Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 492, 2020 г.

А. И. Генералов, И. М. Зильберборд

ЗАМЕТКА ОБ ОБОБЩЕННО ПОЛУКОММУТАТИВНЫХ КОЛЬЦАХ

Понятие коммутативного кольца – одно из важнейших в теории колец. К настоящему времени было рассмотрено много различных расширений класса коммутативных колец, в частности, полукоммутативные, центрально полукоммутативные и абелевы кольца. Как правило, авторы таких обобщений ставят своей целью обнаружить те или иные свойства колец, сближающие их с коммутативными. Один из таких подходов предпринят Д. Роем и Т. Субеди в работе [1] (см. также цитируемую в этой статье литературу). В настоящей заметке мы дополняем и обобщаем некоторые результаты работы [1], касающиеся обобщённо полукоммутативных подколец матричных колец.

Все рассматриваемые кольца – ассоциативные и с единицей. Кольцо R называется *обобщённо полукоммутативным* (или, кратко, GSC-*кольцом*), если для любых элементов $a, b \in R$ таких, что $ab = 0$, найдутся $m, n \in \mathbb{N}$, для которых $a^m R b^n = 0$.

Теорема 1. *Пусть I – нильпотентный двусторонний идеал кольца S, и пусть R – подкольцо в S такое, что $S = R \oplus I$ (как абелевы группы). Предположим, что идеал I обладает свойством:*

$$(*) \qquad \text{если } a, b \in R \text{ таковы, что } aRb = 0, \text{ то } aIb = 0.$$

R является GSC*-кольцом тогда и только тогда, когда S –* GSC*-кольцо.*

Прежде чем доказывать теорему, мы приведём следствие, которое дополняет один из результатов работы [1].

Пусть $S_p(R)$ – подкольцо кольца $\mathrm{M}_p(R)$, состоящее из матриц вида $A = \alpha E_p + B$, где $\alpha \in R$, а $B = (b_{ij})$ – строго верхнетреугольная матрица, т.е. $b_{ij} = 0$ при $i \geqslant j$.

Следствие 1. *Пусть $p \geqslant 2$. R является* GSC*-кольцом тогда и только тогда, когда $S_p(R)$ –* GSC*-кольцо.*

Ключевые слова: обобщенно полукоммутативное кольцо, кольцо матриц, подкольцо, нильпотентный идеал, локальное кольцо, идемпотент.

Первый из авторов благодарит за поддержку грант РФФИ No. 20-01-00030.

Доказательство. Для применения теоремы 1 к кольцу $S := S_p(R)$ рассмотрим идеал

$$I := \{A = (a_{ij}) \in S \mid a_{ij} = 0 \text{ при } i \geqslant j\}.$$

Тогда $S = R' \oplus I$, где $R' = \{\alpha E_p \mid \alpha \in R\} \simeq R$. Ясно, что сейчас условие $(*)$ выполняется. □

Замечание 1. Для $p \leqslant 3$ утверждение следствия 1 доказано в [1].

Доказательство теоремы 1. Ясно, что если S – GSC-кольцо, то и R – GSC-кольцо.

Теперь предположим, что R – GSC-кольцо. Пусть $p \in \mathbb{N}$ таково, что $I^p = 0$. Рассмотрим элементы $a = a' + u, b = b' + v$ из S, где $a', b' \in R$, $u, v \in I$, для которых $ab = 0$. Тогда

$$0 = ab = a'b' + (a'v + ub' + uv),$$

где $a'b' \in R$, $a'v+ub'+uv \in I$. Поэтому $a'b' = 0$. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$ таковы, что $(a')^m R(b')^n = 0$. Тогда из условия $(*)$ следует, что $(a')^m S(b')^n = 0$.

Докажем, что $a^{pm} S b^{pn} = 0$. Введём обозначения $A := a^m, B := b^n$. Пусть $s \in S$. Определим для $k \geqslant 0$ $s_k = a^{km} s b^{kn}$ (при этом $s_0 = s$).

Индукцией по $k \geqslant 0$ докажем, что $s_k \in I^k$. База индукции: s_0 лежит в $I^0 = S$.

Предположим, что $s_k \in I^k$ для некоторого $k \geqslant 0$. Заметим, что элементы $x := A - (a')^m$, $y := B - (b')^n$ лежат в I.

