Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 492, 2020 г.

А. И. Мадунц

МНОЖЕСТВА СХОДИМОСТИ МНОГОМЕРНОГО ПОЛНОГО ПОЛЯ

§1. Структура многомерных полных полей

Многомерные локальные поля и обобщающие их многомерные полные поля впервые возникли в работах А. Н. Паршина (см. [7, 8]). Напомним (см. [2]), что поле $K_n = K$, полное относительно дискретного нормирования v_n, называют n-мерным локальным полем, если его поле вычетов $K_{n-1} = \overline{K}$ является $(n-1)$-мерным локальным полем, причем под 0-мерным локальным полем подразумевается конечное поле. Отличие в определении многомерного полного поля лишь в том, что 0-мерное полное поле совершенно.

Для сокращения записи введем обозначения

$$\overline{r}=(r_1,\dots,r_n),\ \ \overline{r}_k=(r_{k+1},\dots,r_n),\ \ \overline{t}_k^{\overline{r}_k}=t_{k+1}^{r_{k+1}}\dots t_n^{r_n}\ \ (0\leqslant k\leqslant n-1).$$

На $\mathbb{Z}^n$ будем использовать следующее лексикографическое упорядочивание: $\overline{r}^{(1)} < \overline{r}^{(2)}$, если при некотором $1 \leqslant k \leqslant n$ имеем $\overline{r}_k^{(1)} = \overline{r}_k^{(2)}, r_k^{(1)} < r_k^{(2)}$.

Выберем t_n – униформизующую поля K_n относительно v_n, затем t_{n-1} – единицу в K_n, класс вычетов которой $\overline{t_{n-1}}$ является униформизующей в K_{n-1}, и так далее до t_1 – единицы в K_n, которая при переходе к K_1 становится униформизующей. Набор $(t_1,\dots,t_n) = \overline{t}$ называется системой локальных параметров поля K и определяет на нем нормирование $\overline{v} = (v^{(1)},\dots,v^{(n)})$ ранга n, заданное формулами $v^{(k)}(a) = v_{K_k}\left(\overline{at_n^{-v^{(n)}(a)}\dots t_{k+1}^{-v^{(k+1)}(a)}}\right)$ при $a \neq 0$ и $\overline{v}(0) = +\infty$.

Тогда $\mathcal{O} = \{a \in K : \overline{v}(a) \geqslant 0\}$ образует кольцо нормирования, причем оно не зависит от выбора локальных параметров, а единственным его максимальным идеалом является $\wp = \{\, a \in \mathcal{O} : \overline{v}(a) > 0\,\}$. Группу единиц кольца целых будем обозначать U.

Напомним (см. [11]), что полное дискретно нормированное поле K с полем вычетов $\overline{K}$ той же характеристики изоморфно $\overline{K}((t))$ – полю

Ключевые слова: многомерные локальные поля, топология, сходимость степенных рядов.

рядов Лорана над полем вычетов, что позволяет в равнохарактеристическом случае свести n-мерное локальное или полное поле к $(n-1)$-мерному.

Для анализа разнохарактеристических многомерных локальных и полных полей А. Н. Паршиным введено следующее важное понятие.

Пусть F – поле, полное относительно дискретного нормирования w. Положим

$$F\{\{t\}\} = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i t^i : c_i \in F,\ w(c_i) \geqslant c > -\infty,\ \lim_{i\to-\infty} w(c_i) = +\infty \right\}.$$

Пусть

$$v\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i t^i \right) = \min_i w(c_i).$$

Тогда $F\{\{t\}\}$ относительно v становится полным дискретно нормированным полем с полем вычетов $\overline{F}((\overline{t}))$. Следовательно, если F – $(n-1)$-мерное полное или локальное поле, то $F\{\{t\}\}$ – соответствующее n-мерное поле, причем для разнохарактеристического F поле $F\{\{t\}\}$ тоже разнохарактеристическое.

А. Н. Паршиным в [7] сформулирована и частично доказана, а И. Б. Жуковым в работе [1] полностью доказана следующая структурная теорема.

