Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 492, 2020 г.

Ф. А. Гнутов

ОБ ОБРАЗЕ ВЕРБАЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ С КОНСТАНТАМИ ПРОСТОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГРУППЫ II

Введение

В данной работе мы рассматриваем вербальное отображение с константами $\widetilde{w}_\Sigma : G^n \to G$ для простой алгебраической группы G. Здесь $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ – некоторая последовательность элементов из G; $w_\Sigma = w_1\sigma_1 \cdots w_m\sigma_m w_{m+1}$ – слово с константами, где $w_1, \ldots, w_m \in F_n$ – элементы свободной группы F_n;

$$\widetilde{w}_\Sigma(g_1, \ldots, g_n) := w_1(g_1, \ldots, g_n)\sigma_1 \cdots w_m(g_1, \ldots, g_n)\sigma_m w_{m+1}(g_1, \ldots, g_n).$$

В данной работе, как и в работе [6], мы будем также предполагать, что $\sigma_i \notin Z(G)$, где $Z(G)$ – центр группы G, и что $w_2, \ldots, w_m \neq 1$. Мы не исключаем случай постоянных слов $w_\Sigma = \sigma \in G$ и случай $\Sigma = \emptyset$, т.е. слов из F_n. Кроме того, мы рассматриваем и тривиальное слово $w_\Sigma = 1$ (здесь 1 – нейтральный элемент группы G). Таким образом, слова с константами здесь – это элементы свободного произведения $G * F_n$ без слов с элементами из центра и единичное слово.

Слова с константами вида $w_\Sigma = v_\Delta g v_\Delta^{-1}$, где v_Δ – также слово с константами, мы называем словами *C-типа* (постоянные слова $w_\Sigma = \sigma \in G$ также являются словами C-типа).

В работе [6] изучалась композиция отображений $\pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$, где $\pi : G \to T/W$ – морфизм факторизации относительно действия группы G на себе сопряжениями, T – максимальный тор, а W – группа Вейля группы G (см. [8], II, §3). Была доказана следующая теорема:

Пусть G – простая присоединенная алгебраическая группа типа A_l, D_l, E_6, E_7, E_8 и w_Σ – нетривиальное слово с константами из группы G. Множество $\operatorname{Im} \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ состоит из одной точки тогда и только тогда, когда w_Σ – слово C-типа.

Ключевые слова: вербальные отображения, вербальные отображения с константами, простые алгебраические группы.

Исследование проводились при финансовой поддержке гранта РФФИ-19-01-00297.

Отметим, что группы типов A_l, D_l, E_6, E_7, E_8 – это группы, у которых все корни соответствующей системы имеют одинаковую длину. Для таких групп не существует тождеств с константами (см. [5]), т.е. нет таких неединичных слов с константами w_Σ, для которых $\widetilde{w}_\Sigma \equiv 1$. В данной работе мы рассматриваем композиции $\pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ для групп типа B_l, C_l, F_4, G_2. Для таких групп имеются тождества с константами. Поэтому нам приходится сделать некоторые ограничения для рассматриваемых вербальных отображений с константами. Мы будем предполагать, что характеристика поля определения группы $G \neq 2, 3$. Кроме того, мы будем рассматривать слова с константами, среди которых нет полупростых и унипотентных “малых” элементов.

Определение. *Пусть G – простая алгебраическая группа, соответствующая системе корней R, и T – соответствующий максимальный тор. Элемент $g \in G \setminus Z(G)$ называется малым полупростым элементом, если он сопряжен некоторому элементу $t \in T$, для которого $\alpha(t) = 1$ для любого длинного корня $\alpha \in R$. Элемент $g \in G$ называется малым унипотентным элементом, если он сопряжен некоторому корневому элементу $x_\alpha(s)\,(s \neq 1)$ для какого-либо длинного корня α.*

В данной работе мы доказываем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть G – простая присоединенная алгебраическая группа типа B_l, C_l, F_4, G_2, определенная над полем, характеристика которого $\neq 2, 3$. Пусть далее, w_Σ – неединичное слово с константами из группы G, не содержащее среди констант малые полупростые и малые унипотентные элементы. Тогда множество $\mathrm{Im}\, \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ состоит из одной точки в том и только том случае, когда w_Σ – слово C-типа.*

§1. Терминология, обозначения, основные конструкции

1.1. Обозначения.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ – множества натуральных, целых, рациональных и комплексных чисел;

$\mathbb{Q}^{alg}, \mathbb{Z}^{alg}$ – поле всех алгебраических чисел и кольцо всех целых алгебраических чисел;

$\mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]}, \mathbb{Z}^{alg}_{[\frac{1}{d}]}$ – локализации соответствующих колец относительно мультипликативного множества $\{\frac{1}{d^k} \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ (здесь $d \in \mathbb{N}$ – фиксированное число);

F_p – простое поле характеристики p;

для поля L символ $\overline{L}$ обозначает его алгебраическое замыкание;

$\operatorname{char} L$ – характеристика поля L;

для подмножества X некоторого алгебраического многообразия символ $\overline{X}$ обозначает замыкание X в топологии Зарисского.

1.2. Присоединенная простая группа. Пусть G – простая алгебраическая группа, соответствующая системе корней R.

Здесь G отождествляется с группой точек $G(K)$ для алгебраически замкнутого поля K ($\operatorname{char} K \neq 2, 3$) бесконечной степени трансцендентности над простым подполем. Группу G мы считаем определенной и расщепимой над этим простым подполем K. В случае $\operatorname{char} K = 0$ будем считать, что $K = \mathbb{C}$. Таким образом, будем считать, что для групп над полем характеристики ноль $G = G(\mathbb{C})$ и группа G определена и расщепима над полем $\mathbb{Q}$.

Далее мы будем считать, что $Z(G) = 1$ и отождествлять $G = G(K)$ с подгруппой $\mathrm{GL}_{\mathrm{n}}(L(G))$ (здесь $L(G)$ – алгебра Ли группы G), которая соответствует образу присоединенного представления $G \to \mathrm{GL}_{\mathrm{n}}(L(G))$. Мы фиксируем базис Шевалле алгебры $L(G)$ и таким образом отождествляем группу G с подгруппой $\mathrm{GL}_{\mathrm{n}r}(K)$, где $r = \dim G$. Мы фиксируем также систему корневых подгрупп $\langle x_\alpha(t) \mid t \in K\rangle \leqslant \mathrm{GL}_{\mathrm{n}r}(K)$, где $\alpha \in R$. При $K = \mathbb{C}$ элементы матриц $x_\alpha(t)$ имеют вид zt^a для некоторых $z \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{N}$ (см. [3, 4]; [9, §3]).

1.3. Спуск в поле алгебраических чисел. Здесь мы напомним некоторые конструкции работы [6].

