Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 492, 2020 г.

Н. Л. Гордеев

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ВЕРБАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КОМПАКТНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

Посвящается Анатолию Владимировичу Яковлеву в связи с 80-летием со дня рождения

Введение

Для любой группы G и любого слова $w \in F_n$, где F_n – свободная группа ранга n, определено вербальное отображение

$$\widetilde{w} : G^n \to G$$

формулой $\widetilde{w}(g_1, \dots, g_n) = w(g_1, \dots, g_n)$. С вербальными отображениями связаны различные задачи теории групп. Например, при $n = 1, w = x^k$ вопрос об образе такого вербального отображения – это вопрос об извлечении корней k-ой степени из элементов группы. За последние годы появилось много работ, в которых исследуются вербальные отображения для групп $G = \mathcal{G}(K)$, являющихся группами K-точек простой алгебраической группы $\mathcal{G}$, определенной над полем K (см. ссылки в [16]). Для простой алгебраической группы $\mathcal{G}$ (или группы ее точек над алгебраически замкнутым полем) образ любого вербального отображения $\widetilde{w} : \mathcal{G}^n \to \mathcal{G}$ доминантен согласно теореме А. Бореля ([3]) и, таким образом, содержит открытое по Зарисскому подмножество группы $\mathcal{G}$ (т.е. образ нетривиального вербального отображения – это "почти вся группа" $\mathcal{G}$). В связи с этим полной неожиданностью стала теорема А. Тома ([9]) о том, что всегда найдется такое слово $w = w_{\epsilon,n} \in F_2$, для которого образ вербального отображения $\widetilde{w} : \mathrm{S}U_n(\mathbb{C})^2 \to \mathrm{S}U_n(\mathbb{C})$ содержится в заданной ϵ-окрестности единицы группы $\mathrm{S}U_n(\mathbb{C})$ (здесь

Ключевые слова: вербальные отображения, компактные топологические группы.

Работа поддержана Министерством Науки и высшего образования Российской Федерации (проект 1.661.2016/1.4) и грантом РФФИ 19-01-00297.

$\mathrm{S}U_n(\mathbb{C})$ – стандартная унитарная группа, т.е. группа $\mathbb{R}$-точек анизотропной формы группы $\mathrm{S}L_n$). На самом деле в работе [9] (см. также [16]) строится последовательность слов $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, которая сходится равномерно к единице на группе $G = \mathrm{S}U_n(\mathbb{C})$ в топологии группы G, индуцированной нормой, т.е. для любой открытой ϵ-окрестности U_e единицы $e \in G$ существует такой номер j_0, что $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_j \subset U_e$ для всех $j > j_0$. Отсюда в [9] получается аналогичный результат и для произвольных компактных групп.

В данной работе мы предлагаем метод построения таких последовательностей (Теорема 1), которые сходятся к единице на любой компактной группе G, использующий "склейку" двух последовательностей, члены одной из которых "расширяют" образ предыдущего члена, а члены другой – наоборот "сужают". Этот метод позволяет построить довольно большой массив различных последовательностей слов свободной группы, равномерно сходящихся к единице как вербальных отображений на компактной топологической группе.

В этой же работе рассматривается вопрос о последовательностях сюръективных отображений на компактной группе. Следует отметить, что вопрос о сюръективности вербальных отображений для некоммутативных компактных групп Ли, также как и для простых алгебраических групп, является довольно сложным (отметим, что некоммутативная компактная группа Ли – это (с точностью до центра) есть группа $\mathbb{R}$-точек полупростой алгебраической группы, определенной и анизотропной над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$). Известно, например, что для слов w, не содержащихся в коммутанте свободной группы, и энгелевых слов $w = [x, [x, \cdots [x, y] \cdots]]$ соответствующие вербальные отображения $\widetilde{w}$ сюръективны на компактных группах Ли (на простых алгебраических группах имеется еще ряд примеров; см. [2], [5]). В данной работе мы указываем пример последовательности $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ свободной группы F_n такой, что $w_j \in F_n^j \setminus F_n^{j+1}$, и каждое вербальное отображение $\widetilde{w}_j : \mathrm{S}U_2(\mathbb{C})^n \to \mathrm{S}U_2(\mathbb{C})$ является сюръективным (Теорема 2, Следствие 7.1).

В заключении данной работы мы даем некоторые комментарии к указанным результатам, а также некоторые замечания, связанные с образами вербальных отображений компактных групп.

Терминология и обозначения. Напомним, что *топологическая группа G – это множество, наделенное структурами группы и топологического пространства, для которого отображение $(\sigma, \tau) \to \sigma\tau$*

произведения $G \times G$ *в* G *и отображение* $\sigma \to \sigma^{-1}$ *пространства* G *в* G *непрерывны.* Топологическая группа G *называется компактной, если топологическое пространство* G *компактно и отделимо.*

Нейтральный элемент группы G мы обозначаем e и называем единицей группы G.

Для подмножества $X \subset G$ множество $\{x^{-1} \mid x \in X\}$ обозначаем X^{-1}.

Для подмножеств $X, Y \subset G$ множество $\{xy \mid x \in X, y \in Y\}$ обозначаем XY.

§1. Унитарные представления компактных групп

В этом и следующем пункте мы собрали известные результаты о компактных группах, которые нам потребуются для построения равномерно сходящихся последовательностей слов на компактной группе.

Пусть V – топологическое векторное пространство над полем $\mathbb{C}$. Напомним, что для топологической группы G ее линейное представление $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ в группу непрерывных линейных операторов $\mathrm{GL}(V)$ топологического пространства V называется непрерывным, если отображение $G \times V \to V$ непрерывно (в топологии G, V и топологии произведения $G \times V$). Если пространство V конечномерно, то условие непрерывности отображения $G \times V \to V$ эквивалентно условию непрерывности отображения $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ топологических групп $G, GL(V)$ ([19, III, 4.2]). При этом топология на группе $\mathrm{GL}(V)$ определяется нормой $\|T\|$ линейных операторов на $\mathrm{End}(V)$.

Напомним, что на конечномерном линейном пространстве V над полем $\mathbb{C}$, снабженном невырожденной анизотропной эрмитовой формой $(\, , \,)$, вводится норма вектора $\|v\| := \sqrt{(v, v)}$. Для любого линейного оператора $T \in \mathrm{End}(V)$ его норма определяется формулой

$$\|T\| := \max_{\|v\|=1} \|T(v)\|.$$

Эта норма удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{gathered} \|T_1 + T_2\| \leqslant \|T_1\| + \|T_2\|, \quad \|T_1 T_2\| \leqslant \|T_1\| \|T_2\| \\ \text{для любых } T_1, T_2 \in \mathrm{End}(V). \end{gathered} \tag{1.1}$$

(см. [18, IV, §5]). Пусть $\mathbb{U}(V)$ – группа унитарных операторов (т.е. сохраняющих эрмитову форму $(\, , \,)$). Из определения нормы следует

$$\|T\| = 1, \ \|TS\| = \|S\| \text{ для любых } T \in \mathbb{U}(V), S \in \mathrm{End}(V). \tag{1.2}$$

Следующие утверждение и его доказательство фактически повторяет Лемму 2.1 работы [9] для норм конечномерной унитарной группы.

Лемма 1. *Для любых* $S, T \in \mathbb{U}(V)$
i.$\|E - ST\| \leqslant \|E - S\| + \|E - T\|$,
ii. $\|E - STS^{-1}\| = \|E - T\|$,
iii. $\|E - T\| = \|E - T^{-1}\|$,
iv. $\|E - STS^{-1}T^{-1}\| \leqslant 2\min\{\|1 - S\|, \|1 - T\|\}$.
v. $\|E - STS^{-1}T^{-1}\| \leqslant 2\|1 - S\|\,\|1 - T\|$.

Доказательство.

i. $\|E - ST\| \overset{(1.2)}{=} \|S^{-1} - T\| = \|(S^{-1} - E) + (E - T)\| \overset{(1.1)}{\leqslant} \|(S^{-1} - E)\| + \|(E - T)\| \overset{1.2}{=} \|E - S\| + \|E - T\|$.

ii. $\|E - STS^{-1}\| \overset{(1.2)}{=} \|E - T\|$.

iii. $\|E - T\| = \| - (E - T)\| = \|T - E\| = \|T(E - T^{-1})\| = \|E - T^{-1}\|$.

iv. $\|E - STS^{-1}T^{-1}\| \overset{i.}{\leqslant} \|E - STS^{-1}\| + \|E - T^{-1}\| \overset{ii.,iii.}{=} 2\|E - T\|$.
Аналогично $\|E - STS^{-1}T^{-1}\| \leqslant 2\|E - S\|$.

v. $\|E - STS^{-1}T^{-1}\| = \|TS - ST\| = \|(E - T)(E - S) - (E - S)(E - T)\| \overset{1.1}{\leqslant} 2\|1 - S\|\|1 - T\|$. □

Нам потребуется следующий фундаментальный факт об унитарных представлениях компактных топологических групп.

♭. *Для компактной группы* G *существует множество* $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *конечномерных непрерывных унитарных представлений* $\rho_\alpha : G \to \mathbb{U}(V_\alpha)$ *таких, что* $\bigcap_{\alpha\in A} \operatorname{Ker}\rho_\alpha = e$ *и*

$$G = \lim_{\leftarrow} \rho_\alpha(G),$$

т.е. G *изоморфна (как топологическая группа) проективному пределу компактных групп* $\rho_\alpha(G)$ (см. [19, IV, §2]; [17, 15.1.6]).

Замечание 1.1. *В частности, проконечные группы являются компактными и вполне несвязными. Все открытые подгруппы таких групп – это подгруппы конечного индекса* ([21, I, §1]) .

Так как представление $\rho_\alpha : G \to \mathbb{U}(V_\alpha)$ непрерывно, то прообраз любой открытой окрестности единицы $E_\alpha \in \mathbb{U}(V_\alpha) \leqslant \mathrm{GL}(V_\alpha) \subset \mathrm{End}(V)$ является открытой окрестностью единицы e группы G, а значит,

$$U_{e,\rho_\alpha}(\epsilon) := \{g \in G \ \ | \ | \ \| E_\alpha - \rho_\alpha(g) \|< \epsilon\}$$

– открытая окрестность единицы группы G.

