарную трансвекцию. Аналогично, $d_i(\varepsilon) = e + (\varepsilon - 1)e_{ii}$ обозначает элементарное псевдоотражение. Для фиксированных $i \neq j$ группа $X_{ij} = \{t_{ij}(\varepsilon), \varepsilon \in K\}$ называется элементарной унипотентной корневой подгруппой. Для фиксированного i группа $Q_i = \{d_i(\varepsilon),\ \varepsilon \in K^*\}$ – группа элементарных псевдоотражений.

Иногда нам удобнее рассматривать матрицу $g \in G$ как соответствующее линейное преобразование пространства столбцов $V = K^n$. Это преобразование умножает столбец пространства V на g слева. В таких случаях мы называем элементы группы G преобразованиями.

Обозначим через $e_1, \ldots, e_n$ стандартный базис V, т.е. столбцы e_i, у которых i-я компонента равна 1, а все остальные компоненты – нули. Двойственное пространство $V^* = {}^nK$ является левым векторным пространством строк длины n. Через $f_1, \ldots, f_n$ мы обозначаем стандартный базис ${}^nK$, двойственный к $e_1, \ldots, e_n$ по отношению к стандартному спариванию.

Тогда элементарным m-тором Q называется подгруппа, состоящая из элементов вида

$$d(\varepsilon) = e + e_1(\varepsilon - 1)f_1 + \ldots + e_m(\varepsilon - 1)f_m,$$

где $\varepsilon \in K^* = K \backslash \{0\}$. Эта подгруппа отвечает подпространствам $U_0 = \langle e_1, \ldots, e_m \rangle$ и $W_0 = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. Чтобы подчеркнуть, что мы имеем дело с тором, мы пишем $Q = Q_{U_0 W_0}$. Заметим, что элементарный 1-тор – это группа элементарных псевдоотражений.

В матричном представлении элементарный m-тор является диагональной матрицей с первыми m элементами на главной диагонали равными ε:

$$Q = \{\operatorname{diag}(\varepsilon, \ldots, \varepsilon, 1, \ldots, 1),\ \varepsilon \in K^*\}.$$

Произвольным m-тором называется подгруппа, сопряженная элементарному тору Q. Элементы произвольного m-тора представляются в виде

$$d(\varepsilon) = e + u_1(\varepsilon - 1)v_1 + \ldots + u_m(\varepsilon - 1)v_m,$$

где $u_i = ge_i$, $v_i = f_i g^{-1}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, для некоторого элемента $g \in \mathrm{GL}(n,K)$. При этом $U = \langle u_1, \dots, u_m \rangle$ и $W = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$.

Подпространство $W \subset V^*$ называется осью преобразования $d(\varepsilon)$, подпространство U – центром преобразования $d(\varepsilon)$.

Более подробное обсуждение приведенных здесь понятий и связанных с ними результатов можно найти в работах [11] и [5].

§3. Пары 2-торов в $\mathrm{GL}(n,K)$

Утверждение нашей теоремы 1 для пары 2-торов, содержащихся в $\mathrm{GL}(3,K)$, следует из работы [3]. Утверждение теоремы в случае $\mathrm{GL}(5,K)$ является непосредственным следствием описания всех подгрупп, порожденных парой 2-торов в $\mathrm{GL}(5,K)$, полученное в [6]. Пары 2-торов в $\mathrm{GL}(6,K)$ получаются исключительно удвоением пары 1-торов (см. [6]). Поэтому для них результат также следует из [3].

Таким образом, нам остаётся рассмотреть самый сложный случай, когда пара 2-торов вкладывается в $\mathrm{GL}(4,K)$ и не вкладывается в $\mathrm{GL}(3,K)$.

Ранее в работах [5] и [6] для исследования взаимного расположения пары 2-торов был введен ряд инвариантов. Напомним некоторые из них. Пусть X и Y суть два 2-тора с центрами U_1 и U_2 и осями W_1 и W_2, соответственно. Несложно проверить (см. [5]), что величины

$$r = r(X,Y) = \dim(U_1 + U_2),$$
$$s = s(X,Y) = \dim(W_1 + W_2).$$

не меняются при одновременном сопряжении пары (X,Y) элементом $g \in G$ и верно $2 \leqslant r, s \leqslant 4$.