Пусть $G = G(\mathbb{C}) \leqslant \mathrm{GL}_{\mathrm{n}r}(\mathbb{C})$. Пусть $A = \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[a_1, \dots, a_e]$ – конечнопорожденная алгебра над полем $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$, $f : A = \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[a_1, \dots, a_e] \to \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$ – нетривиальный гомоморфизм $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$-алгебр. Тогда ему соответствует гомоморфизм групп $\widetilde{f} : G(A) \to \mathrm{GL}_{\mathrm{n}r}(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$, который получается заменой элементов матриц $a_{ij} \in A$ на $f(a_{ij})$ (здесь $G(A) := G \cap \mathrm{GL}_{\mathrm{n}r}(A)$). Положим $G_{f,A} := \widetilde{f}(G(A)) \leqslant \mathrm{GL}_{\mathrm{n}r}(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$. Тогда (см. [6]) $G_{f,A} = G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}) \leqslant G$.

1.4. Редукция по простому модулю. Пусть теперь $A = \mathbb{Z}^{\mathrm{alg}}_{[\frac{1}{d}]}$ и $\mathcal{P} \subset A$ – максимальный идеал. Тогда $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]} = p\mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]}$ для некоторого простого числа p, взаимно простого с d, и $A/\mathcal{P} = \overline{F}_p$. Естественному гомоморфизму колец $f : A \to A/\mathcal{P}$ соответствует гомоморфизм групп $\widetilde{f} : G(A) \to \mathrm{GL}_{\mathrm{n}r}(\overline{F}_p)$.

Следующая лемма является вариацией леммы 2.1 работы [6].

Лемма 2. *Для любой последовательности элементов* $\delta_1, \ldots, \delta_m \in G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$ *существует такое натуральное число* d *и такой максимальный идеал* $\mathcal{P} \subset A = \mathbb{Z}^{\mathrm{alg}}_{[\frac{1}{d}]}$*, что* $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]} = p\mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]}$*, где* $p \neq 2, 3$ *и:*

a. $\widetilde{f}(H) = G_p(\overline{F}_p)$ *для некоторой подгруппы* $H \leqslant G(A)$*;*
b. $\delta_1, \ldots, \delta_m \in H$*;*
c1. *если* $\delta_i \neq 1$ *для некоторого* i*, то* $\widetilde{f}(\delta_i) \neq 1$*;*
c2. *если* δ_i *не является малым полупростым элементом для некоторого* i*, то* $\widetilde{f}(\delta_i)$ *также не является малым полупростым элементом;*
c3. *если* δ_i *не является малым унипотентным элементом для некоторого* i*, то* $\widetilde{f}(\delta_i)$ *также не является малым унипотентным элементом в группе* $G_p(\overline{F}_p)$*;*
d. *если* $\delta_i \neq \delta_j^{-1}$ *для некоторых* $i \neq j$*, то* $\widetilde{f}(\delta_i) \neq \widetilde{f}(\delta_j^{-1})$*.*

Доказательство. В лемме 2.1. работы [6] утверждения a., b., c1., d доказаны. При этом в качестве группы H из a. берется группа

$$H := \langle x_\alpha(t) \quad | \quad \alpha \in R,\, t \in A\rangle \leqslant G(A).$$

Далее доказывается следующий факт.

Существует конечное множество целых алгебраических чисел $\varsigma_1, \ldots, \varsigma_s$ *таких, что для любого* i

$$\delta_i \in H_B := \langle x_\alpha(t) \quad | \quad \alpha \in R,\, t \in B\rangle,$$

где $B := \mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]}[\varsigma_1, \ldots, \varsigma_s]$*. При этом, существует лишь конечное число простых идеалов* $P \subset B$*, для которых неравенства вида* $\delta_i \neq 1$*,* $\delta_i \neq \delta_j^{-1}$ *не сохранялись бы в группе* $\widetilde{f}(H_B) \leqslant \mathrm{GL}_{\mathrm{n}r}(B/P)$ *хотя бы для одного* i*.*

Отметим, что B – это конечнопорожденый $\mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]}$-модуль, $P \cap \mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]} = p\mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]}$ для некоторого простого числа p. Поэтому достаточно показать, что c2., c3. также выполняются для бесконечного числа простых идеалов $P \subset B$. Это, в частности, позволит выбрать подходящий простой идеал, не лежащий в B над $p = 2, 3$.

c2. Пусть $\delta_i \in H_B$ не является полупростым малым элементом. Пусть $\delta_i = \delta_{is}\delta_{iu}$ – разложение Жордана элемента δ_i в группе $G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$. Ввиду свойства b. (доказанного в лемме 2.1. работы [6]) мы можем предполагать, что любая конечная последовательность элементов группы $G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$ содержится в подгруппе $H_B \leqslant G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$ для подходящего кольца целых алгебраических чисел B. Поэтому будем считать, что $\delta_{is}, \delta_{iu} \in H_B$ для любого i. Предположим, что $\delta_{iu} \neq 1$. Напомним, что любой элемент группы $H_B \leqslant \mathrm{GL}_{nr}(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$ – это матрица с коэффициентами из кольца B. Так как существует лишь конечное число простых идеалов кольца B, которые содержат все неединичные элементы матрицы δ_{iu} (возможно, таких простых идеалов не существует), то для бесконечного множества простых идеалов $P \subset B$ имеем $\delta_{iu} \neq 1(\mathrm{mod}\ P)$ (здесь $\delta_{iu}(\mathrm{mod}\ P)$ – это образ $\widetilde{f}(\delta_{iu})$ соответствующего отображения $\widetilde{f} : H \to G(\overline{F}_p)$). Таким образом, существует бесконечное множество простых идеалов $P \subset B$, для которых $\delta_i(\mathrm{mod}\ P)$ не является полупростым элементом. Предположим, что $\delta_{iu} = 1$. Поскольку $\delta_i = \delta_{is}$ полупростой, но не малый элемент, существует такой длинный корень $\alpha \in R$, что $[\delta_i, x_\alpha(s)] = x_\alpha(s') \neq 1$ (мы можем считать, $\delta_i \in T$). Здесь мы также имеем бесконечное множество простых идеалов $P \subset B$ таких, что $[\delta_i, x_\alpha(s)] \neq 1(\mathrm{mod}\ P)$ и для них мы получим не малый элемент $\delta_i(\mathrm{mod}\ P)$.

c3. Пусть $\delta_i = \delta_{is}\delta_{iu}$ – разложение Жордана элемента δ_i. Если $\delta_{is} \neq 1$, то можно выбрать идеал P, для которого $\delta_{is} \neq 1(\mathrm{mod}\ P)$ (так же, как и для случая c1.). Тогда $\delta_{is} \neq 1(\mathrm{mod}\ P)$ – не унипотентный элемент. Пусть

$$\delta_i = \delta_{iu} = \prod_{k=1}^{l} x_{\alpha_k}(s_k)$$

– разложение в произведение корневых элементов. Поскольку δ_i не является длинным корневым элементом, то либо $l > 1$, либо $\delta_i = x_\alpha(s)$ – корневой элемент, соответствующий короткому корню $\alpha \in R$. Так же, как и выше, найдется бесконечное множество простых идеалов P, для которых в разложении $\delta_i = \delta_{iu}(\mathrm{mod}\ P)$ в группе $G(\overline{F}_p)$ в произведение корневых элементов число сомножителей будет больше, чем 1, или δ_i – корневой элемент, соответствующий короткому корню. □