Из утверждения $\flat$ следует

$\natural$. *Для любой открытой окрестности единицы* $U_e \subset G$ *существует окрестность единицы* $U_{e,\rho_\alpha}(\epsilon)$ *такая, что*

$$U_{e,\rho_\alpha}(\epsilon) \subset U_e.$$

Доказательство. Ввиду $\flat$ прообразы открытых множеств в $\rho_\alpha(G)$, где α пробегает множество A, образуют базис топологии G ([11, Глава I, §4, Предложение 9]). Поскольку множества

$$U_{E_\alpha,\rho_\alpha}(\epsilon) := \{\sigma \in \rho_\alpha(G) \mid \parallel E_\alpha - \sigma \parallel < \epsilon\}$$

образуют фундаментальную систему окрестностей единицы $E_\alpha \in \rho_\alpha(G)$ группы $\rho_\alpha(G)$, то их прообразы $U_{e,\rho_\alpha}(\epsilon_a)$ образуют фундаментальную систему окрестностей единицы e группы G (см. [11], Глава I, \$1, Предложение 3). $\square$

§2. Некоторые свойства окрестностей единицы компактной группы

Нам потребуются следующие факты об окрестностях единицы компактной группы G.

a. *Для любой открытой окрестности* U_e *существует открытая окрестность* W_e *такая, что*

$$W_e W_e^{-1} \subset U_e.$$

([13, Глава III, §1, п. 2, свойство (GV_a)]).

b. *Для любой открытой окрестности* U_e *существует* G*-инвариантная* (*относительно сопряжения*) *открытая окрестность* V_e *такая, что*

$$V_e \subset U_e.$$

([14, Глава 0, 1.10]). Комбинируя **a.** и **b.**, получим

c. *Для любой открытой окрестности* U_e *существует* G*-инвариантная открытая окрестность* V_e *такая, что*

$$V_e V_e^{-1} \subset U_e.$$

Любая открытая окрестность U_e является измеримым множеством ([10, Глава IV, §5, 1, Следствие Предложения 3]). Пусть μ – мера Хаара на группе G (мы считаем, что $\mu(G)=1$). Положим

$$q(U_e) := \left[\frac{1}{\mu(U_e)}\right] + 1$$

(здесь $[x]$ – целая часть от числа x).

Лемма 2. *Пусть U_e – открытая окрестность единицы. Для любого подмножества $S = \{g_1, \dots, g_q\}$, состоящего из $q = q(U_e)$ различных элементов группы G, имеет место*

$$g_i U_e \cap g_j U_e \neq \emptyset$$

для некоторых натуральных $i < j \leqslant q$.

Доказательство. Предположим, что все множества $g_1U_e, g_2U_e, \dots$, g_qU_e попарно не пересекаются. Так как мера Хаара на компактной группе является лево-инвариантной и право-инвариантной ([12, Глава VII, §1, 3, Следствие Предложения 3]), то

$$\mu(g_i U_e) = \mu(U_e)$$

для любого $i = 1, \dots, q$. Следовательно

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{q} g_i U_e) = q\mu(U_e) > 1 = \mu(G).$$

Получили противоречие. □

§3. Малые окрестности единицы компактной группы

Рассмотрим открытую окрестность единицы компактной группы G вида

$$U_{\epsilon,\rho} := \{g \in G \mid \| E - \rho(g) \| < \epsilon\},$$

где $\rho : G \to U(V)$ – конечномерное непрерывное унитарное представление.

Лемма 3.

i. $[g,h] \in U_{e,\rho}(\epsilon)$ *для любого* $h \in U_{e,\rho}(\epsilon/2)$ *и любого* $g \in G$.

ii. $[f,h] \in U_{e,\rho}(\epsilon/2)$ *для любых* $f, h \in U_{e,\rho}(\epsilon)$, *если* $\epsilon \leqslant \frac{1}{4}$.

iii. $fh \in U_{e,\rho}(\epsilon)$ *для любых* $f, h \in U_{e/2,\rho}(\epsilon)$.

Доказательство. Используя Лемму 1, получаем

i. $\|E - \rho([g,h])\| \leqslant 2 \underbrace{\|E - \rho(h)\|}_{<\epsilon/2} < \epsilon \Rightarrow [g,h] \in U_{e,\rho}(\epsilon)$.

ii. $\|E-\rho([f,h])\| \leqslant 2\underbrace{\|E-\rho(f)\|}_{<\epsilon\leqslant\frac{1}{4}}\underbrace{\|E-\rho(h)\|}_{<\epsilon} < 2\frac{1}{4}\epsilon = \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow [g,h] \in U_{e,\rho}(\epsilon/2)$.

iii. $\|E-\rho(fh))\| \leqslant \underbrace{\|E-\rho(h)\|}_{<\epsilon/2}+\underbrace{\|E-\rho(h)\|}_{<\epsilon/2} < \epsilon \Rightarrow fh \in U_{e,\rho}(\epsilon)$.

□

Определение 3.1. *Пусть G – компактная группа. G-инвариантная открытая окрестность единицы U_e называется малой, если существуют две G-инвариантные открытые окрестности единицы $P(U_e)$, $Q(U_e)$ группы G, удовлетворяющие следующим условиям:*

$$Q(U_e) \subset U_e \subset P(U_e); \tag{3.1}$$

$$U_eU_e, [G,U_e] \subset P(U_e); \tag{3.2}$$

$$Q(U_e)Q(U_e), [G,Q(U_e)] \subset U_e; \tag{3.3}$$

$$[P(U_e),P(U_e)] \subset U_e; \tag{3.4}$$

$$[U_e,U_e] \subset Q(U_e). \tag{3.5}$$

Окрестность $Q(U_e)$ также является малой окрестностью единицы и

$$P(Q(U_e)) = U_e. \tag{3.6}$$

Если $P(U_e)$ также является малой окрестностью единицы, то

$$Q(P(U_e)) = U_e. \tag{3.7}$$

Окрестности $P(U_e)$ и $Q(U_e)$ будем называть растяжением и сжатием U_e.

Положим

$$Q^m(U_e) := \underbrace{Q(Q(\cdots Q}_{m-\text{раз}}(U_e)\cdots)),\quad P^l(U_e) := \underbrace{P(P(\cdots P}_{l-\text{раз}}(U_e)\cdots)).$$

Таким образом, малая окрестность единицы U_e предполагает фиксирование последовательностей расширений и сжатий

$$\cdots \subset Q^m(U_e) \subset \cdots \subset Q(U_e) \subset U_e \subset P(U_e) \subset \cdots \subset P^l(U_e) \subset \cdots .$$

При этом последовательность расширений может быть конечной, а последовательность сжатий должна быть бесконечной. Определение 3.1

не накладывает никаких условий на выбор последовательности сжатий и расширений, кроме условий 3.1 –3.7. В частности, включения в данных последовательностях – не строгие и могут быть равенствами.

Примером малых окрестностей являются окрестности вида $U_{e,\rho}(\epsilon)$ при $\epsilon \leqslant \frac{1}{8}$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$. Действительно, если мы положим

$$Q^m(U_{e,\rho}(\epsilon)) := U_{e,\rho}(\epsilon/2^m), \;\; P^l(U_{e,\rho}(2^l\epsilon)) \text{ при условии } 2^l\epsilon \leqslant \frac{1}{4},$$

то условия 3.1 – 3.7 вытекают из Леммы 3.

Лемма 4. *Малые окрестности единицы компактной группы образуют фундаментальную систему окрестностей единицы.*

Доказательство. Окрестности единицы e компактной группы G вида $U_{\epsilon,\rho}(\epsilon)$, где ρ пробегает множество конечномерных непрерывных унитарных представлений группы G, а ϵ – множество положительных вещественных чисел, являются фундаментальной системой окрестности единицы (см. ♮). Следовательно, множество окрестностей $U_{\epsilon,\rho}(\epsilon)$, где $\epsilon \leqslant \frac{1}{8}$, также является фундаментальной системой окрестностей группы единицы группы G. □

Замечание 3.1. *Малые окрестности вида $U_{\epsilon,\rho}(\epsilon)$ могут быть определены для любой компактной группы. Если G – проконечная группа, то для нее можно найти и другие малые окрестности. Например, пусть G – свободная про-p-группа. Рассмотрим ряд подгрупп*

$$G_0 = G, G_1 = (G)^p G^1, G_2 = (G)^{p^2} G^2, \dots, G_j = (G)^{p^j} G^j, \dots,,$$

где $(G)^{p^j}$ – подгруппа, порожденная p^j степенями группы G, а G^j – j-тый член нормального ряда: $G^1 = [G, G], \dots, G^j = [G^{j-1}, G^{j-1}], \dots$. Легко видеть, что это последовательность малых окрестностей группы G, в которой можно положить

$$Q(G_j) := G_{j+1}, P(G_j) := G_{j-1}.$$

§4. S-последовательности компактной группы.

Определение 4.1. *Бесконечная последовательность непустых слов $w_1, \dots, w_m, \dots$ свободной группы F_n называется универсальной S-последовательностью, если:*

для любой компактной группы G и любой ее открытой окрестности единицы $U_e \subset G$

существует такое натуральное число $r := r(U_e)$*, что для любой последовательности* $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$ *имеет место включение*

$$w_i(g_1, \dots, g_n) \in U_e$$

для некоторого $i \leqslant r$.

Таким образом, универсальная S-последовательность – это последовательность слов $\{w_j\}_{j \in N}$ свободной группы F_n, в которой для любой открытой окрестности единицы U_e можно указать такой конечный отрезок этой последовательности $w_1, w_2, \dots, w_r$, что для любой последовательности $g_1, \dots, g_n \in G$ среди элементов

$$w_1(g_1, \dots, g_n), w_2(g_1, \dots, g_n), \dots, w_r(g_1, \dots, g_n)$$

хотя бы один попадает в окрестность U_e, т.е. образ вербального отображения компактных групп

$$\prod_{j=1}^{r} w_j : G^n \to G^r,$$

определенного формулой

$$(\prod_{j=1}^{r} w_j)(g_1, \dots, g_n) = \prod_{j=1}^{r} w_j(g_1, \dots, g_n),$$

содержится в открытой окрестности $\cup_{j=1}^{r} V_{\mathfrak{e}}^j$ единицы $\mathfrak{e}$ группы G^r, где

$$V_{\mathfrak{e}}^j := \underbrace{G \times G \times \cdots G}_{(j-1)-\text{раз}} \times U_e \times \underbrace{G \times \cdots \times G}_{(r-j)-\text{раз}}.$$

Замечание 4.1. *Число* $r(U_e)$ *зависит от окрестности единицы в группе* G*, а значит, и от самой группы* G.