Лемма 1 ([6])**.** *Пусть X и Y – два 2-тора в $\mathrm{GL}(n,K)$. Если r, $s \leqslant 3$, то пара (X,Y) сопряжена с парой 2-торов в $\mathrm{GL}(4,K)$.*

Из доказательства этой леммы сразу получается следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть X и Y – два 2-тора в $\mathrm{GL}(4,K)$. Если $r=3$, $s=2$ или $r=2$, $s=3$, то пара (X,Y) сопряжена с парой 2-торов в $\mathrm{GL}(3,K)$.*

Лемма 3. *Пусть X и Y – два 2-тора в $\mathrm{GL}(4,K)$. Если $r=s=3$, то пара (X,Y) сопряжена либо с парой 2-торов в $\mathrm{GL}(3,K)$, либо с парой 2-торов в $\mathrm{B}(4,K)$.*

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что $X = Q$, $Y = Q_{UW}$, где $U = \langle u_3, u_4\rangle$, $W = \langle w_3, w_4\rangle$. Учитывая, что $r = 3$, запишем

$$u_3 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \quad u_4 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3.$$

Пусть

$$w_3 = \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 + \gamma_3 f_3 + \gamma_4 f_4, \quad w_4 = \delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 + \delta_3 f_3 + \delta_4 f_4.$$

Поскольку $s = 3$, векторы $\gamma_3 f_3 + \gamma_4 f_4$ и $\delta_3 f_3 + \delta_4 f_4$ коллинеарны и ненулевые. Предположим, что $\gamma_3 \neq 0$ (следовательно, и $\delta_3 \neq 0$). Тогда, благодаря сопряжению пары торов трансвекцией $t_{34}(\gamma_4\gamma_3^{-1})$, можно считать, что $\gamma_4 = \delta_4 = 0$. Таким образом, пара (X, Y) вкладывается в $\mathrm{GL}(3, K)$.

Пусть $\gamma_3 = \delta_3 = 0$. Из условий $(w_3, u_3) = (w_4, u_4) = 1$, $(w_3, u_4) = (w_4, u_3) = 0$ следует, что

$$\begin{cases} \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 = 1, \\ \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1\delta_1 + \alpha_2\delta_2 = 0, \\ \alpha_1\delta_1 + \alpha_2\delta_2 = 1. \end{cases}$$

Положим $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$. Равенство $\Delta = 0$ невозможно. Поэтому

$$\gamma_1 = \frac{\beta_2}{\Delta}, \quad \gamma_2 = -\frac{\beta_1}{\Delta}, \quad \delta_1 = -\frac{\alpha_2}{\Delta}, \quad \delta_2 = \frac{\alpha_1}{\Delta}.$$

Теперь в указанном базисе порождающий элемент группы Y выглядит следующим образом.

$$y(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & (\alpha_1\gamma_4 + \beta_1\delta_4)(\varepsilon - 1) \\ 0 & \varepsilon & 0 & (\alpha_2\gamma_4 + \beta_2\delta_4)(\varepsilon - 1) \\ (\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3)\Delta^{-1}(\varepsilon - 1) & (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\Delta^{-1}(\varepsilon - 1) & 1 & (\alpha_3\gamma_4 + \beta_3\delta_4)(\varepsilon - 1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ясно, что сопряжение с помощью произведения матриц перестановок $w_{23}w_{13}$ переведет пару торов в $\mathrm{B}(4, K)$. $\square$

Теперь мы в состоянии конкретизировать подгруппы, порождения которыми рассмотрим в следующем параграфе.

Лемма 4. *Пусть X и Y – пара некоммутирующих 2-торов в $\mathrm{GL}(4, K)$, причем один из инвариантов r или s равен 4. Тогда либо пара (X, Y) сопряжена с парой 2-торов в $\mathrm{B}(4, K)$, либо пара (X, Y) сопряжена с* *парой подгрупп вида*

$X_\lambda = \{d_1(\varepsilon)d_2(\varepsilon)t_{41}(\varepsilon-1)t_{32}(\lambda(\varepsilon-1)),\ \varepsilon \in K^*\}$,
$Y_1 = \{d_3(\eta)d_4(\eta)t_{13}(\alpha(\eta-1))t_{23}(\beta(\eta-1))t_{24}(\gamma(\eta-1))t_{14}(\delta(\eta-1)),\ \eta \in K^*\}$,

причём для коэффициентов выполняется одно из следующих условий:

1) $\lambda = 0$ *или* $\lambda = 1$, $\delta \neq 0$, α, β, $\gamma \in K$,
2) $\lambda = 1$, $\delta = \beta = 0$, $\alpha = 1$, $\gamma \in K^*$.

Доказательство. Пусть $X = Q_{U_1W_1}$, $Y = Q_{U_2W_2}$, где $U_1 = \langle u_1, u_2\rangle$, $W_1 = \langle w_1, w_2\rangle$, $U_2 = \langle u_3, u_4\rangle$, $W = \langle w_3, w_4\rangle$.