1.5. Тождества с константами. Пусть $w_\Sigma = w_\Sigma(x_1, \ldots, x_n) \neq g \in G$ – непостоянное слово с константами (напомним, что в слове с константами w_Σ мы предполагаем, что в множестве констант Σ нет элементов из центра). Слово w_Σ называется *тождеством с константами на группе* G, если $\widetilde{w}_\Sigma : G^n \to G$ – единичное отображение (т.е. $\widetilde{w}_\Sigma(g_1, \ldots, g_n) = 1$ для любой последовательности $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$)). Напомним ([6]), что вербальное отображение с константами $\widetilde{w}_\Sigma : G^n \to G$ называется *постоянным*, если $\widetilde{w}_\Sigma(g_1, \ldots, g_n) = g$ для некоторого фиксированного элемента $g \in G$ и любой последовательности $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$. В работе [6] показано, что

для группы G существует непостоянное слово с константами w_Σ, для которого $\widetilde{w}_\Sigma$ – постоянное отображение тогда и только тогда, когда существуют тождества с константами на G.

Если G – простая алгебраическая группа, то тождество с константами существует тогда и только тогда, когда в соответствующей системе корней R имеются корни разной длины, т.е. для $R = B_l, C_l, F_4, G_2$ (см. [5]). Таким образом, простые алгебраические группы типов A_l, D_l, E_6, E_7, E_8 не имеют тождеств с константами. Более того, при $\operatorname{char} K \neq 2, 3$ имеет место следующее утверждение ([5, Теорема 2]).

Если непостоянное слово с константами определяет тождество с константами на простой алгебраической группе, то среди констант имеются и малые полупростые элементы и малые унипотентные элементы.

1.6. Слова с константами в группах без центра. Для любой группы G с тривиальным центром имеет место следующее утверждение (см. [6]).

Условия симметрии для слов C-типа. Слово с константами

$$w_\Sigma = w_1\sigma_1 w_2\sigma_2 \cdots w_m\sigma_m w_{m+1} \tag{1.1}$$

является словом C-типа тогда и только тогда, когда $m = 2k - 1$,

$$w_1 = w_{m+1}^{-1}, w_2 = w_m^{-1}, \ldots, w_i = w_{m+2-i}^{-1}, \ldots, w_k = w_{k+1}^{-1} \tag{1.2}$$

и если $m > 1$, то

$$\sigma_1 = \sigma_m^{-1}, \sigma_2 = \sigma_{m-1}^{-1}, \ldots, \sigma_i = \sigma_{m+1-i}^{-1}, \ldots, \sigma_{k-1} = \sigma_{k+1}^{-1}. \tag{1.3}$$

Предложение 3. *Слово с константами w_Σ не является словом C-типа тогда и только тогда, когда оно сопряжено в $G * F_n$ со словом вида*

$$\gamma_1\omega_1(x_1, \ldots, x_n) \cdots \gamma_l\omega_l(x_1, \ldots, x_n), \tag{1.4}$$

где $l \in \mathbb{N}$ и $\gamma_i \neq 1, 1 \neq \omega_i \in F_n$. Если, при этом, среди констант слова w_Σ не было ни малых полупростых элементов, ни малых унипотентных элементов, то и среди констант слова (1.4) только γ_1 может быть либо малым полупростым элементом, либо малым унипотентным элементом.

Доказательство. Сопрягая слово с константами с подходящими элементами групп F_n и G, получим либо $g \in G$, либо слово вида (1.4). При этом, если w_Σ не является словом C-типа, то либо

$$\begin{aligned} w_\Sigma = & w_1\sigma_1 w_2\sigma_2 \cdots w_{i_*}\sigma_{i_*} w_{i_*+1}\sigma_{i_*+1}\cdots \\ & w_{m+2-(i_*+1)} \underbrace{\sigma_{m+1-i_*}}_{\neq \sigma_{i_*}^{-1}} w_{i_*}^{-1}\cdots\sigma_2^{-1}w_2^{-1}\sigma_1^{-1}w_1^{-1}, \end{aligned}$$

для некоторого i_*, либо

$$\begin{aligned} w_\Sigma = & w_1\sigma_1 w_2\sigma_2 \cdots w_{i_*}\sigma_{i_*} w_{i_*+1}\sigma_{i_*+1}\cdots \\ & w_{m-i_*}\sigma_{m+1-i_*} \underbrace{w_{m+2-i_*}}_{\neq w_{i_*}^{-1}} \cdots\sigma_2^{-1}w_2^{-1}\sigma_1^{-1}w_1^{-1}. \end{aligned}$$

В первом случае

$$\gamma_1 = \sigma_{m+1-i_*}\sigma_{i_*}, \omega_1 = w_{i_*+1}, \gamma_2 = \sigma_{i^*+1}, \ldots, \gamma_l = \sigma_{i^*+l-1}, \omega_l = w_{m+2-(i_*+1)},$$

т.е. все константы γ_i, кроме γ_1, – это константы слова w_Σ, а γ_1 может стать малым полупростым или унипотентным элементом. Во втором случае любая константа нового слова являются также и константой слова w_Σ, а значит, в этом случае и у нового слова (1.4) нет константы, являющейся малым полупростым или унипотентным элементом. $\square$

Предложение 4. *Пусть G – присоединенная простая алгебраическая группа типа B_l, C_l, F_4, G_2 и пусть w_Σ – непостоянное слово с константами и $\widetilde{w}_\Sigma : G^n \to G$ соответствующее вербальное отображение с константами. Предположим, что*

- a) *среди констант Σ нет малых полупростых и малых унипотентных элементов*;
- b) *существует такое натуральное число k, что $(\widetilde{w}_\Sigma((g_1, \ldots, g_k)))^k = 1$ для любой последовательности $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$.*

Тогда w_Σ – слово C-типа.

Доказательство. Предположим, что w_Σ не является словом C-типа. Ввиду предложения 3 можно считать, что

$$w_\Sigma = \sigma_1 w_1 \sigma_2 w_2 \cdots \sigma_l w_l,$$

где $l \in \mathbb{N}$ и $\sigma_i \neq 1, 1 \neq \omega_i \in F_n$ и, кроме σ_1, все константы не являются ни малыми полупростыми элементами, ни малыми унипотентными элементами. Элемент $\widetilde{w}_\Sigma^k$ является тождеством на группе G. Поскольку слово

$$(w_\Sigma)^k = (\sigma_1 w_1 \cdots \sigma_l w_l)(\sigma_1 w_1 \cdots \sigma_l w_l) \cdots (\sigma_1 w_1 \cdots \sigma_l w_l)$$

не содержит одновременно константы, являющиеся малыми полупростыми и малыми унипотентными элементами, то $(w_\Sigma)^k$ не является тождеством. Кроме того, $(w_\Sigma)^k \neq 1$, поскольку $\sigma_1 \neq 1, w_1 \neq 1$. Получили противоречие с условием предложения. Следовательно, w_Σ – слово C-типа. □

§2. Редукция к полю алгебраических чисел.