Приведем некоторые примеры универсальных S-последовательностей.

Пример 1. Пусть $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ – произвольная бесконечная последовательность попарно различных элементов F_n. Пусть далее, $\mathcal{M} = \{(l, k) \mid l, k \in \mathbb{N}, l > k\}$. Пронумеруем пары $(l, k) \in \mathcal{M}$ в лексикографическом порядке и сопоставим каждой паре (l, k) ее номер $j(l, k)$: $j(2, 1) = 1, j(3, 1) = 2, j(3, 2) = 3, \dots,$. Далее, для любой пары (l, k) положим

$$w_j := v_k^{-1} v_l,$$

где $j := j(l, k)$. Так как $v_k \neq v_l$ для любых k, l, то $w_j \neq 1$ для любого j.

Построенная последовательность $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ *является универсальной* S*-последовательностью.*

Доказательство. Пусть U_e – открытая окрестность единицы, W_e – открытая окрестность единицы такая, что $W_eW_e^{-1} \subset U_e$ (см. **a.**), и пусть $q = q(W_e)$ – число из Леммы 2. Положим

$$r := 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \cdots + q \cdot (q-1) = \frac{q(q^2-1)}{3}. \tag{4.1}$$

Пусть $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$. Рассмотрим последовательность

$$\sigma_1 := v_1(g_1, \ldots, g_n), \sigma_2 := v_2(g_1, \ldots, g_n), \ldots, \sigma_q := v_q(g_1, \ldots, g_n).$$

Предположим, что $\sigma_k \neq \sigma_l$ для любых $k < l \leqslant q$. Из Леммы 2 получаем, что $\sigma_k W_e \cap \sigma_l W_e \neq \emptyset$ для некоторых $k < l \leqslant q$. Следовательно, $\sigma_k^{-1}\sigma_l \in W_eW_e^{-1} \subset U_e$. Заметим, что число пар (l, k), таких, что $k < l \leqslant q$, равно r (см. 4.1). Поэтому для $j = j(l, k) \leqslant r$ получаем

$$w_j(g_1, \ldots, g_n) = \underbrace{v_k^{-1}(g_1, \ldots, g_n)}_{\sigma_k^{-1}}\underbrace{v_l(g_1, \ldots, g_n)}_{\sigma_l} \in W_eW_e^{-1} \subset U_e.$$

Если $\sigma_k = \sigma_l$ для некоторых $k < l \leqslant q$, то для $j = j(k, l)$ имеем $w_j(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1 \in U_e$. □

Пример 2. Пусть $w \neq \varnothing$ – непустое слово, и пусть $\{w_k := w^k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда

$\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ – *универсальная* S*-последовательность.*

Доказательство. Пусть U_e – открытая окрестность единицы, W_e – открытая окрестность единицы такая, что $W_eW_e^{-1} \subset U_e$ (см. **a.**), и пусть $q = q(W_e)$ – число из Леммы 2. Положим $r := q$. Дальнейшие рассуждения повторяют рассуждения предыдущего случая. □

Пример 3. Пусть $\omega_1, \omega_2 \in F_n$ – непустые слова, для которых $[\omega_1, \omega_2] \neq 1$. Положим $w_j := \omega_1^{aj}\omega_2^{bj}$ для фиксированных целых $a, b \neq 0$. Тогда

$\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ – *универсальная* S*-последовательность.*

Доказательство. Поскольку $[\omega_1, \omega_2] \neq 1$, слова $\omega_1, \omega_2 \in F_n$ порождают свободную подгруппу ранга два, а значит, все слова последовательности $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ различны и не пусты.

Пусть U_e – открытая окрестность единицы, V_e – G-инвариантная открытая окрестность единицы такая, что $V_eV_e^{-1} \subset U_e$ (см. **c.**), и пусть

$q = q(V_e)$ – число из Леммы 2. Положим $r := q$. Для последовательности $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ положим

$$\sigma_1 := w_1(g_1, \ldots, g_n), \sigma_2 := w_2(g_1, \ldots, g_n), \ldots, \sigma_q := w_q(g_1, \ldots, g_n).$$

Если $\sigma_i = \sigma_j$ для некоторых $i < j \leqslant r$, то

$$\begin{aligned} w_i(g_1, \ldots, g_n) = \omega_1^{ai}(g_1, \ldots, g_n)\omega_2^{bi}(g_1, \ldots, g_n) = w_j(g_1, \ldots, g_n) \\ = \omega_1^{aj}(g_1, \ldots, g_n)\omega_2^{bj}(g_1, \ldots, g_n), \end{aligned}$$

а значит,

$$w_{j-i}(g_1, \ldots, g_n) = \omega_1^{a(j-i)}(g_1, \ldots, g_n)\omega_2^{b(j-i)}(g_1, \ldots, g_n) = e \in U_e.$$

Предположим, что $\sigma_i \neq \sigma_j$ для любых $i < j \leqslant q$. Из Леммы 2 получаем, что $\sigma_i \gamma = \sigma_j \delta$ для некоторых $i < j \leqslant q$ и некоторых $\gamma, \delta \in V_e$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &\underbrace{\gamma'}_{\in V_e} := \omega_2^{bi}(g_1, \ldots, g_n)\gamma\omega_2^{-bi}(g_1, \ldots, g_n) \\ &= \omega_1^{a(j-i)}(g_1, \ldots, g_n)\omega_2^{bj}(g_1, \ldots, g_n)\delta\omega_2^{-bi}(g_1, \ldots, g_n) \\ &= \underbrace{\omega_1^{a(j-i)}(g_1, \ldots, g_n)\omega_2^{b(j-i)}(g_1, \ldots, g_n)}_{=w_{j-i}(g_1, \ldots, g_n)} \underbrace{(\omega_2^{bi}(g_1, \ldots, g_n)\delta\omega_2^{-bi}(g_1, \ldots, g_n))}_{:=\delta' \in V_e} \\ &\qquad \Rightarrow w_{j-i}(g_1, \ldots, g_n) = \gamma'\delta'^{-1} \in V_e V_e^{-1} \in U_e. \qquad \square \end{aligned}$$

Приведем теперь пример последовательности, которая не является универсальной S-последовательностью.

Пример 4. Пусть

$$w_j(x, y) := [\underbrace{x, [x, \ldots x[x}_{j \text{ коммутаторов}}, y] \ldots]] \in F_2$$

– энгелево слово. Тогда $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ *не является универсальной S-последовательностью.*

Доказательство. Действительно, пусть $G = \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$. Путь τ_3 – элемент порядка 3 какого-либо одномерного компактного тора $T \leqslant G$, а $\sigma \in N_G(T), \sigma \notin T$. Тогда

$$[\underbrace{\sigma, [\sigma, \ldots \sigma[\sigma}_{j \text{ коммутаторов}}, \tau_3] \ldots]] = \tau_3^{2^j}.$$

Таким образом, $w_j(\sigma,\tau)$ – это либо τ_3, либо τ_3^2, которые не содержатся в достаточно малой окрестности единицы группы G. $\square$

§5. PQ-последовательности слов

Пусть задано разбиение натурального ряда $\mathbb{N}$ на чередующуюся последовательность отрезков, обозначаемых буквами P_i, Q_i:

$$\begin{gathered}
\underbrace{p_{11} := 1, \dots, p_{1a_1}}_{:=P_1}, \underbrace{q_{11} := p_{1a_1}+1, \dots, q_{1b_1}}_{:=Q_1},\\
\underbrace{p_{21} := q_{1b_1}+1, \dots, p_{2a_2}}_{:=P_2}, \underbrace{q_{21} := p_{2a_2}+1, \dots, q_{2b_2}}_{:=Q_2},\\
\dots, \underbrace{p_{i1} := q_{i-1b_{i-1}}+1, \dots, p_{ia_i}}_{:=P_i}, \underbrace{q_{i1} := p_{ia_i}+1, \dots, q_{ib_i}}_{:=Q_i} \dots.
\end{gathered} \tag{5.1}$$

Натуральное число $j \in \mathbb{N}$ будем называть *p-числом* (соответственно *q-числом*), если $j = p_{ik} \in P_i$ (соответственно $j = q_{ik} \in Q_i$) для некоторых i, k.

Разбиение натурального ряда (5.1) будем называть *PQ-разбиением.*

Пусть $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ – последовательность нетривиальных слов свободной группы, и пусть зафиксировано PQ-разбиение натурального ряда. Слова, для которых их номер j – это p-число, называть *p-словами*, а слова, для которых их номер j – это q-число, будем называть *q-словами.* Последовательность $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ будем называть *PQ-последовательностью*, если выполнены следующие условия перехода от w_{j-1} к w_j (при этом, $w_0 := w$, где $w \in F_n$, – какое-либо непустое слово):

I. $\mathbf{w_j}$**– p-слово**.

$$w_j = \begin{cases} [w_{j-1}, \nu_j] & \text{для некоторого } \nu_j \in F_n, [w_{j-1}, \nu_j] \neq 1,\\ \text{или} \\ w_{j-1}^2. \end{cases}$$

II. $\mathbf{w_j}$**– q-слово**.

$$w_j = \begin{cases} [w_{j-1}, \mu_j w_{j-1} \mu_j^{-1}] \text{ или } [\mu_j w_{j-1}\mu_j^{-1}, w_{j-1}] \text{ для некоторого}\\ \mu_j \in F_n, [w_{j-1}, \mu_j] \neq 1,\\ \text{или}\\ [\omega_j w_{j-1}\omega_j^{-1}, \mu_j w_{j-1}\mu_j^{-1}] \text{ для некоторых}\\ \omega_j, \mu_j \in F_n, [\omega_j w_{j-1}\omega_j^{-1}, \mu_j w_{j-1}\mu_j^{-1}] \neq 1. \end{cases}$$

§6. Построение универсально сходящихся последовательностей на компактных группах

Определение 6.1. *Будем говорить, что последовательность* $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *нетривиальных слов* $w_j \in F_n$ *является универсально сходящейся на компактной группе к слову* $w \in F_n$ *(возможно* $w = 1$*), если для любой компактной группы* G *и любой ее открытой окрестности единицы* U_e *существует такое натуральное число* $d(U_e)$*, что для всех* $j > d$ *и для всех* $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ *имеет место включение*

$$w_j(g_1, \ldots, g_n)w^{-1}(g_1, \ldots, g_n) \in U_e.$$

В этом случае будем писать

$$\lim_{j\to\infty} w_j = w.$$

Таким образом, вопрос об универсальной сходимости последовательности $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ к слову ω – это вопрос о сходимости последовательности $\{w_j w^{-1}\}_{j\in\mathbb{N}}$ к единичному слову. Следующая теорема описывает некоторый класс последовательностей слов, сходящихся к единице в любой компактной группе G, которые получаются “привязкой” универсальной S-последовательности к P-отрезкам некоторой PQ-последовательности слов.