Поскольку случаи, соответствующие $r = 4$, $s = 3$ и $r = 3$, $s = 4$ отождествляются под действием контраградиента, т.е. при перемене местами строк и столбцов, достаточно ограничиться предположением, что $s = 4$.

В этом случае найдётся такой элемент $g \in G$, что $w_i g^{-1} = f_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Следовательно,

$$u_1 = e_1 + \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_4, \quad u_3 = e_3 + \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2,$$
$$u_2 = e_2 + \beta_1 e_3 + \beta_2 e_4, \quad u_4 = e_4 + \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2,$$

где α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2, δ_1, $\delta_2 \in K$.

Поскольку торы не коммутируют, можно считать, что хотя бы один из коэффициентов α_1, α_2, β_1, β_2 не равен нулю. Более того, благодаря действию матрицами перестановок w_{12} или w_{34}, будем считать, что $\alpha_2 \neq 0$. Сопряжение подходящей диагональной матрицей d_2 позволяет считать, что $\alpha_2 = 1$.

Пусть $X = \{x(\varepsilon), \varepsilon \in K^*\}$, $Y = \{y(\eta),\ \eta \in K^*\}$, где

$$x(\varepsilon) = e + u_1(\varepsilon-1)f_1 + u_2(\varepsilon-1)f_2,$$
$$y(\varepsilon) = e + u_3(\varepsilon-1)f_3 + u_4(\varepsilon-1)f_4.$$

Одновременно сопрягаем $x(\varepsilon)$ и $y(\eta)$ трансвекциями $t_{34}(-\alpha_1)$ и $t_{12}(\beta_1)$ и подходящей диагональной матрицей d_3. В результате получаем подгруппы

$\{d_1(\varepsilon)d_2(\varepsilon)t_{41}((\varepsilon-1))t_{32}(\lambda(\varepsilon-1)),\ \varepsilon \in K^*\}$,

$\{d_3(\eta)d_4(\eta)t_{13}(\alpha(\eta-1))t_{23}(\beta(\eta-1))t_{24}(\gamma(\eta-1))t_{14}(\delta(\eta-1)),\ \eta \in K^*\}$,

где $\lambda = 0$ или 1, α, β, γ, $\delta \in K$.

Теперь обратимся к подгруппе Y. Если коэффициент $\delta \neq 0$, то всё доказано.

Если $\delta = 0$, но $\beta \neq 0$ и $\lambda = 1$, то, действуя матрицами перестановок, получаем, что коэффициент в позиции $(1,4)$ матрицы $y(\eta)$ не равен нулю и, следовательно, можно считать, что $\delta \neq 0$, при этом $\beta = 0$.

Если $\delta = 0$, но $\beta \neq 0$ и $\lambda = 0$, то, благодаря матрицам перестановок w_{14}, w_{12} и w_{34}, пару (X, Y) сопрягаем с парой в $\mathrm{B}(4, K)$.

Если $\delta = \beta = 0$ и хотя бы один из коэффициентов λ, α или γ нулевой, то с помощью матриц перестановок переводим пару подгрупп в $\mathrm{B}(4, K)$. Если $\lambda = 1$, $\alpha, \gamma \neq 0$, то, действуя сопряжением диагональной матрицей $d_2(\alpha)d_3(\alpha)$, получаем, что можно считать $\alpha = 1$. Лемма доказана. $\square$

В дальнейшем мы имеем дело только с подгруппами X_λ и Y_1, при этом мы отдельно рассматриваем подгруппы X_0 и X_1 в зависимости от значения λ.

В завершение этого параграфа выпишем в матричной записи порождающие элементы подгрупп X_λ и Y_1, соответственно:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\varepsilon-1) & 1 & 0 \\ \varepsilon - 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha(\eta-1) & \delta(\eta-1) \\ 0 & 1 & \beta(\eta-1) & \gamma(\eta-1) \\ 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}.$$

§4. Извлечение унипотентов

В этом параграфе мы доказываем нашу основную теорему 1 для поля K, состоящего из не менее чем 23 элементов. Доказательство теоремы разобъем на несколько случаев. Во-первых, рассмотрим случай вложения пары 2-торов (X, Y) в $\mathrm{B}(4, K)$.

Теорема 2. *Пусть X и Y – два некоммутирующих 2-тора в $\mathrm{B}(4, K)$. Тогда подгруппа $\langle X, Y \rangle$, порождённая группами X и Y, содержит однопараметрическую подгруппу унипотентных элементов, сопряженную группе*

$$\{t_{12}(\varepsilon)t_{34}(\zeta\varepsilon),\ \varepsilon \in K\}$$

для некоторого фиксированного $\zeta \in K$.