1.1. Теорема. *Пусть $K = K^{(n)}$ – n-мерное полное поле.*
1. *Если* $\operatorname{char} K = \operatorname{char} K_0$, *то* $K \approx K_0((t_1))\dots((t_n))$.
2. *При* $\operatorname{char} K = 0, \operatorname{char} K_0 = p > 0$ *пусть* $F_0 = \operatorname{Frac}(W(K_0))$ *– поле частных кольца векторов Витта над последним полем вычетов.*

Если $\operatorname{char} K^{(m+1)} = 0$, $\operatorname{char} K^{(m)} = p > 0$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$, *то K является конечным вполне разветвленным расширением поля*

$$F\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_m\}\}((t_{m+2}))\dots((t_n)),$$

где F – конечное вполне разветвленное расширение F_0. Кроме того, K имеет конечное расширение вида

$$L\{\{T_1\}\}\dots\{\{T_m\}\}((T_{m+2}))\dots((T_n)),$$

полученное добавлением элемента, алгебраического над F_0, где L – конечное расширение F_0.

Если же $\operatorname{char} K^{(1)} = 0$, $\operatorname{char} K^{(0)} = p$, *то* $K \approx k((t_2))\dots((t_n))$, *где* $k = K^{(1)}$ *– конечное вполне разветвленное расширение F_0.*

§2. Множества сходимости

Множество мультииндексов $\Omega \subset \mathbb{Z}^n$ будем называть допустимым набором, если для любого $\overline{i}_k \in \mathbb{Z}^{n-k}(1 \leqslant k \leqslant n)$ существует $I(\overline{i}_k) = I \in \mathbb{Z}$ такое, что для всех $\overline{r} \in \Omega$ из условия $\overline{r}_k = \overline{i}_k$ следует $r_k \geqslant I$.

Величины $\omega_k(\overline{i}_k) = \sup I(\overline{i}_k)$ будем называть характеристическими индексами допустимого набора, то есть, $\omega_k(\overline{r}_k)$ – наименьшее значение r_k, для которого в Ω существует мультииндекс с окончанием $\overline{r}_k$. В случае, когда такого индекса не существует, положим $\omega_k(\overline{r}_k) = +\infty$. Таким образом, если $\omega_k(\overline{r}_k)$ конечно, то все $\omega_s(\overline{r}_s), s > k$, тоже.

Пусть B – полная система представителей ненулевых элементов K_0 в K, а $\overline{t}$ – система локальных параметров. Тогда (см. [2, 5]) любой элемент поля K, отличный от нуля, может быть представлен в виде ряда $a = \sum\limits_{\overline{r} \in \Omega_a} a_{\overline{r}} \overline{t}^{\overline{r}}, a_{\overline{r}} \in B$, где Ω_a – допустимый набор, причем B можно выбрать так, что данное представление будет однозначно (например, в случае K_0 положительной характеристики подходят его мультипликативные представители в сочетании с естественным вложением констант в ряды Лорана, а при нулевой характеристике берем $B = K_0^*$, поскольку поле вычетов вкладывается в K). Можно также записать

$$a = \sum_{\overline{r}_k \in \Omega_a^{(k)}} a_{\overline{r}_k} \overline{t}_s^{\overline{r}_k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1,$$

где $\Omega_a^{(k)} \subset \mathbb{Z}^{n-k}$ – допустимый набор.

Непосредственно проверяется, что

$$\begin{aligned} &a \in \mathcal{O} \Leftrightarrow \omega_k^{(a)}(\overline{0_k}) \geqslant 0, \quad k = \overline{n;1}, \\ &a \in \wp \Leftrightarrow \omega_k^{(a)}(\overline{0_k}) \geqslant 0, \quad k = \overline{n;2}, \quad \omega_1^{(a)}(\overline{0_1}) \geqslant 1, \\ &a \in U \Leftrightarrow \omega_k^{(a)}(\overline{0_k}) = 0, \quad k = \overline{n;1}. \end{aligned}$$

В простейшей ситуации, когда $K \approx K_0((t_1))\dots((t_n))$, имеем

$$\omega_k^{(a)}(\overline{r}_k) = v_{K_k}(\overline{a_{\overline{r}_k}})$$

– значение нормирования от вычета соответствующего коэффициента. В общем случае это не так, однако аналогичным образом $a_{\omega_k(\overline{r}_k)\overline{r}_k} \neq 0$, причем индекс $r_k = \omega_k(\overline{r}_k)$ наименьший из обладающих данным свойством, и $\omega_k(\overline{r}_k) = +\infty$ тогда и только тогда, когда коэффициент при $\overline{t}_k^{\overline{r}}$ нулевой.