Теорема 1. *Пусть* $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *– универсальная* S*-последовательность слов группы* F_n*, а* $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *–* PQ*-последоательность слов группы* F_n*. Предположим, что*

1) *существует инъективое, сохраняющее порядок отображение* $\varsigma : \mathbb{N} \to P := \cup_i P_i$ *множества всех натуральных чисел в множество p-чисел такое, что для* $j = \varsigma(k)$

$$w_j = [w_{j-1}, \omega_k] \neq 1;$$

2) *существует такое натуральное число* p*, что*

$$| P_i | \leqslant p \ \text{ для любого } i \in \mathbb{N};$$

3)

$$| P_{i+1} | \leqslant | Q_i |$$

для любого $i \in \mathbb{N}$.

Тогда $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *– универсальная сходящаяся к единице на компактной группе послеледовательность слов свободной группы* F_n*.*

Доказательство. Пусть G – произвольная компактная группа, а U_e – некоторая открытая окрестность единицы $e \in G$. Надо показать, что существует такой номер j_0, что для всех $j \geqslant j_0$ имеет место включение

$$w_j(g_1, \ldots, g_n) \in U_e \tag{6.1}$$

для любой последовательности $g_1, \ldots, g_n \in G$.
Так как малые окрестности единицы образуют фундаментальную систему окрестностей единицы компактной группы, то окрестность в (6.1) можно считать малой.

Далее, пусть p – натуральное число из условия 2). Положим

$$V_e = Q^p(U_e). \tag{6.2}$$

Так как $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – универсальная S-последовательность, то существует такое число $r = r(V_e)$, что для любой последовательности $g_1, \ldots, g_n \in G$ имеет место включение

$$\omega_k(g_1, \ldots, g_n) \in V_e = Q^p(U_e) \subset U_e, \text{ для некоторого } k \leqslant r. \tag{6.3}$$

Из определения функции ς, включения (6.3) и Определения 3.1 (3.2, 3.6) получаем

$$\begin{aligned} &w_{\varsigma(k)}(g_1, \ldots, g_n) \\ &= [w_{\varsigma(k)-1}(g_1, \ldots, g_n), \underbrace{\omega_k(g_1, \ldots, g_n)}_{\in V_e}] \in P(V_e) = Q^{p-1}(U_e) \end{aligned} \tag{6.4}$$

для некоторого $k \leqslant r$.

Лемма 5. *Предположим, что для последовательности $g_1, \ldots, g_n \in G$ выполнено включение* (6.4) *для некоторого $\varsigma(k) = p_{is} \in P_i$. Тогда для любого $t = 0, 1, \ldots a_i - s$ выполнено включение*

$$w_{p_{is+t}}(g_1, \ldots, g_n) \in U_e.$$

Доказательство. Пусть $p_{is+1}, p_{is+2}, \ldots p_{ia_i}$ – p-числа отрезка P_i от p_{is+1} до последнего числа p_{ia_i} этого отрезка. Из определения PQ-последовательности следует, что для любого $1 \leqslant t \leqslant a_i - s$

$$w_{p_{is+t}}(g_1, \ldots, g_n) = [w_{p_{is+t-1}}(g_1, \ldots, g_n), \nu_{p_{is+t}}(g_1, \ldots, g_n)]$$

для некоторого $\nu_{p_{is+t}} \in F_n$ или

$$w_{p_{is+t}}(g_1, \ldots, g_n) = (w_{p_{is+t-1}}(g_1, \ldots, g_n))^2.$$

Предполагая $w_{p_{is+t-1}}(g_1, \dots, g_n) \in P^t(V_e)$, получаем из Определения 3.1 (3.6)

$$w_{p_{is+t}}(g_1, \dots, g_n) \in P(P^t(V_e)) = P^{t+1}(V_e).$$

Поскольку длина интервала $p_{is+1}, p_{is+2}, \dots, p_{ia_i}$ не превосходит $\mid P_i \mid -1$, то $t+1 \leqslant p$, а значит,

$$w_{p_{i\,a_i}}(g_1, \dots, g_k) \in P^p(V_e) = P^p Q^p(V_e) = U_e. \qquad \square$$

Лемма 6. *Предположим, что для последовательности* $g_1, \dots, g_n \in G$ *выполнено включение*

$$w_{p_{i\,a_i}}(g_1, \dots, g_k) \in U_e.$$

Тогда для любого q-числа $q_{i\,s}$ интервала Q_i имеет место включение

$$w_{q_{i\,s}}(g_1, \dots, g_k) \in U_e.$$

При этом для последнего q-числа q_{ib_i} интервала Q_i имеет место включение

$$w_{q_{i\,b_i}}(g_1, \dots, g_k) \in Q^{b_i}(U_e).$$

Доказательство. Из определения PQ-последовательности и Определения 3.1 следует, что при переходе от w_{j-1} к w_j для любого q-числа j соответствующая малая окрестность сжимается, т.е., если $w_{j-1}(g_1, \dots, g_m) \in W_e$ для некоторой малой окрестности единицы W_e, то $w_j(g_1, \dots, g_m) \in Q(W_e)$. Поскольку для последнего p-числа p_{a_i} отрезка P_i имеет место включение $w_{p_{i\,a_i}}(g_1, \dots, g_k) \in U_e$, то для всех q-чисел q_{is} интервала Q_i имеет место включение $w_{q_{is}}(g_1, \dots, g_k) \in Q^s(U_e) \subset U_e$, а для последнего q-числа этого интервала имеем $w_{q_{ib_i}}(g_1, \dots, g_k) \in Q^{b_i}(U_e)$. $\square$

Лемма 7. *Предположим, что для последовательности* $g_1, \dots, g_n \in G$ *выполнено включение*

$$w_{q_{i\,b_i}}(g_1, \dots, g_n) \in Q^{b_i}(U_e).$$

Тогда для любого p-числа $p_{i+1\,s}$ интервала P_{i+1} имеет место включение

$$w_{p_{is}}(g_1, \dots, g_n) \in U_e.$$

Доказательство. Из определения PQ-последовательности и Определения 3.1 следует, что при переходе от w_{j-1} к w_j для любого p-числа j соответствующая малая окрестность расширяется, т.е., если $w_{j-1}(g_1, \dots, g_m) \in W_e$ для некоторой малой окрестности единицы W_e, то $w_j(g_1, \dots, g_m) \in P(W_e)$. Поскольку для последнего q-числа q_{b_i} отрезка Q_i имеет место включение $w_{q_{i\,b_i}}(g_1, \dots, g_n) \in Q^{b_i}(U_e)$, то для всех

p-чисел $p_{i+1\,s}$ интервала P_{i+1} имеет место включение $w_{q_{is}}(g_1, \ldots, g_n) \in P^s Q^{b_i}(U_e) \subset U_e$, а для последнего q-числа этого интервала

$$w_{q_{ib_i}}(g_1, \ldots, g_n) \in P^{a_{i+1}} Q^{b_i}(U_e).$$

Ввиду условия 3) $\mid P_{i+1} \mid = a_{i+1} \leqslant b_i = \mid Q_i \mid$, а значит, $P^{a_{i+1}} Q^{b_i}(U_e) \subset U_e$. □

Теперь мы можем вернуться к доказательству теоремы. Образ $w_l(g_1, \ldots, g_n)$ любой последовательности $g_1, \ldots, g_n \in G$ попадает в малую окрестность единицы U_e группы G для некоторого p-числа $l \in P_i, l \leqslant \varsigma(r(V_e))$ (6.3). При этом образы $w_m(g_1, \ldots, g_n)$, соответствующие p-числам $m > l$ интервала P_i, также содержатся в окрестности U_e (Лемма 5). Далее, все образы $w_m(g_1, \ldots, g_n)$ для q-чисел $m \in Q_i$ также содержатся в некоторых сжатиях $Q^s(U_e) \subset U_e$ окрестности U_e, а для последнего числа интервала Q_i имеет место включение $w_{q_{i\,b_i}}(g_1, \ldots, g_n) \in Q^{b_i}(U_e) \subset U_e$ (Лемма 6). Далее, для всех p-чисел s интервала P_{i+1} также имеется включение $w_{p_{i+1\,s}}(g_1, \ldots, g_n) \in U_e$ (Лемма 7). Применяя теперь последовательно результаты Лемм 6 и 7 к интервалам $P_t, Q_t, t > i$, получим, что для любого $j > \varsigma(k)$

$$w_j(g_1, \ldots, g_n) \in U_e$$

для фиксированной последовательности $g_1, \ldots, g_n \in G$. Поскольку для любой фиксированной последовательности $g_1, \ldots, g_n \in G$ существует такой номер i, что выполнено включение (6.4) для некоторого $\varsigma(k) = p_{is} \in P_i$, то мы получаем (6.1).