Так как $(a')^m s_k (b')^n = 0$, то

$$s_{k+1} = A s_k B - (a')^m s_k (b')^n = (a')^m s_k y + x s_k (b')^n + x s_k y \in I^{k+1}.$$

Таким образом, $s_p \in I^p = 0$. □

Рассмотрим подкольцо $V_p(R)$ в $S_p(R)$, состоящее из матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Следствие 2. *Пусть $p \geqslant 2$. R является* GSC-*кольцом тогда и только тогда, когда $V_p(R)$ –* GSC-*кольцо.*

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что $V_p(R) \subset S_p(R)$. □

Замечание 2. Утверждение следствия 2 совпадает с теоремой 2.20 из [1]. Таким образом, мы получаем значительно более простое доказательство этой теоремы.

Следующее утверждение обобщает теорему 2.18 из [1].

Следствие 3. *Пусть M – R-бимодуль, удовлетворяющий условию:*

$$(**) \qquad \text{если } a, b \in R \text{ таковы, что } aRb = 0, \text{ то } aMb = 0.$$

Пусть $T := T(R, M)$ – тривиальное расширение кольца R с помощью M. R является GSC*-кольцом тогда и только тогда, когда T –* GSC*-кольцо.*

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что $\{0\} \times M$ – нильпотентный двусторонний идеал T, удовлетворяющий условию $(*)$. $\square$

Предложение 2. *Артиново кольцо R является* GSC*-кольцом тогда и только тогда, когда R – прямое произведение локальных колец.*

Доказательство. Так как любое артиново кольцо R полусовершенно (см., например, [2, предложение 27.1, теорема 27.6]), то в R существует полный ортогональный набор неразложимых идемпотентов $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Если R является GSC-кольцом, то согласно предложению 2.9 из [1] любой идемпотент в R централен. Следовательно, R – прямое произведение локальных колец $e_1Re_1, e_2Re_2, \ldots, e_nRe_n$.

Обратная импликация следует из того, что в произвольном локальном артиновом кольце любой необратимый элемент принадлежит $\mathrm{Rad}(R)$ и, следовательно, нильпотентен. Кроме того, ясно, что прямое произведение нескольких GSC-колец также является GSC-кольцом. $\square$

Далее мы ограничимся случаем, когда R – поле, и докажем, что $S_n(R)$ – максимальное (по включению) GSC-подкольцо матричного кольца $\mathrm{M}_n(R)$. Этот результат позволит также построить некоторые другие максимальные GSC-подкольца в $\mathrm{M}_n(R)$.

Теорема 3. *Пусть R – поле, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $S_n(R)$ – максимальное* GSC*-подкольцо кольца $\mathrm{M}_n(R)$.*

Доказательство. Пусть A – GSC-подкольцо в $\mathrm{M}_n(R)$, причём $S_n(R) \subsetneq A$. Заметим, что тогда A – конечномерная алгебра над полем $R' = \{\alpha E_n \mid \alpha \in R\} \simeq R$, и, следовательно, является артиновым кольцом.

Непосредственно проверяется, что централизатор подкольца $S_n(R)$ в кольце $\mathrm{M}_n(R)$ равен $\{\alpha E_n + xe_{1n} \mid \alpha, x \in R\}$ (где e_{1n} – соответствующая матричная единица). Ясно также, что матрица $\alpha E_n + xe_{1n}$ является идемпотентом в кольце $\mathrm{M}_n(R)$ тогда и только тогда, когда $x = 0, \alpha \in \{0, 1\}$. Поэтому в кольце A нет нетривиальных центральных идемпотентов, и в силу предложения 2 A – локальное артиново кольцо. Следовательно, любая матрица $a \in A$ либо нильпотентна либо обратима.

Итак, выберем матрицу $a \in A \setminus S_n(R)$. Вычитая, если это необходимо, из a матрицу, принадлежащую $S_n(R)$, можем сразу предположить, что $a = (a_{ij})$ – нижнетреугольная матрица, у которой хотя бы один из элементов главной диагонали равен нулю. Но тогда a – необратимая и потому нильпотентная матрица. Следовательно, все элементы главной диагонали матрицы a равны нулю.

Пусть $b = e_{ij}$, где $i < j$, тогда $a, b \in A$. Так как a и b необратимы, а кольцо A локально, то матрица $a + b$ необратима и, следовательно, нильпотентна. Поэтому характеристический многочлен χ_{a+b} матрицы $a + b$ равен $(-t)^n$. Нам остаётся доказать следующую лемму:

Лемма 4. *Пусть строго нижнетреугольная матрица $a \in M_n(R)$ такова, что для любой матричной единицы e_{ij}, где $i < j$, $\chi_{a+e_{ij}}(t) = (-t)^n$. Тогда $a = 0$.*

Доказательство леммы 4. Будем доказывать утверждение леммы индукцией по n. База очевидна. Обозначим для $i<j$ многочлен $\chi_{ij}(t) = \chi_{a+e_{ij}}(t)$.