Доказательство. Можно сразу считать, что $X = Q$. Тогда прямые вычисления показывают, что коммутант $[Q, Y]$ для любой подгруппы $Y \leqslant \mathrm{B}(4, K)$ лежит в подгруппе порождённой группами трансвекций

X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24}. Далее, несложно видеть, что любая однопараметрическая подгруппа этой группы при помощи подходящих трансвекций вида $t_{34}(*)$ и $t_{43}(*)$ сопряжена группе $\{t_{12}(\varepsilon)t_{34}(\zeta\varepsilon),\ \varepsilon \in K\}$ для некоторого фиксированного $\zeta \in K$. $\square$

Ключевым моментом в дальнейших рассуждениях является доказательство того, что подгруппа, порождённая парой 2-торов, содержит элемент специального вида:

$$b = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{14} \\ 0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{24} \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2, \end{pmatrix} \qquad (*)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in K^*$, $\varepsilon_{ij} \in K$, $i = 1, 2$, $j = 3, 4$ и хотя бы для одной пары индексов (i, j) $\varepsilon_{ij} \neq \alpha_{ij}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$, где $\alpha_{13} = \alpha$, $\alpha_{23} = \beta$, $\alpha_{24} = \gamma$, $\alpha_{14} = \delta$ – коэффициенты в определении группы Y_1.

Назовём произведение трансвекций $t_{ij}(\varepsilon)t_{k\ell}(\zeta\varepsilon)$ *маленьким* унипотентным элементом, если $i, j, k, \ell \in \{1, 2, 3, 4\}$ – попарно различные индексы, $i < j$, $k < \ell$, $\varepsilon \in K^*$, $\zeta \in K$.

Лемма 5. *Пусть b – элемент вида $(*)$. Тогда группа $\langle Y_1, b\rangle$ содержит однопараметрическую подгруппу унипотентных элементов, сопряженную группе*

$$\{t_{12}(\varepsilon)t_{34}(\zeta\varepsilon),\ \varepsilon \in K\}$$

для некоторого фиксированного $\zeta \in K$.

Доказательство. Вычислим коммутатор $z(\xi) = [y(\xi), b]$, который, очевидно, лежит в $U(4, K)$. При $i = 1, 2$, $j = 3, 4$, имеем

$$z(\xi)_{ij} = \frac{(\alpha_{ij}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \varepsilon_{ij})(\xi - 1)}{\varepsilon_2\xi}, \quad z(\xi)_{12} = 0, \quad z(\xi)_{34} = 0.$$

По предположению хотя бы один коэффициент $z(\xi)_{ij}$, $\xi \neq 1$, отличен от нуля. Следовательно, $z(\xi)$ – неединичный унипотентный элемент вида $t_{13}(\xi_1)t_{14}(\xi_2)t_{23}(\xi_3)t_{24}(\xi_4)$, где хотя бы один $\xi_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Теперь несложно видеть, что любой элемент данного вида сопряжен при помощи подходящих трансвекций $t_{34}(*)$ и $t_{43}(*)$ маленькому унипотентному элементу.

Наконец, если группа $\langle Y_1, b\rangle$ содержит элемент, сопряженный $t_{13}(\varepsilon)t_{24}(\zeta\varepsilon)$, то она содержит элементы такого вида для любого $\varepsilon \in K$.

Действительно,

$$y(\eta)t_{13}(\varepsilon)t_{24}(\zeta\varepsilon)y(\eta)^{-1} = t_{13}(\varepsilon/\eta)t_{24}(\zeta\varepsilon/\eta). \qquad \square$$

Таким образом, для доказательства теоремы 1 нам осталось показать, что подгруппа, порождённая парой 2-торов, содержит элемент вида $(*)$.

В силу леммы 4, либо пара 2-торов (X, Y) содержится в $\mathrm{B}(4, K)$, либо она приводится одновременным сопряжением к одной из двух пар (X_0, Y_1) или (X_1, Y_1). Анализ этих ситуаций и завершает доказательство теоремы 1.

В последующих теоремах мы явно построим элемент вида $(*)$. Он будет равен произведению образующих $x(\varphi_i(\xi))$ и $y(\varphi_j(\xi))$, аргументами которых являются некоторые дробно-рациональные функции $\varphi_i(\xi)$. При этом мы вводим множество Ξ, состоящее из тех элементов поля $\xi \in K$, при которых все $\varphi_i(\xi)$ определены и отличны от нуля.