Теорема доказана. □

Замечание 6.1. *Построить PQ-разбиение натурального ряда, удовлетворяющее условиям* 2) *и* 3) *можно, например, если в качестве P-отрезков взять отрезки одинаковой длины p, а все Q-отрезки длины $> p$.*

Замечание 6.2. *Условия* 2) *и* 3)*, по-видимому, можно заменить на условие*

$$\lim_{i \to \infty} \frac{q_i}{p_{i+1}} = c > 1 \ \text{ или } \ \lim_{i \to \infty} \frac{q_i}{p_{i+1}} = \infty.$$

Пример 1. Пусть $n = 2$,

$$v_k = v_k(x, y) := [\underbrace{x, [x, \ldots x[x}_{k \text{ коммутаторов}}, y] \ldots]] \in F_2$$

– энгелево слово, $\mathcal{M} = \{(l,k) \mid l,k \in \mathbb{N}, l > k\}$, и пусть $j := j(l,k)$ – номер пары (l,k) при лексикографическом порядке. Поскольку при $l > k$ слова v_l, v_k содержатся в разных членах центрального ряда свободной группы F_2, то $\omega_j = v_k^{-1} v_l \neq 1$, а значит, последовательность

$$\{\omega_j = v_k^{-1} v_l\}_{j(l,k)\in\mathbb{N}}$$

является универсальной S-последовательностью (см. Пример 1, п. 4). Пусть теперь дано PQ-разбиение натурального ряда, удовлетворяющее условиям 2), 3). Пусть $\varsigma : \mathbb{N} \to \cup_i P_i$ – *биективная* функция, сохраняющая порядок. Положим $w_0 = y$ и для любого $m \in \mathbb{N}$

$$w_m := \begin{cases} [w_{m-1}, \omega_l], & \text{если } m = \varsigma(l) - p\text{-число}, \\ [w_{m-1}, x w_{m-1} x^{-1}], & \text{если } m - q\text{-число}. \end{cases}$$

Последовательность $\{w_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ изготовлена по рецепту Теоремы 1. Для того, чтобы она была универсально сходящейся к единице последовательностью, необходимо проверить условие $w_m \neq 1$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Пусть m – это p-число. При $m = 1 = j(2,1)$ имеем

$$w_1 = [y, \omega_1] = [y, \underbrace{[x,y]^{-1}[x,[x,y]]}_{v_1^{-1}v_2 \notin \langle y\rangle}] \neq 1.$$

Заметим, что $w_1 \in [G,[G,G]], w_1 \notin [G,[G,[G,G]$. Далее, если $2 = j(3,1)$ – p-число, то

$$w_2 = [w_1, \omega_2] = [w_1, \underbrace{[x,y]^{-1}[x,[x,[x,y]]]}_{v_1^{-1}v_3}] \neq 1,$$

поскольку $w_1 \in [G,[G,G]]$ и $v_1^{-1}v_3 \notin [G,[G,G]]$ находятся в разных членах центрального ряда. Если 2 – q-число, то

$$w_2 = [w_1, x w_1 x^{-1}] \neq 1,$$

так как x, w_1 не могут коммутировать и, следовательно, порождают свободную подгруппу группы F_2. Заметим, что в обоих случаях $w_2 \in F_2^2 = [[F_2,F_2],[F_2,F_2]]$. Также и для всех $k > 1$ имеет место включение $w_k \in F_2^2$. Заметим также, что $\omega_{j(l,k)} = v_k^{-1} v_l \notin F_2^2$ для любого $j =$

$j(l,k) \in \mathbb{N}$. Поэтому для $m > 2$

$$w_m = \begin{cases} [\underbrace{w_{m-1}}_{\in F_2}, \underbrace{\omega_l}_{\notin F_2^2}] \neq 1 \text{ если } m - p\text{-число } m = \varsigma(l), \\ [\underbrace{w_{m-1}}_{\notin \langle x \rangle}, x w_{m-1} x^{-1}] \neq 1 \text{ если } m - q\text{-число.} \end{cases}$$

Таким образом, $w_m \neq 1$ для любого $m \in \mathbb{N}$ и $\{w_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ – это универсально сходящаяся к единице последовательность слов из F_2.

Пример 2. Пусть

$$1 \neq \omega = \omega(x,y) \in F_2, \ \ \omega \notin \langle x \rangle, \ \ \omega_k := \omega^k \text{ для любого } k \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – это универсальная S-последовательность (см. Пример 2, п. 4). Пусть дано PQ-разбиение натурального ряда, удовлетворяющее условиям 2), 3), и пусть $\varsigma : \mathbb{N} \to \cup_i P_i$ – биективная функция, сохраняющая порядок. Положим $w_1 = [x, \omega_1]$ и далее

$$w_j := \begin{cases} [w_{j-1}, \omega_k], \ \text{ если } j - p\text{-число}, \ j = \varsigma(k), \\ [w_{j-1}, x w_{j-1} x^{-1}], \ \text{ если } j - q\text{-число.} \end{cases}$$

Поскольку $\langle x, \omega \rangle$ – свободная подгруппа в F_2, все слова w_j непусты и, ввиду, Теоремы 1 образуют универсально сходящуюся к единице последовательность слов из F_2.

Пример 3. Пусть

$$\omega_1, \omega_2 \in F_n, \ [\omega_1, \omega_2] \neq 1, \ a, b \in \mathbb{Z} \ \nu_i := \omega_1^{ai} \omega_2^{bi} \text{ для любого } i \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\{\nu_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – это универсальная S-последовательность (см. Пример 3, п. 4). Пусть дано PQ-разбиение натурального ряда, удовлетворяющее условиям 2), 3), и пусть $\varsigma : \mathbb{N} \to \cup_i P_i$ – *инъективная* функция, сохраняющая порядок, значениями которой являются лишь первые p-числа каждого P-отрезка P_i. Положим $w_0 := \omega_1$

$$w_j := \begin{cases} [w_{j-1}, \nu_i], \ \ \text{ если } j = p_{i1}, \\ w_{j-1}^2, \ \text{ если } j = p_{is}, \ s > 1, \\ [w_{j-1}, \omega_1 w_{j-1} \omega_1^{-1}], \ \text{ если } j - q\text{-число.} \end{cases} .$$

Любой член $w_{j-1}, j > 1$ содержится в коммутанте свободной подгруппы, порожденной ω_1, ω_2, а элементы вида $\nu_i = \omega_1^{ai} \omega_2^{bi}$ не содержатся в таком коммутанте, а значит, все элементы w_j отличны от единицы.

Таким образом, $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ – это универсально сходящаяся к единице последовательность слов из F_n.

Замечание 6.3. *В работе* [16] (*Теорема* 2.2.) *использована вариация последовательности Примера* 2 *при PQ-разбиении* $|\ P_i\ |=|\ Q_i\ |=1$ *и при* $\omega = x$, *и при подстановках* $w_j := [w_{j-1}, {w_{j-1}}^{-1}]$ *вместо подстановки Примера* 2 $w_j := [w_{j-1}, xw_{j-1}x^{-1}]$.

Замечание 6.4. *Метод построения сходящихся к единице последовательностей слов, предложенный в Теореме* 1, *допускает множество вариаций. Например, при определении PQ-последовательности слов слова, соответствующие p-числам j, могут быть получены не только операциями коммутирования* $[w_{j-1}, \nu_j]$ *и квадратами* w_{j-1}^2, *но и произведениями вида* $w_{j-2}w_{j-1}$. *В этом случае потребуется дополнительное условие на функцию* ς, *чтобы элемент*

$$w_{j-2}(g_1, \dots, g_n)w_{j-1}(g_1, \dots, g_n)$$

попадал в нужную окрестность единицы (*см. Определение* 3.1 (3.2, 3.3)).

§7. Группа $SU_2(\mathbb{C})$

Здесь $G = \mathrm{S}U_2(\mathbb{C})$. Пусть $w \in F_n, w \neq 1$. Пусть далее $\widetilde{w} : G^n \to G$, и пусть $\mathrm{tr}\circ\widetilde{w}$ – композиция вербального отображения $\widetilde{w}$ и отображения следа для матриц из $\mathrm{S}L_2(\mathbb{C})$. Так как собственные значения матриц группы $\mathrm{S}U_2(\mathbb{C})$ имеют вид ϵ, ϵ^{-1} при $|\ \epsilon\ |= 1$, то значения $\mathrm{tr}\circ\widetilde{w}$ – это вещественные числа вида $2\cos\varphi$. Поскольку G – компактная связная группа (в стандартной евклидовой топологии), а отображение $\mathrm{tr}\circ\widetilde{w}$ непрерывно, то образ $\mathrm{Im}\ \mathrm{tr}\circ\widetilde{w}$ – это отрезок, содержащийся в отрезке $[-2, 2]$. Далее, $e = \widetilde{w}(e, \dots, e) \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}$. Поэтому $2 \in \mathrm{Im}\ \mathrm{tr}\circ\widetilde{w}$, а значит,

$$\mathrm{Im}\ \mathrm{tr}\circ\widetilde{w} = [c, 2] \text{ для некоторого } -2 \leqslant c < 2. \tag{7.1}$$

Здесь неравенство $c < 2$ вытекает из следующего факта. Если бы $c = 2$, то $\mathrm{Im}\ \widetilde{w} = e$. Поскольку группа $\mathrm{S}U_2(\mathbb{C})$ плотна в $\mathrm{S}L_2(\mathbb{C})$ в топологии Зарисского ([4], 18.3), то соответствующее вербальное отображение $\widetilde{w} : \mathrm{S}L_2(\mathbb{C})^n \to \mathrm{S}L_2(\mathbb{C})$ также является отображением всей группы в e, что противоречит доминантности этого отображения ([3]).

Заметим, что

$$\mathrm{Im}\ \mathrm{tr}\circ\widetilde{w} = [-2, 2] \Leftrightarrow \mathrm{Im}\ \widetilde{w} = G. \tag{7.2}$$

Действительно, любой класс сопряженных элементов группы
$$G = \mathrm{S}U_2(\mathbb{C}) \leqslant \mathrm{S}L_2(\mathbb{C})$$
однозначно определяется значением следа, а поскольку образ любого вербального отображения инвариантен относительно сопряжения (см. [16]), то из равенства $\mathrm{Im}\ \mathrm{tr} \circ \widetilde{w} = [-2, 2]$ будет следовать и равенство $\mathrm{Im}\ \widetilde{w} = G$.

Отметим следующее наблюдение.

Предложение 7.1. *Пусть $w \in F_n, w \neq 1$. Существует такое число $m_0 = m_0(w) \in \mathbb{N}$, что для любого $m > m_0$ отображение*
$$\widetilde{w^m} : G^n \to G$$
сюръективно.