Пусть $G = G(\mathbb{C})$ – простая присоединенная алгебраическая группа, определенная над $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$. В работе [6] вопрос о том, является ли слово с константами w_Σ словом C-типа, сведен к аналогичному вопросу для некоторого слова с константами w_Δ группы $G(\overline{F}_p)$ и некоторого простого p. А именно, пусть $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\} \subset G \leqslant \mathrm{GL}_{\mathrm{n}r}(\mathbb{C})$,

$$\sigma_j = \begin{pmatrix} s(j)_{11} & s(j)_{12} & \cdots & s(j)_{1r} \\ s(j)_{21} & s(j)_{22} & \cdots & s(j)_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s(j)_{r1} & s(j)_{r2} & \cdots & s(j)_{rr} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{\mathrm{n}r}(\mathbb{C}), \tag{2.1}$$

и пусть

$$S_j := \{s(j)_{pq} \ \mid \ s(j)_{pq} - \text{трансцендентное число}\}, \ \ S_\Sigma = \bigcup_{j=1}^{m} S_j.$$

Таким образом, S_Σ – это множество всех трансцендентных элементов матриц, соответствующих всем константам σ_j. Так как $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[S_\Sigma] \subset \mathbb{C}$ – конечнопорожденная алгебра над $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$, то существует аффинное многообразие M_Σ, определенное над $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$, такое, что $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[\mathrm{M}_\Sigma] \approx \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[S_\Sigma]$. Это многообразие называем *многообразием констант*. Так как $A := \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[\mathrm{M}_\Sigma] \approx \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[S_\Sigma] \subset \mathbb{C}$, то многообразие неприводимо, и если $S_\Sigma \neq \emptyset$, то $\dim \mathrm{M}_\Sigma > 0$.

Пусть $t \in \mathrm{M}_\Sigma$ – $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$-точка, и пусть $\Upsilon_\Sigma^t : \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[\mathrm{M}_\Sigma] \approx \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[S_\Sigma] \to \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$ – эпиморфизм аффинной алгебры многообразия M_Σ в ее поле вычетов, соответствующий точке $t \in \mathrm{M}_\Sigma$. Гомоморфизм Υ_Σ^t продолжается до гомоморфизма групп точек (см. пункт 1.3)

$$\widetilde{\Upsilon}_\Sigma^t : G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[S_\Sigma]) \to G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}). \tag{2.2}$$

Заметим, что все константы σ_j содержатся в подгруппе $G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[S_\Sigma])$, поскольку все элементы матриц (2.1) содержатся в алгебре $Q^{\mathrm{alg}}[S_\Sigma]$.

Положим

$$\mathrm{M}'_\Sigma := \{t \in \mathrm{M}_\Sigma \;\mid\; \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_j) \text{ -- или малый унипотентный элемент,}$$
$$\text{или } \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_j) = 1 \text{ для некоторого } j = 1, \ldots, m\},$$
$$\mathrm{M}''_\Sigma := \{t \in \mathrm{M}_\Sigma \;\mid\; \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_{i_*}) = \delta_{i_*} = \delta^{-1}_{m+1-i_*} = \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_{m+1-i_*})\},$$

где

$$i_* := \min\{l = 1, \ldots, [\frac{m-1}{2}] \;\mid\; \sigma_l \neq \sigma^{-1}_{m+1-l}\}.$$
$$\mathrm{M}'''_\Sigma := \{t \in \mathrm{M}_\Sigma \;\mid\; \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_j) \text{ -- малый полупростой}$$
$$\text{элемент для некоторого } j = 1, \ldots, m\}.$$

Лемма 5. *Множества* $\mathrm{M}'_\Sigma, \mathrm{M}''_\Sigma, \mathrm{M}'''_\Sigma$ *– это замкнутые алгебраические подмножества в многообразии* M_Σ*, определенные над полем* $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} \subset G$ – многообразие унипотентных элементов (см. [4], 1.5). Для полей характеристики ноль множество

$$\mathcal{U}_1 := \{g x_\alpha(s) g^{-1} \;\mid\; \alpha - \text{ длинный корень } s \in \mathbb{C}\}$$

замкнуто в $\mathcal{U}$ (см. [4], 13.4), а значит, и в G. Кроме того, $\mathcal{U}_1$ – это множество, определенное над полем $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$.

Далее, существует лишь конечное число классов сопряженных элементов в группе G, являющихся малыми полупростыми элементами (см. [5]). Поскольку любой полупростой класс сопряженных элементов – это замкнутое множество (см. [8]), все малые полупростые элементы составляют замкнутое подмножество $\mathcal{S}$ в группе G. Кроме того, $\mathcal{S}$ – это множество, определенное над полем $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$, так как представитель любого класса сопряженных малого полупростого элемента содержится в группе $G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$ (см. [5]).

Условия $\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_j) \in \mathcal{U}_1, \mathcal{S}$ определяют алгебраические соотношения (над $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$) для элементов матриц $\{\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_j)\}$, где $t \in \mathrm{M}_\Sigma$, которые, в свою очередь, определяют замкнутые подмножества $\mathrm{M}'_\Sigma, \mathrm{M}'''_\Sigma$. При этом $\mathrm{M}'_\Sigma, \mathrm{M}'''_\Sigma$ определены над полем $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$.

Утверждение леммы для M''_Σ очевидно. □

Следующая лемма является вариацией леммы 3.1 работы [6],

Лемма 6. *Предположим, что*

i. $w_\Sigma = w_1\sigma_1 w_2\sigma_2 \cdots w_m\sigma_m w_{m+1}$ *не является словом C-типа;*

ii. *в множестве* Σ *нет малых полупростых элементов;*
iii. *в множестве* Σ *нет малых унипотентных элементов.*

Тогда существует такая точка $t \in \mathrm{M}_\Sigma(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$, *что для последовательности*

$$\Delta := \{\delta_1 = \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_1), \delta_2 = \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_2), \ldots, \delta_m = \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_m)\}$$

выполнены следующие условия:

*i.** *слово с константами*

$$w_\Delta = w_1\delta_1 w_2\delta_2 \cdots w_m\delta_m w_{m+1}$$

не является словом C*-типа;*
*ii.** *в множестве* Δ *нет малых полупростых элементов;*
*iii.** *в множестве* Δ *нет малых унипотентных элементов.*

Доказательство. Предположим, что для исходного слова не выполнены условия симметрии (1.2). Тогда условие

$$t \in \mathrm{M}_\Sigma \setminus (\mathrm{M}'_\Sigma \cup M'''_\Sigma)$$

является достаточным для выполнения $i.^*, ii.^*, iii.^*$ (это следует из определения $\mathrm{M}'_\Sigma, M'''_\Sigma$ и $i., ii., iii.$).