Заметим, что в обычной топологии дискретного нормирования ряды, определяющие элементы многомерного поля, могут расходиться. А. Н. Паршиным в [9] на многомерных полях введена топология, в которой все эти ряды сходятся. Она строится индуктивно с помощью топологий полей вычетов (подробности в [3] и [2]). В частности, в этих работах проверено, что для любого допустимого набора ряд с коэффициентами из B сходится. Кроме того, доказано, что в случае конечного расширения многомерных полных полей топология подполя совпадает с топологией, индуцированной надполем. Верно также то, что топология подполя единственным образом продолжается на надполе. Это позволяет сводить вопросы сходимости к стандартным полям вида $F\{\{t_1\}\}\ldots\{\{t_m\}\}((t_{m+2}))\ldots((t_n))$.

Пусть Ω_a и Ω_b – допустимые наборы элементов $a, b \in K$. Допустимый набор их суммы, вообще говоря, не совпадает с объединением допустимых наборов и может не только утратить некоторые мультииндексы, но и приобрести те, которых не было в Ω_a и Ω_b. Однако если хоть одно из $a_{\overline{r}_k}, b_{\overline{r}_k}$ отлично от нуля, выполнено неравенство

$$\omega_k^{(a+b)}(\overline{r}_k) \geqslant \inf(\omega_k^{(a)}(\overline{r}_k), \omega_k^{(b)}(\overline{r}_k)),$$

а при $\omega_k^{(a)}(\overline{r}_k) \neq \omega_k^{(b)}(\overline{r}_k)$ равенство $\omega_k^{(a+b)}(\overline{r}_k) = \inf(\omega_k^{(a)}(\overline{r}_k), \omega_k^{(b)}(\overline{r}_k))$, в случае же $a_{\overline{r}_k} = b_{\overline{r}_k} = 0, (a+b)_{\overline{r}_k} \neq 0$ верно соотношение

$$\omega_k^{(a+b)}(\overline{r}_k) \geqslant \inf_{\overline{i}_k \leqslant \overline{r}_k, \overline{j}_k \leqslant \overline{r}_k} (\omega_k^{(a)}(\overline{i}_k), \omega_k^{(b)}(\overline{j}_k))$$

(заметим, что реально берется инфимум по конечному набору мультииндексов, соответствующих ненулевым коэффициентам, а при $k = n$, поскольку $\overline{r}_n$ не определено, подразумевается отсутствие соответствующего аргумента и условия на индексы).

Аналогично $\omega_k^{(ab)}(\overline{r}_k) \geqslant \inf_{\overline{i}_k + \overline{j}_k \leqslant \overline{r}_k} (\omega_k^{(a)}(\overline{i}_k) + \omega_k^{(b)}(\overline{j}_k))(k = \overline{n;1})$.

В отличие от классического (одномерного) случая, степенной ряд с коэффициентами из кольца целых и даже из максимального идеала многомерного поля в топологии Паршина не обязательно сходится при подстановке вместо переменной элемента максимального идеала. Таким образом, формально построенные по аналогии с одномерным случаем суммы степенных рядов могут не задавать реального элемента, что становится существенным при попытке обобщить на многомерные поля результаты, связанные с построением явной формулы для различных вариантов символа Гильберта (см. [6, 12]).

2.1. Определение. Множество $A \subset K$ назовем множеством сходимости, если любой степенной ряд $c(X) = \sum_{m \geqslant 1} c^{(m)} X^m \in A[[X]]$ сходится при подстановке вместо X произвольного элемента максимального идеала $\wp$.

Для описания множеств сходимости введем еще несколько понятий. В [5] доказан следующий критерий бесконечно малой.

2.2. Теорема. *Последовательность* $\{a^{(m)}\}_{m \geqslant 1}$ *является бесконечно малой тогда и только тогда, когда*
1. *для* $k = \overline{n; 2}$ *при всех* $\overline{r}_k$ *имеем*

$$R_k(\overline{r}_k) = \inf_m (\omega_k^{(a^{(m)})}(\overline{r}_k)) > -\infty,$$

2. *при всех* $\overline{r}_1$ *имеем* $R_1(\overline{r}_1) = \lim_{m \to +\infty} \omega_1^{(a^{(m)})}(\overline{r}_1) = +\infty.$

Следствием из него и полноты поля является достаточное условие сходимости ряда.