Доказательство. Пусть $c \in \mathbb{R}$ – вещественное число из (7.1). Тогда существует такое положительное вещественное число φ, что $c = 2\cos\varphi$. Далее, существует такое число m_0, что $\frac{\pi}{m_0} < \varphi$, а значит, для любого $m > m_0$
$$\psi := \frac{\pi}{m} < \varphi \Rightarrow 2\cos\psi \in [c, 2] = \mathrm{Im}\ \mathrm{tr} \circ \widetilde{w}.$$
Следовательно в образе $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}$ содержится элемент с собственными значениями ϵ, ϵ^{-1} для $\epsilon = \cos\psi + i\sin\psi$. Тогда в образе $\mathrm{Im}\ \widetilde{w^m}$ содержится элемент с собственными значениями
$$\epsilon^m = \epsilon^{-m} = \cos m\psi = \cos m\frac{\pi}{m} = \cos\pi = -1.$$
Поэтому $\mathrm{Im}\ \mathrm{tr} \circ \widetilde{w^m} = [-2, 2]$ и ввиду (7.2) получаем сюръективность отображения $\widetilde{w^m}$. □

Для некоторых слов можно заведомо ограничить число m_0 из Предложения 7.1.

Определение 7.1. *Элемент $w \in F_n$ будем называть BGGKPP-словом, если для любой конечной группы Γ из равенства $\widetilde{w} = 1$ для вербального отображения $\widetilde{w}_j : \Gamma^n \to \Gamma$ вытекает разрешимость группы Γ.*

Теорема 2. *Пусть $G = \mathrm{S}U_2(\mathbb{C})$ и $w \in F_n$ – BGGKPP-слово. Тогда для любого $m > 2$ отображение $\widetilde{w^m} : G^n \to G$ является сюръективным. При этом соответствующее отображение $\widetilde{w^m} : (G/Z(G))^n \to G/Z(G)$ является сюръективным при $m \geqslant 2$.*

Доказательство. В группе $G = \mathrm{S}U_2(\mathbb{C})$ существует конечная подгруппа $H \approx \mathrm{SL}_2(5)$. Из определения BGGKPP-слов следует, что

$$\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_{|H} \not\leqslant Z(H)$$

(здесь $\widetilde{w}_{j|H}$ – ограничение вербального отображения $\widetilde{w}_j : G^n \to G$ на квазипростую конечную подгруппу H). Следовательно, в образе отображения $\widetilde{w}_{j|H}$ содержатся элементы одного из следующих порядков: $3, 4, 5, 6, 10$. Образы вербальных отображений инвариантны относительно любого автоморфизма отображаемой группы ([6]). Поскольку все элементы каждого из порядков $3, 4, 5, 6, 10$ лежат в одной орбите группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(H)$, то в образе $\widetilde{w}_{|H}$, а значит, и в образе $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_j$, найдется элемент с собственными значениями ϵ, ϵ^{-1} для $\epsilon = \cos\varphi + i\sin\varphi$, где φ – одно из следующих чисел

$$\frac{2\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{4\pi}{5},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{3\pi}{5}. \tag{7.3}$$

Следовательно, в этом случае c из условия (7.1) не превосходит 1. Таким образом, в $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}$ содержатся элементы порядка 6, а значит, $-1 \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w^3}$. Сюръективность отображения $\widetilde{w^m} : G^n \to G$ при $m > 2$ следует теперь из (7.2).

Поскольку элемент порядка 4 содержится в образе отображения $\widetilde{w^m} : G^n \to G$ при $m \geqslant 2$ (см. (7.3)), то $[0, 2] \subset \mathrm{Im}\ \mathrm{tr} \circ \widetilde{w^m}$ при $m \geqslant 2$. Следовательно, множество элементов вида $\pm g$, где g содержится в образе отображения $\widetilde{w^m} : G^n \to G$, совпадает со всей группой $G = \mathrm{S}U_2(\mathbb{C})$, а значит, отображение $\widetilde{w^m} : \mathrm{PSU}_2(\mathbb{C})^n \to \mathrm{PSU}_2(\mathbb{C})$ сюръективно при $m \geqslant 2$. □

В работе [1] показано, что последовательность группы F_2

$$w_1 = x^{-2}y^{-1}x, w_2 = [xw_1x^{-1}, yw_1y^{-1}], \ldots, w_j = [xw_{j-1}x^{-1}, yw_{j-1}y^{-1}] \ldots$$

является последовательностью BGGKPP-слов. Очевидно,

$$w_j = [x \underbrace{w_{j-1}}_{\in F_2^{j-1} \setminus F_2^j} x^{-1}, yw_{j-1}y^{-1}] \in F_2^j \setminus F_2^{j+1}.$$

Таким образом, $w_j^3 \in F_2^j \setminus F_2^{j+1}$ для любого j. Используя Теорему 2, можно теперь предъявить последовательность слов $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, для которой $w_j \in F_2^j \setminus F_2^{j+1}$ и соответствующие отображения $\widetilde{w}_j : G^2 \to G$

сюръективны. Такой последовательностью будет последовательность кубов

$$w_1 := (x^{-2}y^{-1}x)^3, w_2 :=([xw_1x^{-1}, yw_1y^{-1}])^3,$$
$$\ldots, w_j := ([xw_{j-1}x^{-1}, yw_{j-1}y^{-1}])^3 \ldots .$$

Перейти от группы F_2 к произвольной группе F_n можно, заменив слова $w_j \in F_2$ на

$$x_1x_2 \cdots x_{n-2}w_jx_{n-2}^{-1} \cdots x_2^{-1}x_1^{-1},$$

где $x_1, \ldots, x_{n-2}, x, y$ – независимые переменные.

§8. Замечания и комментарии

8.1. Сходящиеся последовательности слов и гомоморфизмы свободной группы в компактную. В работе А.Тома [9] используется отличная от данной работы точка зрения на сходимости последовательностей слов свободной группы. А именно, рассматриваются гомоморфизмы свободной группы $\pi : F_2 \to G$ в компактную группу и последовательности слов свободной группы $\{w_j\}_{j=1}^n$ такие, что последовательности $\{\pi(w_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ сходятся в G к единице. Ясно, что любой такой гомоморфизм π совпадает с гомоморфизмом $\pi_{\sigma,\tau} : F_2 \to G$, определенным для фиксированной пары $(\sigma, \tau) \in G \times G$ формулой $\pi_{\sigma,\tau}(w) := w(\sigma, \tau)$. Таким образом, сходимость к единице последовательности $\{\pi(w_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ обозначает сходимость значений вербальных отображений $\{\widetilde{w}_j\}_{j=1}^n$ на точке $(\sigma, \tau) \in G \times G$. В [9] (Proposition 3.7) доказано существование такой последовательности. Кроме того, такая последовательность сходится равномерно (uniform convergence) при условии замены G на группу $\mathbb{U}(V), \dim V < \infty$ при помощи непрерывного унитарного представления $G \to \mathbb{U}(V)$.

8.2. Скорости сходимости последовательностей. В работах [9], [7] рассматривается также вопрос о скорости сходимости последовательностей $\{w_j\}_{j=1}^n$ на группах $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$. Интересно было бы определить как скорость сходимости на компактной группе зависит от длины P и Q-отрезков для PQ-последовательностей. С одной стороны, Q-отрезки загоняют уже “пойманную в малую окрестность” последовательность $(g_1, \ldots, g)$ в еще более малые, с другой стороны нужно достаточное число элементов P-отрезков, чтобы любая последовательность $(g_1, \ldots, g)$ попала бы в заданную малую окрестность.

Интересно было бы также проследить за скоростью сходимости различных последовательностей на свободных проконечных группах и для бесконечных произведений компактных групп Ли.

8.3. Фундаментальные последовательности и пополнения. Пусть Γ – топологическая группа, у которой Γ-инвариантные открытые окрестности образуют фундаментальную систему окрестностей единицы. Последовательность $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ называется *фундаментальной (или последовательностью Коши)*, если для любой открытой Γ-инвариантной окрестности единицы U_e существует такое натуральное число $m_0 = m_0(U_e)$, что $g_p g_q^{-1} \in U_e$ для любых $p, q > m_0$.

Если $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ – фундаментальная последовательность, то и $\{g_m^{-1}\}_{m\in\mathbb{N}}$ – фундаментальная последовательность. Действительно,

$$g_p g_q^{-1} \in U_e \Rightarrow g_q^{-1}(g_p g_q^{-1})g_q = g_q^{-1} g_p \in U_e.$$

Далее, пусть $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{g'_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ – фундаментальные последовательности, и пусть U_e – Γ-инвариантная открытая окрестность единицы. Существует Γ-инвариантная открытая окрестность единицы V_e такая, что $V_e V_e \subset U_e$ ([13, Глава III, \$1, п.2, свойство (GV_{II})]). Далее, существует такое натуральное число m_0, что $g_p g_q^{-1}, g'_p g_q'^{-1} \in V_e$ для любых $p, q > m_0$. Следовательно, для любых $p, q > m_0$

$$\begin{aligned}\underbrace{(g_q^{-1} g_p)}_{\in V_e}\underbrace{(g'_p g_q'^{-1})}_{\in V_e} &= g_q^{-1}(g_p g'_p g_q'^{-1} g_q^{-1})g_q \in V_e V_e \Rightarrow (g_p g'_p)(g_q'^{-1} g_q^{-1}) \\ &= (g_p g'_p)(g_q g'_q)^{-1} \in V_e V_e \subset U_e,\end{aligned}$$

а значит, $\{g_m g'_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ – также фундаментальная последовательность. Таким образом, множество

$$\Phi(\Gamma) := \{\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}} \mid \{g_m\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ – фундаментальная последовательность элементов группы } \Gamma\}$$

является группой относительно операций почленного умножения. Подмножество

$$\mathfrak{N}(\Gamma) := \{\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}} \in \Phi(\Gamma) \mid \lim_{m\to\infty} g_m = e\}$$

является нормальной подгруппой в $\Phi(\Gamma)$. Факторгруппу

$$\bar{\Gamma} := \Phi(\Gamma)/\mathfrak{N}(\Gamma)$$

назовем Φ-*пополнением* группы Γ.

Пусть $\Gamma := F_n$, а G – компактная группа. Пусть далее $\mathfrak{e}, e$ – единицы групп F_n, G соответственно. Пусть U_e – открытая окрестность единицы группы G. Положим

$$U_{\mathfrak{e}}^{\diamond} := \{w \in F_n \quad | \quad \widetilde{w}(G^n) \subset U_e\}.$$

Мы можем наделить F_n топологией, базисом которой будут множества $\{wU_{\mathfrak{e}}^{\diamond}\}_{w \in F_n}$. При этом множества $U_{\mathfrak{e}}^{\diamond}$ образуют фундаментальную систему окрестностей единицы группы F_n. Ф-пополнение группы Γ относительно данной топологии будем обозначать $\overline{\Gamma}_G$ (т.е. $\overline{\Gamma}_G$ – это факторгруппа группы фундаментальных последовательностей в топологии, индуцированной группой G).