Положим $\overline{\Xi} = K \setminus \Xi$. Тогда ограничение на число элементов поля в формулировках следующих теорем обусловлено оценкой верхней границы множества $\overline{\Xi}$.

Лемма 6. *Предположим, что в определении группы Y_1 коэффициент $\delta = 1$. Тогда пара 2-торов (X_0, Y_1) сопряжена с парой 2-торов в $\mathrm{B}(4, K)$.*

Доказательство. Действительно, $t_{41}(-1)X_0t_{41}(1) = Q$, а

$$t_{41}(-1)Y_1t_{41}(1) = \begin{pmatrix} \xi & 0 & \alpha(\xi-1) & \xi-1 \\ \gamma(\xi-1) & 1 & \beta(\xi-1) & \gamma(\xi-1) \\ 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(1-\xi) & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее, сопряжением с помощью матриц перестановок $w_{34}w_{12}$ попадаем в $\mathrm{B}(4, K)$. $\square$

Теорема 3. *Предположим, что $|K| \geqslant 7$ и коэффициент $\delta \neq 1$. Тогда подгруппа $H = \langle X_0, Y_1 \rangle$ содержит элемент вида $(*)$.*

Доказательство. Для $\xi \in K$ положим

$$\varphi_1(\xi) = \frac{(1-\delta)\xi}{(1-\delta)\xi+\delta},$$

$$\varphi_2(\xi) = \frac{\delta\xi}{\xi+\delta},$$

$$\varphi_3(\xi) = \frac{(\delta^2-\delta)\xi-\delta^2}{(\xi-1)((\delta-1)\xi-\delta+\delta^2)}.$$

Если $\xi \neq 0,\ 1,\ -\delta$ и $\frac{\delta}{\delta-1}$, то функции $\varphi_i(\xi)$, $i = 1,\ 2,\ 3$ определены и отличны от нуля. Следовательно $|\Xi| \leqslant 4$. Вычисляем

$$z(\xi) = x(\varphi_1(\xi))y(\varphi_2(\xi))x(\varphi_3(\xi))y(\xi/(\xi-1))x(\xi).$$

В результате вычислений получается матрица вида

$$\begin{pmatrix} * & 0 & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}. \tag{1}$$

При этом для любого $i = 1, \dots, 4$ $z(\xi)_{ii} = \frac{\delta\xi^2}{(\xi-1)(\delta+\xi)}$. Кроме того, $z(\xi)_{14} = \frac{\delta\xi^2(\delta+\xi-\delta\xi-\xi^2+\delta\xi^2)}{(\xi-1)^2(\delta+\xi)^2}$.

Теперь, чтобы группа H содержала элемент типа $(*)$ достаточно найти элемент $\xi \in K$, для которого $\delta+\xi-\delta\xi-\xi^2+\delta\xi^2 \neq 0$. Для выполнения этого неравенства достаточно исключить еще не более двух элементов поля. Таким образом, учитывая, что $|K| \geqslant 7$, теорема доказана. □

Лемма 7. *Предположим, что $|K| \geqslant 7$ и в определении группы Y_1 коэффициенты α, $\gamma = 0$. Тогда либо X_1, $Y_1 \leqslant \mathrm{B}(2,K)\times\mathrm{B}(2,K)$ с точностью до одновременного сопряжения, либо $\langle X_1, Y_1\rangle \simeq \mathrm{GL}(2,K)$, либо $\langle X_1, Y_1\rangle = \mathrm{GL}(2,K)\times\mathrm{GL}(2,K)$.*

Доказательство. В данном случае подгруппы X_1 и Y_1 получаются удвоением пары 1-торов, которые вкладываются в $\mathrm{GL}(2,K)$. Поэтому результат сразу следует из леммы 9 работы [3]. □

Теорема 4. *Предположим, что $|K| \geqslant 23$ и в определении группы Y_1 один из коэффициентов α или γ отличен от нуля. Пусть, кроме того, либо $\alpha\gamma \neq (1-\beta)(1-\delta)$, либо $\alpha\gamma = (1-\beta)(1-\delta)$, но $\beta \neq 1-\delta$. Тогда подгруппа $H = \langle X_1, Y_1\rangle$ содержит элемент вида $(*)$.*

Доказательство. Положим

$$\varphi_1(\xi) = \frac{\theta\xi - \Delta(\theta-1)}{\theta^2\xi^2 + \mu(\theta^2-\theta)\xi - \theta(\theta-1)\Delta},$$
$$\varphi_2(\xi) = \frac{\theta^2\xi^2 + \mu(\theta^2-\theta)\xi - (\theta-1)^2\Delta}{\theta^2\xi^2 + (\mu(\theta^2-\theta)-\theta)\xi - (\theta-1)^2\Delta},$$

где $\Delta = \alpha\gamma - \beta\delta$, $\mu = \beta + \delta$. В качестве θ выберем любой элемент поля отличный от 0, 1 и -1.