2.3. Теорема. *Пусть* $c(X) = \sum_{m \geqslant 0} c^{(m)} X^m \in K[[X]], x \in K$. *Следующая совокупность условий является достаточной для сходимости* $c(X)$ *к элементу* $c(x)$ *при подстановке вместо* X *элемента* x*:*
1. *для* $k = \overline{n; 2}$ *при всех* $\overline{r}_k$ *имеем*

$$R_k(\overline{r}_k) = \inf_m \inf_{\overline{i}_k + \overline{i}_k^{(1)} + \dots + \overline{i}_k^{(m)} \leqslant \overline{r}_k} (\omega_k^{(c^{(m)})}(\overline{i}_k) + \omega_k^{(x)}(\overline{i}_k^{(1)}) + \dots + \omega_k^{(x)}(\overline{i}_k^{(m)})) > -\infty,$$

2. *при всех* $\overline{r}_1$ *имеем*

$$R_1(\overline{r}_1) = \lim_{m \to +\infty} \inf_{\overline{i}_1 + \overline{i}_1^{(1)} + \dots + \overline{i}_1^{(m)} \leqslant \overline{r}_1} (\omega_1^{(c^{(m)})}(\overline{i}_1) + \omega_1^{(x)}(\overline{i}_1^{(1)}) + \dots + \omega_1^{(x)}(\overline{i}_1^{(m)})) = +\infty.$$

На основании этих утверждений докажем критерий множества сходимости.

2.4. Теорема. $A \subset K$ *является множеством сходимости тогда и только тогда, когда для* $k = \overline{n; 1}$ *при всех* $\overline{r}_k$ *имеем*

$$\omega_k^{(A)}(\overline{r}_k) = \inf_{a \in A} \omega_k^{(a)}(\overline{r}_k) > -\infty.$$

Доказательство. Пусть множество A удовлетворяет условиям теоремы. Тогда для $k = \overline{n;1}$ получаем

$$R_k(\overline{r}_k) \geqslant \inf_m \inf_{\overline{i}_k+\overline{i}_k^{(1)}+\dots+\overline{i}_k^{(m)}\leqslant\overline{r}_k} \omega_k^{(A)}(\overline{i}_k) > -\infty,$$

$$R_1(\overline{r}_1) \geqslant \lim_{m\to+\infty} \inf_{\overline{i}_1+\overline{i}_1^{(1)}+\dots+\overline{i}_1^{(m)}\leqslant\overline{r}_1} (\omega_1^{(A)}(\overline{i}_1) + m) = +\infty,$$

что дает для любого ряда $c(X) \in A[[X]]$ выполнение достаточных условий сходимости в точке t_1 и, следовательно, на всем главном идеале (заметим, что $\Omega_{t_1} = \{(1, 0, \dots, 0)\}$ и инфимум в реальности берется по конечному набору индексов).

Теперь пусть A является множеством сходимости. Значит, $c(X) \in A[[X]]$ должны сходиться при $X = t_1$ и любая последовательность вида $\{c^{(m)}t_1^m\}$ – бесконечно малая при всех $c^{(m)} \in A$. По критерию бесконечно малой для $k = \overline{n;2}$ при всех $\overline{r}_k$ выполнено условие

$$R_k(\overline{r}_k) = \inf_m(\omega_k^{((m))}(\overline{r}_k)) > -\infty$$

и при всех $\overline{r}_1$ верно $R_1(\overline{r}_1) = \lim\limits_{m\to+\infty}(\omega_1^{((m))}(\overline{r}_1) + m) = +\infty$. Если $\omega_k^{(A)}(\overline{r}_k) = \inf\limits_{a\in A} \omega_k^{(a)}(\overline{r}_k) = -\infty$ для некоторого $\overline{r}_k$, очевидно существование последовательности $\{c^{(m)}\}$ из A, для которой условие критерия при данном $\overline{r}_k$ неверно, и мы приходим к противоречию.