Предположим, что для исходного слова w_Σ выполнены условия (1.2). Тогда условие

$$t \in \mathrm{M}_\Sigma \setminus (\mathrm{M}'_\Sigma \cup \mathrm{M}''_\Sigma \cup M'''_\Sigma)$$

является достаточным для выполнения $i.^*, ii.^*, iii.^*$ (это следует из определения $\mathrm{M}'_\Sigma, M''_\Sigma, M'''_\Sigma$ и $i., ii., iii.$).

Ввиду леммы 5 множество $\mathrm{M}_\Sigma \setminus (\mathrm{M}'_\Sigma \cup M'''_\Sigma)$ в первом случае, а также множество $\mathrm{M}_\Sigma \setminus (\mathrm{M}'_\Sigma \cup \mathrm{M}''_\Sigma \cup M'''_\Sigma)$ во втором случае являются открытыми. Кроме того, они не пусты, поскольку в этом множестве заведомо содержится точка t с трансцендентными координатами, соответствующая первоначальному набору констант Σ. Поскольку многообразие M_Σ определено над $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$, множество $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$-точек $\mathrm{M}_\Sigma(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$ плотно в M_Σ ([2], A.G. 13.3), а значит, множество $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$-точек плотно в $\mathrm{M}_\Sigma \setminus (\mathrm{M}'_\Sigma \cup M'''_\Sigma)$ в первом случае и в $\mathrm{M}_\Sigma \setminus (\mathrm{M}'_\Sigma \cup \mathrm{M}''_\Sigma \cup M'''_\Sigma)$ во втором случае. Следовательно существует точка $t \in \mathrm{M}_\Sigma(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$, для которой выполнены условия $i.^*, ii.^*, iii.^*$. $\square$

2.1. Случай $\mathrm{char}\, \mathbf{K} = \mathbf{p} \neq \mathbf{2, 3}$. Если $G = G(K)$ – группа над полем K характеристики p, мы можем также построить многообразие M_Σ, заменяя $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$ на поле $\overline{F}_p$, а трансцендентные числа в элементах матриц в (2.1) на трансцендентные элементы над полем $\overline{F}_p$. Поскольку $\mathrm{char}\, K \neq 2, 3$, то утверждения о многообразиях $\mathcal{U}_1, \mathcal{S}$ также имеют место и в данном случае (см. [5]).

Аналогично получим точку $t \in \mathrm{M}_\Sigma$, для которой гомоморфизм

$$\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma : G(\overline{F}_p[\mathrm{M}_\Sigma]) \to G(\overline{F}_p)$$

удовлетворяет условиям леммы 6.

§3. Доказательство теоремы 1

Теперь мы можем доказать теорему 1 (аналогичную теореме 1 работы [6]).

Доказательство. Случай $\mathrm{char}\, K = 0$. Здесь $G = G(\mathbb{C})$.

Пусть $w_\Sigma \in G * F_n$ – слово, не являющееся словом C-типа и не содержащее в качестве констант малых полупростых и малых унипотентных элементов. Следовательно, отображение $\widetilde{w}_\Sigma$ не является тождеством, а значит, $\dim \overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma} \geqslant 1$. Предположим, что $\dim \overline{\mathrm{Im}\, \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma} = 0$. Тогда для любой последовательности $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ имеет место

$$w_\Sigma(g_1, \ldots, g_n) = h g_s u h^{-1}, \tag{3.1}$$

где g_s – зафиксированный полупростой элемент группы G, u – некоторый унипотентный элементе, коммутирующий с g_s и $h \in G$. Пусть $A := \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[a_1, \ldots, a_k]$ – конечнопорожденная алгебра, содержащая все трансцендентные элементы матриц $\sigma_i \in \mathrm{GL}_{nr}(\mathbb{C})$ и $g_s \in \mathrm{GL}_{nr}(\mathbb{C})$. Существует эпиморфизм $\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma : G(A) \to G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$ такой, что для последовательности $\Delta = \{\delta_1 = \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_1), \ldots, \delta_m = \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_m)\}$ соответствующее слово $w_\Delta = w_1 \delta_1 w_2 \delta_2 \cdots w_m \delta_m w_{m+1}$ также не является словом C-типа в $G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}) * F_n$ и не содержит в качестве констант одновременно малые полупростые и малые унипотентные элементы (лемма 6). Для любой последовательности $(g_1, \ldots, g_n) \in G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})^n$ из (3.1) следует

$$\pi(\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(w_\Sigma(g_1, \ldots, g_n))) = \pi(\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(g_s)).$$

Поэтому элемент $\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(w_\Sigma(g_1, \ldots, g_n)) = w_\Delta(g_1, \ldots, g_n)$ сопряжен в группе $G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$ некоторому элементу, полупростая часть которого равна полупростой части $\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(g_s)_s$ элемента $\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(g_s)$. Таким образом, имеет место равенство

$$\widetilde{w}_\Delta(g_1,\ldots,g_n) = h'\underbrace{\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(g_s)_s}_{:=\delta^*}u'h'^{-1} = h'\delta^* u'h'^{-1} \tag{3.2}$$

при некотором $h' \in G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$ и некотором унипотентном элементе $u' \in G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$, коммутирующем с $\delta^* = \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(g_s)_s$.

Далее (см. 1.4), существует такое кольцо $A := \mathbb{Z}^{\mathrm{alg}}_{\frac{1}{d}}$, что для соответствующего эпиморфизма $\widetilde{f} : G(A) \to \mathrm{GL}_{\mathrm{n}r}(\overline{F}_p)$ последовательность $\bar{\Delta} = \{\bar{\delta}_1 = \widetilde{f}(\delta_1),\ldots,\bar{\delta}_m = \widetilde{f}(\delta_m)\}$ удовлетворяет условию леммы 2, а значит,

$$w_{\bar{\Delta}} = w_1\bar{\delta}_1 w_2\bar{\delta}_2\cdots w_m\bar{\delta}_m w_{m+1}$$

не является словом C-типа в $G_p(\overline{F}_p) * F_n$ и и не содержит в качестве констант одновременно и малые полупростые и малые унипотентные элементы. Для любой последовательности $(g_1,\ldots,g_n) \in G_p(\overline{F}_p)^n$ элемент $w_{\bar{\Delta}}(g_1,\ldots,g_n)$ сопряжен некоторому элементу, полупростая часть которого совпадает с полупростой частью $(\overline{\delta^*})_s$ элемента $\overline{\delta^*}$ (это следует из (3.2), см. [6]). Таким образом,

$$w_{\bar{\Delta}}(g_1,\ldots,g_n) = h''(\overline{\delta^*})_s u''h''^{-1} \tag{3.3}$$

при некотором $h'' \in G_p(\overline{F}_p)$ и некотором унипотентном элементе $u'' \in G_p(\overline{F}_p)$, коммутирующем с $(\overline{\delta^*})_s$.