Положим

$$z(\xi) = x(\varphi_1(\xi))y(\varphi_2(\xi))x(\theta)y(\xi/(\xi-1))x(\xi).$$

Тогда множество Ξ определяется тремя квадратными неравенствами, одним линейным и условием $\xi \neq 0,\ 1$. Поэтому $|\Xi| \leqslant 9$.

В результате прямых вычислений получаем, что коэффициенты матрицы $z(\xi)$ в позициях $(3,1)$, $(4,1)$, $(3,2)$, $(4,2)$ равны нулю.

Пусть теперь $\xi' = \frac{\mu(1-\theta)-\theta\xi}{\theta}$. Тогда

$$\varphi_1(\xi') = \frac{-\theta\xi - (\Delta+\mu)(\theta-1)}{\theta^2\xi^2 + \mu(\theta^2-\theta)\xi - \theta(\theta-1)\Delta},$$
$$\varphi_2(\xi') = \frac{\theta^2\xi^2 + (\mu(\theta^2-\theta)+\theta)\xi - (\theta-1)^2\Delta + (\theta-1)\mu}{\theta^2\xi^2 + (\mu(\theta^2-\theta)-\theta)\xi - (\theta-1)^2\Delta}.$$

Для того чтобы элемент $z(\xi')$ был определен, добавляются еще два условия на числители $\varphi_i(\xi')$, $i = 1,\ 2$, и неравенства: $\xi \neq \frac{\mu(1-\theta)}{\theta}$ и $\xi \neq \frac{\mu(1-\theta)}{\theta} - 1$. Следовательно, $|\Xi| \leqslant 14$.

Далее, вычисляем $g = g(\xi) = z(\xi)z(\xi')$. В результате получаем матрицу вида (1). При этом коэффициенты $g_{11} = g_{22}$, $g_{33} = g_{44}$, $\gamma g_{13} = \alpha g_{24}$, если $\alpha, \gamma \neq 0$, являются некоторыми дробно-рациональными функциями от ξ.

Прямые вычисления показывают, что числители дробей $\alpha_{ij}(g(\xi)_{33} - g(\xi)_{11}) - g(\xi)_{ij}$ – многочлены не более, чем восьмой степени от ξ. По предположению один из коэффициентов α или γ не равен нулю. Ясно, что можно ограничиться только одним случаем, когда, скажем, $\alpha \neq 0$.

Обозначим многочлен числителя дроби $\alpha(g(\xi)_{33} - g(\xi)_{11}) - g(\xi)_{13}$ через $p(\xi)$ и докажем, что этот многочлен ненулевой.

Для этого рассмотрим его старший коэффициент (при ξ^8). Он равен

$$\alpha(\mu - 1 + \Delta)(1 - \Delta + \theta(1+\Delta))(\theta-1)\theta^6.$$

Тогда, если $\mu-1+\Delta\neq 0$ и $1-\Delta+\theta(1+\Delta)\neq 0$, то всё доказано.

Пусть $\operatorname{char}K\neq 2$ и $\mu-1+\Delta=0$, т. е. $\alpha\gamma=(1-\beta)(1-\delta)$ и по условию $\mu\neq 1$. Тогда коэффициент $p(\xi)$ при ξ^7 равен

$$2\alpha(\mu-1)(\theta-1)^2(\theta+1)\theta^5\neq 0.$$

Пусть $\operatorname{char}K\neq 2$ и $1-\Delta+\theta(1+\Delta)=0$. Заметим, что, учитывая ограничения на θ, Δ не может быть равно 0, 1 и -1. Тогда коэффициент $p(\xi)$ при ξ^7 равен

$$\frac{8\alpha(1-\Delta)^5\Delta(1+\Delta-\mu)}{(\Delta+1)^8}.$$

Если окажется, что $\Delta=\mu-1$, при этом μ не может быть равно 0, 1, 2, то получим, что коэффициент $p(\xi)$ при ξ^6

$$\frac{32\alpha(\mu-2)^4(\mu-1)^4}{\mu^8}\neq 0.$$

Пусть $\operatorname{char}K=2$ и $\mu+1+\Delta=0$, т. е. $\alpha\gamma=(1+\beta)(1+\delta)$, $\mu\neq 1$. Тогда старший коэффициент $p(\xi)$ при ξ^6 равен