Теорему можно переформулировать следующим образом: $A \subset K$ является множеством сходимости тогда и только тогда, когда объединение допустимых наборов всех элементов A – допустимый набор (не обязательно соответствующий некоторому элементу из A).

Величины $\omega_k^{(A)}(\overline{r}_k)$ назовем характеристическими индексами множества сходимости A. Как легко видеть, $\omega_k^{(A)}(\overline{r}_k)$ конечно тогда и только тогда, когда существует $a \in A$, для которого $a_{\omega_k^{(A)}(\overline{r}_k)\overline{r}_k} \neq 0$.

§3. Сходимость бесконечных произведений степеных рядов

Рассмотрим множество сходимости A, отличное от нуля. Тогда $\omega_n^{(A)}$ конечно и существует $a \in A$ со свойством $\omega_n^{(a)} = \omega_n^{(A)}$. Множество $A_1 = t_n^{-\omega_n^{(A)}} A$ удовлетворяет условию $\omega_n^{(A_1)} = 0$, то есть, у всех его элементов $\omega_n^{(a)} \geqslant 0$ и в нем содержится c, для которого $\omega_n^{(c)} = 0$. Его можно выбрать так, что $\omega_{n-1}^{(c)}(0) = \omega_{n-1}^{(A_1)}(0)$. Продолжая процесс, видим, что существует такой мультииндекс $\overline{R}$, что $\overline{T}^{\overline{R}}A = G$, где G – множество сходимости, лежащее в кольце целых и содержащее хоть одну единицу.

Далее G будет множеством сходимости данного вида, то есть,

$$\omega_n^{(G)} = 0, \quad \omega_k^{(G)}(\overline{0_k}) \geqslant 0, \quad k = \overline{n-1;1}.$$

Сформулируем доказанный в [5] признак сходимости бесконечного произведения степенных рядов.

3.1. Теорема. *Пусть* $x \in K$ *и для всех натуральных* l *заданы ряды* $h^{(l)}(X) = \sum\limits_{m\geqslant 1} h^{(lm)} X^m \in K[[X]]$.

Для $k = \overline{n;2}$ *и всех* $\overline{r}_k$ *введем величины*

$$M_k^{(lm)}(\overline{r}_k) = \inf_{\overline{i}_k + \overline{i}_k^{(1)} + \cdots + \overline{i}_k^{(m)} \leqslant \overline{r}_k} (\omega_k^{(h^{(lm)})}(\overline{i}_k) + \omega_k^{(x)}(\overline{i}_k^{(1)}) + \cdots + \omega_k^{(x)}(\overline{i}_k^{(m)})).$$

Следующая совокупность условий является достаточной для сходимости $1 + h(X) = \prod\limits_{l=1}^{\infty}(1 + h^{(l)}(X))$ *при подстановке вместо* X *элемента* x *к элементу* $1 + h(x)$*:*

1. $\inf\limits_{l,m}(\omega_n(h^{(lm)}) + m\omega_n(x)) \geqslant 0$,
2. *для* $k = \overline{n-1;2}$ *при всех* $\overline{r}_k$ *имеем* $M_k(\overline{r}_k) = \inf\limits_{l,m} M_k^{(lm)}(\overline{r}_k) > -\infty$, *причем* $M_k(\overline{0_k}) \geqslant 0$,
3. *при всех* $\overline{r}_1$ *и всех натуральных* l *имеем*

$$M_1^{(l)}(\overline{r}_1) = \lim_{m\to+\infty}(M_1^{(lm)}(\overline{r}_1)) = +\infty,$$

причем $M_1(\overline{0_1}) = \inf\limits_{l,m} M_1^{(lm)}(\overline{0_1}) \geqslant 0$,

4. *при всех* $\overline{r}_1$ *имеем* $\lim\limits_{l\to+\infty}\inf\limits_{m} M_1^{(lm)}(\overline{r}_1) = +\infty$.