Пусть c – это порядок элемента $(\overline{\delta^*})_s$ в группе $G_p(\overline{F}_p)$. Из (3.3) получаем, что

$$(w_{\bar{\Delta}}(g_1,\ldots,g_n))^{cq} = h''(\overline{\delta^*})^{cq}_s u''^{cq}h''^{-1} = 1$$

для любой последовательности $(g_1,\ldots,g_n) \in G(\overline{F}_p)$ и фиксированного $q = p^a$. Следовательно, $\widetilde{w}^{cq}_{\bar{\Delta}} \equiv 1$ – тождество с константами на группе $G(\overline{F}_p)$, и ввиду предложения 4 слово $w_{\bar{\Delta}}$ должно быть словом C-типа. Противоречие. Таким образом,

$$\dim \mathrm{Im}\, \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma \geqslant 1.$$

3.1. Случай $\mathbf{char\,K = p > 0}$. Аналогично случаю $\mathrm{char}K = 0$ мы можем редуцировать задачу к случаю слов с константами для группы $G(\overline{F}_p)$, для которой доказательство будет повторять доказательство, проделанное выше для $G_p(\overline{F}_p)$. □

§4. Простые алгебраические группы с нетривиальным центром

Пусть G – простая алгебраическая группа с нетривиальным центром $Z(G)$ и $\Phi : G * F_n \to G/Z(G) * F_n$ – естественный эпиморфизм, $\operatorname{Ker}\Phi =: \mathcal{Z}(G, F_n)$ и

$$w_\Sigma = w_1\sigma_1 \cdots w_m\sigma_m w_{m+1}$$

– неединичное слово с константами из группы G. Тогда (см. [6, предложение 3.3])

$$\begin{gathered}\Phi(w_\Sigma) - \text{слово} \quad C\text{-типа} \Leftrightarrow w_\Sigma = w_\Delta\omega,\\ \text{где} \quad w_\Delta - \text{слово} \quad C\text{-типа и} \quad \omega \in \mathcal{Z}(G, F_n).\end{gathered}$$

Отметим, что полупростой нецентральный элемент σ группы G является малым тогда и только тогда, когда его образ в присоединенной группе $G/Z(G)$ является малым. Кроме того, элемент u присоединеной группы $G/Z(G)$ является малым унипотентным элементом тогда и только тогда, когда любой его прообраз в группе G имеет вид zu', где u' –малый унипотентный элемент группы G, а $z \in Z(G)$. Элемент группы G, имеющий вид zu', где u' –малый унипотентный элемент группы G, а $z \in Z(G)$, будем называть *малым почти унипотентным элементом.*

Таким образом, из теоремы 1 получаем

Теорема 1$'$. *Пусть G – простая алгебраическая группа типа B_l, C_l, F_4, G_2, определенная над полем характеристики $\neq 2, 3$. Пусть далее, w_Σ – слово с константами из группы G, не содержащее среди констант малые полупростые и малые почти унипотентные элементы. Множество $\operatorname{Im}\, \pi\circ\widetilde{w}_\Sigma$ состоит из одной точки тогда и только тогда, когда $w_\Sigma = w_\Delta\omega$, где w_Δ – слово C-типа, а $\omega \in \mathcal{Z}(G, F_n)$.*

§5. Оценки размерности образов вербальных отображений с константами

Пусть G – простая алгебраическая группа, $\widetilde{w}_\Sigma : G^n \to G$ – вербальное отображение с констатнами. Тогда $\overline{\operatorname{Im}\, \widetilde{w}_\Sigma}$ – это замкнутое неприводимое подмножество группы G, в котором содержится открытое в $\overline{\operatorname{Im}\, \widetilde{w}_\Sigma}$ подмножество $\mathcal{X} \subset \operatorname{Im}\, \widetilde{w}_\Sigma$. Положим

$$\dim \operatorname{Im}\, \widetilde{w}_\Sigma := \dim \overline{\operatorname{Im}\, \widetilde{w}_\Sigma}.$$

В этом параграфе мы описываем некоторые характеристики образа $\operatorname{Im}\widetilde{w}_\Sigma$, а также даем оценки $\dim \operatorname{Im}\widetilde{w}_\Sigma$ некоторых типов отображений $\widetilde{w}_\Sigma$.

В работе [7] показано, что вербальное отображение с константами $\widetilde{w}_\Sigma : G^n \to G$ простой алгебраической группы G доминантно (т.е. $\dim \operatorname{Im}\widetilde{w}_\Sigma = \dim G$) для любого набора констант $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ из некоторого открытого множества $\mathcal{U} \subset G^m$ при условии

$$w_1 w_2 \cdots w_{m+1} \neq 1. \tag{5.1}$$

Очевидно, что если условие (5.1) не выполняется, то отображение $\widetilde{w}_\Sigma$ может быть не доминантным. Например, для слова с константами $w_\Sigma = x\sigma x^{-1}$ образ соответствующего вербального отображения – это класс сопряженных элемента σ.

Замечание 7. *Образ отображения слова C-типа $w_\Sigma = v_\Delta \sigma w_\Delta^{-1}$ содержится в классе сопряженных C_σ элемента σ, но может быть значительно меньше. Пусть, например, $\sigma \in G = \mathrm{SL}_n(K)$ – регулярный полупростой элемент и*

$$w_\Sigma = xux^{-1}\sigma x u^{-1} x^{-1},$$

где u – корневой элемент. Образ отображения $\widetilde{w}_\Delta : G \to G$, где $w_\Delta = xux^{-1}$, это класс сопряженных длинного корневого элемента. Следовательно, $\dim \operatorname{Im}\widetilde{w}_\Delta = 2(n-1)$. *Поскольку среди элементов класса сопряженных C_u элемента u нет элементов, коммутирующих с полупростым регулярным элементом σ,*

$$\dim \operatorname{Im}\widetilde{w}_\Sigma = \dim \widetilde{w}_\Delta = 2(n-1) \ll \dim C_g = n(n-1) \ \textit{при}\ n \gg 1.$$

Также в работе [7] (Theorem 1.6) показано, что существует непустое открытое подмножество $\mathcal{V} \subset T$ максимального тора T такое, что для любого $t \in \mathcal{V}$ отображение $\pi \circ \widetilde{w}_\Sigma : G^n \to T/W$ доминантно, где

$$w_\Sigma = w_1 t^{k_1} w_2 t^{k_2} \cdots w_m t^{k_m} w_{m+1} \ \text{при} \ \sum_{i=1}^{m} k_i = 0.$$

Отсюда получаем

Предложение 8. *Пусть G – простая алгебраическая группа, $w_1, \dots, w_{m+1} \in F_n, w_2 \neq 1, m > 1$. Тогда существует такое непустое открытое подмножество $\mathcal{U} \subset G^n$, что для любой последовательности $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in \mathcal{U}$ отображение $\pi \circ w_\Sigma : G^n \to T/W$, где $w_\Sigma = w_1\sigma_1 w_2 \sigma\sigma_2 \cdots w_m \sigma_m w_{m+1}$, доминантно.*