$$\alpha\mu(\mu+1)(\theta+1)^2\theta^5\neq 0 \text{ при } \mu\neq 0.$$

Если при этом $\mu=0$, то коэффициент при ξ^3 равен

$$\alpha\theta^2(\theta+1)^4\neq 0.$$

Пусть $\operatorname{char}K=2$ и $\Delta=1$, но $\mu+1+\Delta\neq 0$. Тогда старший коэффициент $p(\xi)$ при ξ^7 равен

$$\alpha\mu(\theta+1)^3\theta^5\neq 0.$$

Следовательно, $p(\xi)$ – ненулевой многочлен степени не выше 8 от ξ. Поскольку $|\Xi|\leqslant 14$ и $|K|\geqslant 23$, существует такой $\xi_0\in\Xi$, что значение многочлена $p(\xi_0)\neq 0$. Отсюда следует, что группа H содержит элемент типа $(*)$.

Теорема полностью доказана. $\square$

Если $\alpha\gamma=\delta(1-\delta)$ и $\beta=1-\delta$, то все элементы $\alpha_{ij}(g(\xi)_{33}-g(\xi)_{11})-g(\xi)_{ij}$ равны нулю, и утверждение теоремы 4 неверно. Тем не менее, на утверждение основной теоремы это не влияет.

Лемма 8. *Предположим, что в определении группы Y_1 один из коэффициентов α или γ отличен от нуля и верны соотношения $\alpha\gamma=$*

$\delta(1-\delta)$ и $\beta = 1-\delta$. Тогда подгруппа $\langle X_1, Y_1\rangle$ содержит однопараметрическую подгруппу унипотентных элементов, сопряженную группе

$$\{t_{12}(\varepsilon)t_{34}(\varepsilon),\ \varepsilon\in K\}.$$

Доказательство. В этом случае оказывается, что коммутант $[X_1, Y_1]$ является унипотентной подгруппой ранга 2.

Заметим, что из условия леммы следует, что $\delta \neq 1$. Положим $z(\varepsilon,\eta) = x(\varepsilon)y(\eta)x(\varepsilon)^{-1}y(\eta)^{-1}$ и

$$g = \begin{pmatrix} \delta & \frac{\delta\varepsilon-\varepsilon-\delta}{(\varepsilon-1)(\eta-1)} & \frac{\delta-\delta^2}{\gamma} & \frac{\delta-\delta^2}{\gamma(\eta-1)} \\ \gamma & \frac{\gamma}{\eta-1} & 1-\delta & \frac{\delta-\delta\varepsilon-1}{(\varepsilon-1)(\eta-1)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$g^{-1}z(\varepsilon,\eta)g = t_{12}(1)t_{34}(1),$$
$$g^{-1}y(\eta)g = d_1(\eta)d_3(\eta),$$
$$d_1(\eta)d_3(\eta)t_{12}(1)t_{34}(1)(d_1(\eta)d_3(\eta))^{-1} = t_{12}(\eta)t_{34}(\eta).$$

Доказательство завершено. □

§5. Поле $\mathbb{F}_{19}$

При доказательстве теоремы 4 элемент θ мог быть выбран почти произвольно. Однако, подбирая его подходящим образом, можно перенести доказательство теоремы 4 для поля из девятнадцати элементов.

Лемма 9. *Предположим, что $K = \mathbb{F}_q$ – конечное поле, $q \geqslant 9$ и нечётно. Тогда для любых λ, $\kappa \in \mathbb{F}_q$ таких, что $\kappa^2 - \lambda \neq 0$ существует $\xi_0 \in \mathbb{F}_q^*$, $\xi_0 \neq 1$, 2, такой, что*

$$\lambda\xi_0^2 + 2\kappa\xi_0 + 1 \notin \mathbb{F}_q^2.$$

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму $f(\xi,\eta) = \lambda\xi^2 + 2\kappa\xi\eta + \eta^2$ над $\mathbb{F}_q$. По теореме 6.26 [7] для любого $\nu \in \mathbb{F}_q^*$ существует $q \pm 1$ решений уравнения $f(\xi,\eta) = \nu$.