Пусть $\tilde{a}$ – матрица, полученная из a удалением n-ой строки и n-го столбца, $i < j \leqslant n - 1$. Разложив χ_{ij} по n-му столбцу, видим, что $\chi_{ij}(t) = (-t) \cdot \chi_{\tilde{a}+e_{ij}}(t)$. Таким образом, $\chi_{\tilde{a}+e_{ij}}(t) = (-t)^{n-1}$, и в силу индукционного предположения $\tilde{a} = 0$.

Пусть теперь $\hat{a}$ – матрица, полученная из a удалением первой строки и первого столбца, $2 \leqslant i < j$. Разложив χ_{ij} по первой строке, получаем, что $\chi_{ij}(t) = (-t) \cdot \chi_{\hat{a}+e_{i-1j-1}}(t)$. Поэтому $\chi_{\hat{a}+e_{i-1j-1}}(t) = (-t)^{n-1}$, и в силу индукционного предположения $\hat{a} = 0$.

$$\text{Следовательно, } \chi_{1n}(t) = \begin{vmatrix} -t & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -t & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -t & 0 \\ a_{n1} & 0 & \dots 0 & 0 & -t \end{vmatrix}$$

$= (-t)^n + a_{n1}(-1)^{2n+1}(-t)^{n-2} = (-t)^n$. Итак, $a_{n1} = 0$, и потому $a = 0$. □

Таким образом, в силу леммы 4 $a = 0$, и мы пришли к противоречию. □

В следующем следствии мы для данного разбиения $n_1, n_2, \ldots, n_k$ числа n отождествляем кольцо $\mathrm{M}_{n_1}(R)\times\cdots\times\mathrm{M}_{n_k}(R)$ и подкольцо кольца $\mathrm{M}_n(R)$, состоящее из матриц соответствующей блочно-диагональной структуры.

Следствие 4. *Пусть R – поле, $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $n = n_1+n_2+\ldots+n_k$. Тогда $S_{n_1}(R) \times S_{n_2}(R) \times \ldots \times S_{n_k}(R)$ – максимальное* GSC*-подкольцо кольца* $\mathrm{M}_n(R)$.

Доказательство. Предположим, что A – GSC-подкольцо в $\mathrm{M}_n(R)$, причём $S_{n_1}(R) \times S_{n_2}(R) \times \ldots \times S_{n_k}(R) \subset A$. Пусть e_j – единичный элемент кольца $S_{n_j}(R)$. Тогда e_j – идемпотент кольца A, и $e_j\mathrm{M}_n(R)e_j = \mathrm{M}_{n_j}(R)$. В силу ([1, предложение 2.9]) $A = e_1Ae_1 \times \ldots \times e_kAe_k \subset \mathrm{M}_{n_1}(R) \times \cdots \times \mathrm{M}_{n_k}(R)$, причём для любого j e_jAe_j – GSC-подкольцо в $\mathrm{M}_{n_j}(R)$, содержащее $S_{n_j}(R)$. Поэтому достаточно применить теорему 3. □

Замечание 3. Ясно, что если T – максимальное GSC-подкольцо кольца $\mathrm{M}_n(R)$, то для любой матрицы $C \in \mathrm{GL}_n(R)$ $\quad CTC^{-1}$ – тоже максимальное GSC-подкольцо кольца $\mathrm{M}_n(R)$.

Список литературы

1. D. Roy, T. Subedi, *Generalized semicommutative rings.* — Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. **7**, No. 65, вып. 1 (2020).
2. F. Anderson, K. Fuller, Rings and categories of modules, Springer-Verlag, 1992.

Generalov A. I., Zilberbord I. M. A note on generalized semicommutative rings.

In this note we extend and generalize some results of the paper of D. Roy and T. Subedi (Vestnik of St. Petersburg State University. Series 1.

Mathematics. Mechanics. Astronomy, vol. 7 (65), issue 1, 2020), concerning generalized semicommutative subrings of matrix rings.

С.-Петербургский государственный университет
Университетская наб., 7–9
Санкт-Петербург, 199034, Россия
E-mail: ageneralov@gmail.com
i.zilberbord@mail.spbu.ru

Поступило 17 июня 2020 г.