Доказательство. В [7] (теорема 1.1) показано, что образ $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma$ вербального отображения $\widetilde{w}_\Sigma : G^n \to G$ имеет одну и ту же размерность $\mathfrak{d}$ для всех наборов констант $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$, содержащихся в некотором открытом подмножестве $\mathcal{U} \subset G^m$, и для всех остальных наборов $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \in G^m$ имеет место неравенство $\dim\ \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma \leqslant \mathfrak{d}$. Те же рассуждения переносятся и для отображения $\pi \circ w_\Sigma$. Таким образом, если имеется один набор $\sigma_1 = t^{k_1}, \ldots, \sigma_m = t^{k_m}$ для $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i = 0$, при котором $\dim\ \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma = \dim\ T/W$, то и для всех наборов констант $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$, содержащихся в некотором открытом подмножестве $\mathcal{U} \subset G^m$, имеет место $\dim\ \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma = \dim\ T/W$. $\square$

Замечание 9. *Условие $m > 1$ существенно, поскольку для $w_\Sigma = w\sigma w^{-1}$ образ отображения $\mathrm{Im}\ \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ – одна точка. Также существенным является независимость в выборе констант $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$. Скажем, для $w_\Sigma = w_1\sigma_1 w_2 \sigma_2 w_2^{-1} \sigma_1^{-1} w_1^{-1}$ образ отображения $\mathrm{Im}\ \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ – также одна точка.*

Таким образом, для “общего” набора констант $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ образ отображения $\pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ доминантен, а значит, в этом образе содержатся представители “почти всех” регулярных полупростых элементов. Для некоторых типов групп мы ниже приводим более точный результат.

5.1. Группы ранга один. Здесь K – алгебраически замкнутое поле.

Предложение 10. *Пусть $G = \mathrm{SL}_2(K)$ и пусть $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ – подмножество нецентральных элементов группы G таких, что $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ для любых i, j. Пусть далее, $\widetilde{w}_\Sigma : G^n \to G$ – непостоянное вербальное отображение с константами Σ. Тогда $\dim \overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma} \geqslant 2$.*

Доказательство. Пусть T, W, U – фиксированный одномерный тор, группа Вейля и унипотентный радикал фиксированной подгруппы Бореля группы G. Можно считать, что $G = \mathrm{SL}_2(K)$, а все константы $\sigma_i \in H$, где $H = T$ или $H = Z(G)U$. Пусть w_Σ не является словом типа $w_\Delta \omega$, где w_Δ – слово C-типа, а $\omega \in \mathcal{Z}(G, F_n)$. Тогда ([6, теорема 2])

$$\dim \mathrm{Im}\ \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma = 1. \tag{5.2}$$

Покажем, что существует непустое открытое подмножество $\mathcal{V} \subset \overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma}$ такое, что $\mathcal{V} \cap H = \emptyset$. Действительно, если для любого непустого открытого подмножества $\mathcal{V}' \subset \overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma}$ имеет место $\mathcal{V}' \cap H \neq \emptyset$, то $\overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma} \subset H$. Далее, существует элемент $h \in H$, для которого

$\omega_{\Sigma'} := [w_\Sigma, h]$ – непостоянное слово с константами (достаточно взять $h \neq 1, \pm\sigma_1^{-1}$), для которого, в свою очередь, $\widetilde{\omega}_{\Sigma'} : G^n \to G$ – отображение, тождественно равное единице. Но на группе типа A_1 не существуют тождества, а значит, получили противоречие.

Рассмотрим теперь $\pi_\Sigma : \overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma} \to A^1_K \approx T/W$ – ограничение отображения факторизации $\pi : G \to A^1_K \approx T/W$ на замкнутое подмножество $\overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma}$. Так как все константы слова w_Σ содержатся в группе H, то множество $\overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma}$ является инвариантным относительно сопряжения элементами группы H. Далее, для любого $g \in \overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma}$ подмножество $\{hgh^{-1} \mid h \in H\} \subset \overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma}$ содержится в слое отображения π_Σ. Кроме того, для $g \in \mathcal{V}$ размерность множества $\overline{\{hgh^{-1} \mid h \in H\}}$ равна 1, поскольку $g \notin H$. Таким образом, размерность слоя отображения π_Σ не меньше 1 для некоторого открытого множества в T/W. Теперь наше неравенство вытекает из (5.2)

Пусть $w_\Sigma = w_\Delta \omega$, где w_Δ – слово C-типа, а $\omega \in \mathcal{Z}(G, F_n)$. Слово hw_Σ, где $h\sigma_1 \neq \pm 1, \pm\sigma_m^{-1}$, уже не представимо в виде произведения слова C-типа и слова из $\mathcal{Z}(G, F_n)$, а значит, ввиду уже доказанного

$$\dim\ \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma = \dim \mathrm{Im}\ h\widetilde{w}_\Sigma \geqslant 2. \qquad \square$$

Замечание 11. *Аналогичный результат можно получить и для группы $G = \mathrm{PGL}_2(K)$, если заменить условие коммутирования констант условием их принадлежности одному и тому же тору T или унипотентной группе U.*

5.2. Группы типов $\mathbf{B_r}, \mathbf{C_r}, \mathbf{D_{2r}}, \mathbf{E_7}, \mathbf{E_8}, \mathbf{F_4}, \mathbf{G_2}$. Простые алгебраические группы содержат полупростые подгруппы того же лиевского ранга, что и сами группы, и при этом все компоненты этих подгрупп являются группами типа A_r (см. [1]). Это позволяет в некоторых случаях описывать образы вербальных отображений $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}$, используя соответствующие результаты для групп типа A_r. В частности, для группы типа $B_r, C_r, D_{2r}, E_7, E_8, F_4, G_2$ доказано(см. [7, теорема 2.8]), что образ любого нетривиального вербального отображения $\widetilde{w} : G^m \to G$ содержит все регулярные полупростые элементы группы G. Для этих же групп и вербальных отображений с константами мы можем доказать аналогичный результат, однако, при некотором дополнительном предположении. Напомним, что для группы G с тривиальным центром слово с константами, не являющееся словом C-типа, сопряжено в группе $G * F_n$ со словом вида

$$w_\Sigma = \sigma_1 w_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m w_m, \tag{5.3}$$

где $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\} \subset G$ – подмножество нецентральных элементов, $w_i \in F_n, w_i \neq 1$. Ниже мы будем рассматривать слова вида (5.3), не предполагая тривиальность центра.