Возьмём какое-нибудь $\nu \notin \mathbb{F}_q^2$. Тогда найдётся не более двух решений вида $(\xi, 0)$ и ни одного решения вида $(0,\eta)$. Пусть $\xi = \eta$ или $\xi = 2\eta$. Тогда, соответственно, уравнения $(\lambda+2\kappa+1)\eta^2 = \nu$ и $(4\lambda+4\kappa+1)\eta^2 = \nu$ имеют не более четырёх решений. Итак, существует не менее, чем $q-7$

решений (ξ_0, η_0) уравнения $f(\xi, \eta) = \nu$, удовлетворяющих условиям ξ, $\eta \neq 0$, $\xi \neq \eta$, $\xi \neq 2\eta$.

Пусть (ξ_0, η_0) одно из таких решений. Тогда

$$\lambda \frac{\xi_0^2}{\eta_0^2} + 2\kappa \frac{\xi_0}{\eta_0} + 1 = \frac{\nu}{\eta_0^2}, \quad \frac{\nu}{\eta_0^2} \notin \mathbb{F}_q^2.$$

□

Теорема 5. *Предположим, что $K = \mathbb{F}_{19}$. Тогда утверждение теоремы 4 остаётся верным.*

Доказательство. При доказательстве теоремы 4 мы можем выбрать элемент $\theta \in K$ таким образом, что два квадратных уравнения при построении элементов $z(\xi)$ и $z(\xi')$ заведомо не будут иметь корней. Следовательно, получим ограничение на мощность множества $|\overline{\Xi}| \leqslant 10$.

Действительно, рассмотрим знаменатель $\varphi_2(\xi)$ и числитель $\varphi_2(\xi')$. Дискриминант этих многочленов от ξ равен

$$D(\theta) = (\mu(\theta^2 - \theta) - \theta))^2 + 4\theta^2(\theta - 1)^2\Delta = \theta^2((\mu^2 + 4\Delta)(1 - \theta)^2 + 2\mu(1 - \theta) + 1)).$$

Предположим, что $\Delta \neq 0$. Тогда для многочлена от $1 - \theta$ в скобках выполняются условия леммы 9 и, следовательно, существует $\theta_0 \in \mathbb{F}_{19}^*$, $\theta_0 \neq \pm 1$, что $D(\theta_0) \notin \mathbb{F}_{19}^2$.

Несложно проверить, что, если $\Delta = 0$, ограничения на мощность множества $|\overline{\Xi}|$ уменьшаются до 7. Теорема доказана. □

Список литературы

1. З. И. Боревич, *Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 12–29.
2. Н. А. Вавилов, *Подгруппы групп Шевалле, содержащие максимальный тор.* — Труды Ленингр. Мат. Общества **1** (1990), 64–109.
3. Н. А. Вавилов, *Геометрия* 1*-торов в* GL_n. — Алгебра и Анализ **19**, No. 3 (2007), 120–151.
4. Н. А. Вавилов, В. В. Нестеров, *Геометрия микровесовых торов.* Владикавказский мат. журнал **10**, No. 1 (2008), 10–23.
5. V. V.Nesterov, N. A. Vavilov, *Pairs of microweight tori in* GL_n , Chebyshevskii sbornik, (2020), 11p.
6. Н. А. Вавилов, В. В. Нестеров, *Подгруппы, порожденные парой 2-торов в* $\mathrm{GL}_5(K)$, предложено в печать
7. Р. Лидл, Г. Нидеррайтер, *Конечные поля Т.*1. М., Мир, 1988. 430 с.
8. H. Azad, *Root groups.* — J. Algebra **76**, No. 1 (1982), 211–213.

9. A. M. Cohen, H. Cuypers, H. Sterk, *Linear groups generated by reflection tori.* — Canad. J. Math. **51**, No. 6 (1999), 1149–1174.
10. E. Cline, B. Parshall, L. Scott, *Minimal elements of $N(H,P)$ and conjugacy of Levi complements in finite Chevalley groups.* — J. Algebra **34**, No. 3 (1975), 521–523.
11. A. J. Hahn, O. T. O'Meara, *The classical groups and K-theory.* Springer, Berlin et al., 1989.
12. G. Seitz, *Small rank permutation representations of finite Chevalley groups.* — J. Algebra **28**, No. 3 (1974), 508–517.

Nesterov V. V. Extraction of small rank unipotent elements in $\mathrm{GL}(4,K)$.

In the present paper we prove that in the group $\mathrm{GL}(4,K)$ over the field which has at least 19 elements the subgroup generated by a pair of 2-tori contains unipotent elements of rank 1 or 2. Keeping in mind the papers of N.A. Vavilov and author this result is valid for any general linear group. This paper is one of the first step of studying of the subgroups generated by a pair of microweight tori in Chevalley groups.

С.-Петербургский государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 С.-Петербург, Россия
E-mail: vl.nesterov@mail.ru

Поступило 14 мая 2020 г.