Выберем $h^{(l)}(X) \in G[[X]], x = t_1$. Тогда

$$M_k^{(lm)}(\overline{r}_k) = \inf_{\overline{i}_k \leqslant \overline{r}_k}(\omega_k^{(h^{(lm)})}(\overline{i}_k)) \geqslant \inf_{\overline{i}_k \leqslant \overline{r}_k}(\omega_k^{(G)}(\overline{i}_k)).$$

Кроме того, $M_k(\overline{0_k}) \geqslant \omega_k^{(G)}(\overline{0_k}) \geqslant 0$, поэтому выполнение первых двух условий очевидно (набор индексов, по которым берется инфимум, конечен).

Поскольку

$$M_1^{(lm)}(\overline{r}_1) = \inf_{\overline{i}_1 \leqslant \overline{r}_1} (\omega_1^{(h^{(lm)})}(\overline{i}_1) + m) \geqslant \inf_{\overline{i}_1 \leqslant \overline{r}_1} (\omega_1^{(G)}(\overline{i}_1) + m),$$

верно также $M_1^{(l)}(\overline{r}_1) = \lim_{m \to +\infty} (M_1^{(lm)}(\overline{r}_1)) = +\infty$.

Осталось требование, чтобы для любого $\overline{r}_1$ выполнялось

$$\lim_{l \to +\infty} \inf_m \inf_{\overline{i}_1 \leqslant \overline{r}_1} (\omega_1^{(h^{(lm)})}(\overline{i}_1) + m) = +\infty,$$

для чего достаточно условия $\lim_{l \to +\infty} \inf_m \omega_1^{(h^{(lm)})}(\overline{r}_1) = +\infty$.

Итак, доказано следующее утверждение.

3.2. Теорема. *Пусть $x \in K$ и для всех натуральных l заданы ряды*

$$h^{(l)}(X) = \sum_{m \geqslant 1} h^{(lm)} X^m \in G[[X]], 1 + h(X) = \prod_{l=1}^{\infty} (1 + h^{(l)}(X)).$$

Если для любого $\overline{r}_1$ выполнено условие $\lim_{l \to +\infty} \inf_m \omega_1^{(h^{(lm)})}(\overline{r}_1) = +\infty$, то $h(X)$ при подстановке вместо X произвольного элемента x из максимального идеала сходится к элементу $h(x)$.

Список литературы

1. И. Б. Жуков, *Структурная теорема для полных полей.* — Труды Санкт-Петерб. мат. общ., **3** (1994), 215–234.
2. И. Б. Жуков, А. И. Мадунц, *Многомерные полные поля: топология и другие основные понятия.* — Труды Санкт-Петерб. мат. общ., **3** (1994), 4–46.
3. И. Б. Жуков, А. И. Мадунц, *Аддитивные и мультипликативные разложения в многомерных локальных полях.* Зап. научн. сем. ПОМИ, **272** (2000), 186–196.
4. А. И. Мадунц, *О сходимости рядов над локальными полями.* — Труды Санкт-Петербургского мат. общ., **3** (1994), 283–320.
5. А. И. Мадунц, *Сходимость последовательностей и рядов в многомерных полных полях.* — Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Санкт-Петербург (1995), 1–14.
6. А. И. Мадунц, *Формальные группы Любина–Тейта над кольцом целых многомерного локального поля.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, **281** (2001), 221–226.
7. А. Н. Паршин, *Абелевы накрытия арифметических схем.* — Доклад АН СССР. Сер. мат., **243** (1978), 855–858.
8. А. Н. Паршин, *К арифметике двумерных схем. 1. Распределения и вычеты.* — Изв. АН СССР. Сер. мат., **40** (1976), 736–773.
9. А. Н. Паршин, *Локальная теория полей классов.* — Труды МИАН, **165** (1984), 143–170.

10. И. Р. Шафаревич, *Общий закон взаимности.* — Матем. сб., **26(68)**, No. 1 (1950), 113–146.
11. I. B. Fesenko, S. V. Vostokov, *Local fields and their extensions.* — Amer. Math. Soc., (1993), 1–283.
12. A. I. Madunts, *Classification of generalized formal Lubin–Tate groups over multidimensional local fields.* — J. Math. Sci. (United States), **234**, (2018), 175–179.

Madunts A. I. Convergence sets of multidimensional local fields.

We study subsets of multidimensional local fields that have the property that any power series with coefficients from this subset converges when substituting an element of the maximum ideal for a variable.

С.-Петербургский государственный университет
E-mail: madunts@mail.ru

Поступило 20 апреля 2020 г.