Предложение 12. *Пусть G – простая алгебраическая группа типа $B_r, C_r, D_{2r}, E_7, E_8, F_4, G_2$, и пусть $T \leqslant G$ – зафиксированный максимальный тор. Далее, пусть w_Σ – слово вида* (5.3)*, где $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\} \subset T$ – некоторое множество регулярных элементов. Тогда образ $\operatorname{Im} \widetilde{w}_\Sigma$ вербального отображения $\widetilde{w}_\Sigma : G^n \to G$ пересекает любой класс полупростых регулярных сопряженных элементов группы G.*

Доказательство. Для групп указанных типов существует подгруппа

$$\Gamma = \prod_{i=1}^{l} \Gamma_i, \ \ \Gamma_i \approx \mathrm{SL}_2(K) \text{ или } \mathrm{PGL}_2(K),$$

где l – это лиевский ранг группы G. При этом каждая компонента $\Gamma_i = \langle X_{\pm\alpha_i} \rangle$ порождается корневыми группами $X_{\pm\alpha_i}$, соответствующими корню $\alpha_i : T \to K^*$ (см., например, [7, Lemma 2.9]). Так как ранг группы Γ совпадает с рангом группы G, то $T = H_1 H_2 \cdots H_l$, где H_i – соответствующий одномерный тор группы $\Gamma_i = \langle X_{\pm\alpha_i} \rangle$. Пусть

$$\sigma_j = h_{1j} h_{2j} \cdots h_{rj},$$

где $h_{ij} \in H_i$. Так как $\sigma_j \in T$ – регулярный элемент группы G, любой элемент $h_{ij} \in \Gamma_i$ не являтся центральным элементом Γ_i, поскольку в таком случае элемент h_{ij}, а значит, и элемент σ_j коммутировал бы с унипотентными элементами из $X_{\pm\alpha_i}$. Пусть

$$w_{\Sigma,i} := h_{i1} w_1 h_{i2} \cdots h_{im} w_m,$$

и пусть $\widetilde{w}_{\Sigma,i} : \Gamma_i^n \to \Gamma_i$ – соответствующее вербальное отображение. Тогда образ $\operatorname{Im} \widetilde{w}_{\Sigma,i}$ пересекает все нецентральные полупростые классы сопряженных элементов группы Γ_i ([6, теорема 2]). Далее, пусть $s \in T$ – регулярный полупростой элемент групп G. Тогда

$$s = s_1 s_2 \cdots s_r, \ \ s_i \in H_i - \text{регулярный элемент группы } \ G_i.$$

Таким образом, для любого i существует элемент $s_i' \in \Gamma_i$, сопряженный в Γ_i с s_i, и такой, что $\widetilde{w}_{\Sigma,i}(\gamma_i) = s_i'$ для некоторого $\gamma_i \in \Gamma_i$. Далее, пусть

$$\widetilde{w}_{\Sigma|\Gamma} : \Gamma^n \to \Gamma$$

– ограничение отображения $\widetilde{w}_\Sigma$ на подгруппу Γ. Так как все компоненты Γ коммутируют друг с другом, то для $\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_r$

$$\widetilde{w}_{\Sigma|\Gamma}(\gamma) = \prod_{i=1}^{r} w_{\Sigma,i}(\gamma_i) = s'_1 s'_2 \cdots s'_r =: s' \in \Gamma.$$

Поскольку каждый из компонент s'_i элемента s' сопряжен в Γ_i с элементом s_i, то s' сопряжен с s в $\Gamma \leqslant G$, а значит, класс сопряженных элемента s в группе Γ пересекается с $\mathrm{Im}\ w_\Sigma$. □

Для тех же типов групп, что и в предложении 12, можно оценить снизу размерность $\mathrm{Im}\ w_\Sigma$ для более широкого класса вербальных отображений с константами.

Предложение 13. *Пусть G – простая алгебраическая группа типа $B_r, C_r, D_{2r}, E_7, E_8, F_4, G_2$ и пусть $T \leqslant G$ – зафиксированный максимальный тор группы G. Далее, пусть $w_\Sigma = w_1\sigma_1 w_2\sigma_2 \cdots w_m\sigma_m w_{m+1}$ – слово с константами, где $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\} \subset T$ – некоторое множество регулярных элементов. Тогда*

$$\dim \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma \geqslant 2 \dim T.$$

Доказательство. Ограничения $\widetilde{w}_{\Sigma,i}$ отображения $\widetilde{w}_\Sigma$ на подгруппы $\Gamma_i \leqslant G$, введенные в доказательстве предыдущего предложения, также являются отображениями с константами, лежащими в одном и том же торе H_i группы Γ_i. Из предложения 10 и замечания 11 следует, что $\dim \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_{\Sigma,i} \geqslant 2$, а значит,

$$\dim \widetilde{w}_\Sigma \geqslant \dim \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_{\Sigma,i}(\mathrm{rank} G) \geqslant 2 \dim T. \qquad \square$$

Список литературы

1. A. Borel, *On free subgroups of semisimple groups.* — Enseign. Math. **29** (1983), 151–164.
2. A. Borel, *Linear Algebraic groups.* 2nd enl.ed., Graduate texts in mathematics **126**. Springer-Verlag New York Inc. 1991.
3. R. W. Carter, *Simple groups of Lie type. Pure and Applied Mathematics.* Vol. 28. John Wiley & Sons, London-New York-Sydney, 1972.
4. R. W. Carter, *Finite Groups of Lie Type. Conjugacy Classes and Complex Characters.* A Wiley - Interscience Publication, John Wiley& Sons, Chichester-New York-Bribane-Toronto-Singapure, 1985.
5. N. L. Gordeev, *Freedom in conjugacy classes of simple algebraic groups and identities with constants.* — Алгебра и Анализ, **9**, No. 4 (1997), 63–78.

6. Ф. А. Гнутов, Н. Л. Гордеев, *Об образе вербального отображения с константами простой алгебраической группы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **478** (2019), 7–99.
7. N. Gordeev, B. Kunyavskii, E. Plotkin, *Word maps, word maps with constants and representation varieties of one-relator groups.* — J. Algebra **500** (2018), 390–424.
8. T. A. Springer, R. Steinberg, *Conjugacy classes*, in: "Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups", Lecture Notes Math., vol. **131**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1970, pp. 167–266.
9. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* М. Мир, 1975.

Gnutov F. On the image of a word map with constants of a simple algebraic group II

This paper is a continuation of the investigations of images of word maps with constants $\widetilde{w}_\Sigma : G^n \to G$ on a simple algebraic group G started in the work of F. Gnutov and N. Gordeev, *On the image of a word map with constants of a simple algebraic group,* Zap. Nauchn. Semin. POMI, **478** (2019), 78–99. In this paper we prove that for adjoint simple algebraic groups of the type B_l, C_l, F_4, G_2 over a field of characteristic $\neq 2, 3$ the map $\pi \circ \widetilde{w}$, where $\widetilde{w}_\Sigma$ is word map without small constants and $\pi : G \to T/W$ is a map of factorization, is a constant map if and only if $w_\Sigma = vgv^{-1}$, where $g \in G$ and v is a word with constants.

Also, we give estimates for dimensions of images of some types of word maps with constants on simple algebraic groups.

Российский Государственный Педагогический Университет им. А. И. Герцена,
наб. р. Мойки 48, Санкт-Петербург,
191186, Россия
E-mail: fedor_gnutov@mail.ru

Поступило 15 июня 2020 г.