Случай I. *G – конечная группа.*

Пусть G – конечная группа, и пусть $I_{n\,G} \subset F_n$ – множество всех слов $w \in F_n$, для которых $\widetilde{w} : G^n \to G$ – единичные отображения (т.е. множество всех тождеств на G из F_n). Тогда $I_{n\,G} \lhd F_n$ – нормальная подгруппа и

$$[F_n : I_{n\,G}] \leqslant \infty \tag{8.1}$$

([20, Глава I, §5, Теорема 15.71]).

Предложение 8.1.

$$\overline{(F_n)}_G = F_n / I_{n\,G}.$$

Доказательство. В конечной группе G (наделенной дискретной топологией) открытыми окрестностями единицы U_e являются любые подмножества, содержащие e. Поэтому $U_{\mathfrak{e}}^{\diamond}$ – это множество, состоящее из конечного числа (ввиду 8.1) левых смежных классов

$$I_{n\,G},\ w_1 I_{n\,G}, \dots, w_r I_{n\,G},$$

среди которых содержится нормальная подгруппа тождеств $I_{n\,G}$.

Пусть $\{w_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ – фундаментальная последовательность относительно топологии на F_n, определенной конечной группой G. Тогда существует такое натуральное число m_0, что для любых $p, q > m_0$

$$w_p w_q^{-1} \in I_{n\,G} \Leftrightarrow w_p, w_q \in wI_{n\,G} \quad \text{для некоторого } \ w \in F_n. \tag{8.2}$$

Из 8.2 следует, что

$$\lim_{m \to \infty} w w_m^{-1} = \mathfrak{e},$$

а значит, фундаментальная последовательность $\{w_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ эквивалентна постоянной последовательности, все члены которой равны w. При этом последовательности с постоянными членами w, w' эквивалентны тогда и только тогда, когда $ww'^{-1} \in I_{n\,G}$. Отсюда получаем утверждение предложения. $\square$

Случай II. $G = \widehat{F}_r$ *– свободная проконечная группа.*

Предложение 8.2. *Пусть* $G = \widehat{F}_r$ *– свободная проконечная группа, где* $r \geqslant n$. *Тогда* $\overline{(F_n)}_G = \widehat{F}_n$ *– также свободная проконечная группа.*

Доказательство. Пусть $U_e \subset \widehat{F}_r$ – открытая $\widehat{F}_r$-инвариантная окрестность единицы. Поскольку нормальные подгруппы конечного индекса образуют фундаментальную систему окрестностей единицы в проконечной группе, то можно считать, что $U_e \lhd \widehat{F}_r$ – нормальная подгруппа конечного индекса. Тогда окрестность

$$U_{\mathfrak{e}}^{\diamond} := \{w \in F_n \quad | \quad \widetilde{w}(\widehat{F}_r^n) \subset U_e\}$$

– это группа тождеств в F_n на конечной группе $\widehat{F}_r/U_e$ (см. (8.1)), а значит, $U_{\mathfrak{e}}^{\diamond}$ – это нормальная подгруппа конечного индекса в F_n.

Пусть теперь $W_{\mathfrak{e}} \lhd F_n$ – нормальная подгруппа конечного индекса. Множество всех тождеств на конечной группе $\Delta := F_n/W_{\mathfrak{e}}$ является нормальной подгруппой $\widetilde{W}_{\mathfrak{e}} \lhd F_n$ группы F_n, содержащейся в группе соотношений, т.е. $\widetilde{W}_{\mathfrak{e}} \leqslant W_{\mathfrak{e}}$. Поскольку $r \geqslant n$, существует нормальная подгруппа $U_e \lhd \widehat{F}_r$, для которой

$$\Delta = F_n/W_{\mathfrak{e}} \approx \widehat{F}_r/U_e.$$

Лемма 8.

$$\widetilde{W}_{\mathfrak{e}} = U_{\mathfrak{e}}^{\diamond} := \{w \in F_n \quad | \quad \widetilde{w}(\widehat{F}_r^n) \subset U_e\}.$$

Доказательство. Для любого $w \in F_n$ вербальное отображение $\widetilde{w} : \widehat{F}_r^n \to \widehat{F}_r$ индуцирует вербальное отображение $\widetilde{w}^{\Delta} : \Delta^n \to \Delta$. Действительно, если $g_1, \ldots, g_r \in \widehat{F}_r$ и $\gamma_1, \ldots, \gamma_r \in \Delta$ – такие элементы, что $g_1 \equiv \gamma_1 (\mathrm{mod}\ U_e), \ldots, g_r = \gamma_r (\mathrm{mod}\, U_e)$, то

$$\widetilde{w}^{\Delta}(\gamma_1, \ldots, \gamma_r) := \widetilde{w}(g_1, \ldots, g_r)(\mathrm{mod}\ U_e).$$

Таким образом,

$$w \in \widetilde{W}_{\mathfrak{e}} \Leftrightarrow \widetilde{w}^{\Delta} \equiv 1 \Leftrightarrow \widetilde{w}(\widehat{F}_r) \subset U_e \Leftrightarrow w \in U_{\mathfrak{e}}^{\diamond}.$$ $\square$

Следовательно, $\widetilde{W}_{\mathfrak{e}}$ – открытая окрестность единицы группы F_n, а значит, и $W_{\mathfrak{e}}$ – также открытая окрестность единицы группы F_n. Таким образом, в топологии, индуцированной компактной группой $\widehat{F}_r$, все подгруппы конечного индекса в свободной группе F_n являются открытыми окрестностями единицы, и любая такая окрестность содержит подгруппу конечного индекса. Ф-пополнение в этой топологии $\overline{(F_n)}_G$ и есть свободная проконечная группа $\widehat{F}_n$. $\square$

Пример 8.1. *Пусть $n = 2$, $r = 1$. Тогда в компактной группе $G = \widehat{F}_r = \widehat{\mathbb{Z}}$ открытые окрестности единицы вида $U_{e,m} = m\widehat{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ образуют фундаментальную систему окрестностей единицы. Далее, группа тождеств в F_2 на конечной циклической группе $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}=\widehat{\mathbb{Z}}/m\widehat{\mathbb{Z}}$ порождается (как нормальная подгруппа) элементами $[x,y], x^m, y^m$. Следовательно топология на группе F_2 определяется фундаментальной системой окрестностей единицы вида*

$$U^{\diamond}_{\mathfrak{e},m} = \langle [x,y], x^m, y^m \rangle,$$

а значит,

$$\overline{(F_2)}_G = \lim_{\leftarrow} F_2/U^{\diamond}_{\mathfrak{e},m} \approx \widehat{\mathbb{Z}} + \widehat{\mathbb{Z}}.$$

Случай III. $G = \mathrm{S}U_n(\mathbb{C})$.

В этом случае у нас нет описания группы $\overline{(F_n)}_G$ и это, по-видимому, – непростая задача. Здесь мы можем описать способ построения фундаментальных последовательностей. Для группы $G = \mathrm{S}U_n(\mathbb{C})$ окрестности единицы вида $U_{e,\epsilon} = \{g \in G \ \mid \| g - e \| < \epsilon\}$, где ϵ – пробегает множество положительных вещественных чисел, образуют фундаментальную систему окрестностей единицы. Таким образом, открытые окрестности

$$U^{\diamond}_{\mathfrak{e},\epsilon} := \{w \in F_n \ \mid \ w(G^n) \subset U_{e,\epsilon}\}$$

образуют фундаментальную систему окрестностей единицы $\mathfrak{e}$ группы F_n при топологии, определенной группой G. Пусть $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – последовательность элементов группы F_n, сходящаяся к единице. Далее, рассмотрим подпоследовательность $\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, \dots, \omega_{k_s} \dots$, удовлетворяющую условию

$$\omega_{k_1} \in U_{e,\frac{1}{2}}, \omega_{k_2} \in U_{e,\frac{1}{2^2}}, \dots, \omega_{k_s} \in U_{e,\frac{1}{2^s}}, \dots . \tag{8.3}$$

Положим

$$w_1 = \omega_{k_1}, \ \ w_2 = \omega_{k_1}\omega_{k_2}, \dots, \ \ w_s = \omega_{k_1}\omega_{k_2}\cdots\omega_{k_s}, \dots$$

Тогда для любых $p < q$

$$w_p w_q^{-1} = w_p(\omega_{k_q}^{-1}\cdots\omega_{k_{p+2}}^{-1}\omega_{k_{p+1}}^{-1})w_p^{-1},$$

а значит,

$$\|e - w_p w_q^{-1}\| = \|e - \omega_{k_q}^{-1} \cdots \omega_{k_{p+2}}^{-1} \omega_{k_{p+1}}^{-1}\|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{q-p} \|e - \omega_{k_{p+i}}\| \overset{8.3}{<} \sum_{i=1}^{q-p} \frac{1}{2^{p+i}} \leqslant \frac{1}{2^p} \Rightarrow w_p w_q^{-1} \in U_{e,\frac{1}{2^p}}.$$

При $q < p$ аналогично получаем $w_p w_q^{-1} \in U_{e,\frac{1}{2^q}}$. Таким образом, $\{w_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ – фундаментальная последовательность элементов группы F_n.

Пусть теперь $\{w_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ – фундаментальная последовательность элементов группы F_n. Положим

$$\omega_1 = w_1, \omega_2 = w_1^{-1} w_2, \ldots, \omega_m = w_{m-1}^{-1} w_m, \ldots.$$

Тогда

$$w_1 = \omega_1, w_2 = \omega_1\omega_2, \ldots, w_m = \omega_1\omega_2 \cdots \omega_m, \ldots.$$

Из определения фундаментальной последовательности следует, что

$$\lim_{m\to\infty} \omega_m = e.$$

Таким образом, предел $\lim_{m\to\infty} w_m$ элементов фундаментальной последовательности в группе $\overline{(F_n)}_G$ – это отображение

$$\widetilde{w} : G^n \to G,$$

определяемое пределом вербальных отображений

$$\widetilde{\omega_1}\widetilde{\omega_2} \cdots \widetilde{\omega_m} : G^n \to G,$$

равномерно сходящихся к $\widetilde{w}$

$$\widetilde{w} := \lim_{m\to\infty} \widetilde{\omega_1}\widetilde{\omega_2} \cdots \widetilde{\omega_m} := \prod_{i=1}^{\infty} \widetilde{\omega}_i.$$

Вопрос о бесконечных произведениях вербальных отображений, определяющих также некоторое “регулярное отображение”, возможно, легче рассматривать для случая $G = \mathrm{S}U_2(\mathbb{C})$, поскольку $\mathrm{S}U_2(\mathbb{C})$ – это группа кватернионов с приведенной нормой, равной единице, и равномерная сходимость отображений, определяемых вербальными отображениями является вопросом анализа регулярных отображений на теле кватернионов.

8.4. Образы вербальных отображений компактной группы. При изучении вербальных отображений возникает естественный вопрос. *Какие подмножества компактной группы G являются образами* $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}$ *вербальных отображений* $\widetilde{w}: G^n \to G$? Для произвольной группы G образ любого вербального отображения является $\mathrm{Aut}(G)$-инвариантным подмножеством (см. [6]), содержащим единицу. Для компактной группы образ $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}$ также является замкнутым подмножеством группы G, поскольку $\widetilde{w}$ – непрерывное отображение компактного пространства G^n в компактное пространство G.

1. Пусть G – конечная простая группа (компактная группа в дискретной топологии). Тогда указанные условия являются и достаточными, а именно, для любого $\mathrm{Aut}(G)$-инвариантного подмножества $A \subset G$, содержащего единицу группы G, существует вербальное отображение $\widetilde{w}: G^2 \to G$ для некоторого слова $w \in F_2$ такое, что $\mathrm{Im}\ \widetilde{w} = A$ (Теорема А. Любоцкого [8]).

2. Пусть G – компактная полупростая связанная вещественная группа Ли. Тогда это – группа вещественных точек $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ ("с точностью до центра") полупростой алгебраической группы $\mathcal{G}$, определенной и анизотропной над полем вещественных чисел ([15, Глава V, §2, Теорема 12]). При этом G – плотное подмножество группы $\mathcal{G}$ в топологии Зарисского ([4, 18.3]). Поскольку ввиду теоремы А. Бореля ([3]) нетривиальное вербальное отображение $\widetilde{w}: \mathcal{G}^n \to G$ доминантно, существует вещественная точка $x \in \mathcal{G}(\mathbb{R})^n$, для которой дифференциал $d_x: T_x \to T_{\widetilde{w}(x)}$ сюръективен (здесь $T_x, T_{\widetilde{w}(x)}$ – касательные пространства в точках $x \in \mathcal{G}(\mathbb{R})^n, w(x) \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$ к многообразиям $\mathcal{G}^n, \mathcal{G}$ соответственно). Так как группа $\mathcal{G}$ является $\mathbb{R}$-определенной, то в касательном пространстве T_x существует $\mathbb{R}$-структура $T_x(\mathbb{R})$, которая отображается сюръективно на $\mathbb{R}$-структуру $T_{\widetilde{w}(x)}(\mathbb{R})$ касательного пространства $T_{w(x)}$ при линейном отображении d_x ([4, АГ, §16]). Таким образом,

a) *размерность образа* $\mathrm{Im}\,\widetilde{w}$ *совпадает с размерностью группы* $\mathcal{G}$;

b) $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}$ – *замкнутое подмножество в топологической группе* G;

c) $\mathrm{Im}\ w$ – $\mathrm{Aut}(G)$-*инвариантное подмножество группы* G.

Для группы $\mathrm{S}U_2(\mathbb{C})$ образ вербального отображения $\widetilde{w}: \mathrm{S}U_2(\mathbb{C})^n \to \mathrm{S}U_2(\mathbb{C})$ определяется неравенством

$$\mathrm{Im}\ \widetilde{w} = \{g \in \mathrm{S}U_2(\mathbb{C}) \ \mid \ \mathrm{tr}(g) \leqslant c\} \ \text{для некоторого} \ c \in [-2, 2]$$

(см. (7.1). Таким образом, Im $\widetilde{w}$ – *это многообразие с краем.* Интересно было бы понять, для каких случаев образ отображения вещественной группы Ли является либо многообразием, либо многообразием с краем.

Отметим еще одно свойство, касающееся образов всех вербальных отображений.

d) *Множество образов всех вербальных отображений счетно.*

Действительно, множество образов всех вербальных отображений бесконечно. Это непосредственно следует из существования для любой окрестности единицы U_e неединичного вербального отображения $\widetilde{w}$, для которого Im $\widetilde{w} \subset U_e$, и того факта, что Im $\widetilde{w} \neq 1$ при $w \neq 1$ ([3]). Поскольку множество всех слов счетно, мы имеем d).

3. Пусть G – свободная проконечная группа или свободная про-p-группа. Поскольку такая группа содержит свободную группу, то Im $w \neq 1$ для любого непустого слова $w \in F_n$ и его вербального отображения $\widetilde{w} : G^n \to G$. Поскольку G – компактная группа, мы здесь также имеем свойство d) (т.е. счетность множества образов). Здесь также интересен вопрос об описании возможных образов вербальных отображений.

8.5. Эквивалентность вербальных отображений. Назовем два вербальных отображения $\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2 : G^n \to G$ произвольной группы G *эквивалентными*, если Im $\widetilde{w}_1 =$ Im $\widetilde{w}_2$ (здесь $w_1, w_2 \in F_n$). Например, если G – компактная группа Ли, то все вербальные отображения, соответствующие словам $x^m, m \in Z, m \neq 0$, эквивалентны. Известно, что для любой группы G вербальные отображения $\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2$ эквивалентны, если $w_2 = \Phi(w_1)$, где $\Phi \in \mathrm{Aut}(F_n)$ ([6], Proposition 1.1). Было бы интересно получить необходимые и достаточные условия эквивалентности вербальных отображений для компактных вещественных групп Ли.

Список литературы

1. T. Bandman, G-M. Greuel, F. Grunewald, B Kunyavskii, G. Pfister and E. Plotkin, *Identities for finite solvable groups and equations in finite simple groups.* — Compositio Math. **142** (2006), 734–764.
2. T. Bandman, Yu. G. Zarhin, *Surjectivity of certain word maps on PSL(2,C) and SL(2, C).* — Eur. J. Math. **2** (2016), 614–643.
3. A. Borel, *On free subgroups of semisimple groups.* — Enseign. Math. **29** (1983), 151–164.
4. A. Borel, *Linear algebraic groups.* Second Enlarged Edition. Springer-Verlag, New York -Berlin-Heidelberg-London-Paris-Tokyo-Hong Kong -Barcelona, 1991.

5. F. Gnutov, N. Gordeev, *Recursive sequences of surjective word maps for the algebraic groups* PGL 2 *and* SL_2, Archive der Mathematik, published on-line `http://link.springer.com/article/10.1007/s00013-020-01442-7`.
6. N. Gordeev, B. Kunyavskii, E. Plotkin, *Word maps on perfect algebraic groups.* — International Journal of Algebra and Computation **28**, No. 8 (2018), 1487–1515.
7. A. Elkasapy, A. Thom, *On the length of the shortest non-trivial element in the derived and the lower central series.* — J. Group Theory **18** (2015), 793–804.
8. A. Lubotzky, *Images of word maps in finite simple groups.* — Glasg. Math. J. **56**, No. 2 (2014), 465–469.
9. A. Thom, *Convergent sequences in discrete groups.* — Canad. Math. Bull. **56** (2013), 424–433.
10. Н. Бурбаки, *Интегрирование. Меры, интегрирование мер.* М., Наука, 1967.
11. Н. Бурбаки, *Общая топология. Основные структуры.* М., Наука, 1969.
12. Н. Бурбаки, *Интегрирование. Векторное интегрирование, мера Хаара, свертка и представления.* М., Наука, 1968.
13. Н. Бурбаки, *Общая топология. Топологические группы, числа и связанные с ними группы и пространства.* М., Наука, 1969.
14. Г. Бредон, *Введение в теорию компактных групп преобразований.* М., Наука, 1980.
15. Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам.* Издание второе, исправленное. М., УРСС, 1995 г.
16. Н. Л. Гордеев, Б. Э. Кунявский, Е. Б. Плоткин, *Геометрия вербальных уравнений в простых алгебраических группах над специальными полями.* — Успехи Мат. наук **73**, No. 5 (443) (2018), 3–52.
17. Ж. Диксмье, C^* *– алгебры и их представления.* М., Наука, 1974.
18. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа.* М., Наука, 1976.
19. М. Н. Наймарк, *Теория представлений групп.* М., Наука, 1976.
20. Х. Нейман, *Многообразия групп.* М., Мир, 1969.
21. Ж.-П. Серр, *Когомологии Галуа.* М., Мир, 1968.

Gordeev N. L. On sequences of word maps of compact topological groups.

In the paper of A.Thom (A. Thom, *Convergent sequences in discrete groups*, Canad. Math. Bull. 56 (2013), 424–433) it has been proved that for any standard unitary group $\mathrm{S}U(\mathbb{C})$ (the compact form) and for any real number $\epsilon > 0$ there is a non-trivial word $w(x, y)$ on two variables such that the image of the word map $\widetilde{w} : \mathrm{S}U_n(\mathbb{C})^2 \to \mathrm{S}U_n(\mathbb{C})$ is contained in ϵ-neighbourhood of the identity of the group $\mathrm{S}U_n(\mathbb{C})$. Actually, in Thom's paper there is a construction of a sequence $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, where $w_j \in F_2$, that converges uniformly on a compact group to the identity. In this paper we propose a method for the construction of such sequences. Also, using the result of T. Bandman, G-M. Greuel, F. Grunewald, B. Kunyavskii, G.

Pfister and E. Plotkin, *Identities for finite solvable groups and equations in finite simple groups.* – Compositio Math. 142 (2006) 734-764), we construct the sequence of the surjective word maps $\widetilde{w}_j : \mathrm{S}U_2(\mathbb{C})^n \to \mathrm{S}U_2(\mathbb{C})$, where each word w_j is contained in the corresponding member F_n^j of the derived series of the free group F_n. We also make some comments and remarks which are relevant to such results and to general properties of word maps of compact groups.

Российский Государственный Педагогический
Университет им. А. И. Герцена,
наб. р. Мойки 48, С.-Петербург, 191186, Россия
E-mail: nickgordeev@mail.ru

Поступило 15 июня 2020 г.