Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 492, 2020 г.

А. И. Генералов

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА МАЙЕРА–ВЬЕТОРИСА НАД ПРЕДАБЕЛЕВЫМИ КАТЕГОРИЯМИ

1. Мы распространим на предабелевы категории так называемую "алгебраическую теорему Майера–Вьеториса", обычно формулируемую для категории комплексов над произвольной абелевой категорией (ср., например, [1]). Для получения соответствующего обобщения мы используем некоторые результаты из [2], где были развиты фрагменты гомологической алгебры над предабелевыми категориями, при этом оказалось удобным формулировать результаты на языке относительной гомологической алгебры.

2. Предварительные сведения. Аддитивная категория $\mathcal{A}$ называется предабелевой, если в $\mathcal{A}$ любой морфизм обладает ядром и коядром. Всякий морфизм $f\colon X \to Y$ предабелевой категории $\mathcal{A}$ допускает каноническое разложение

$$f = \operatorname{im} f \cdot \bar{f} \cdot \operatorname{coim} f \ : \ X \xrightarrow{\operatorname{coim} f} \operatorname{Coim} f \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{Im} f \xrightarrow{\operatorname{im} f} Y, \qquad (1)$$

где $\operatorname{coim} f = \operatorname{coker} \ker f$ – это кообраз f, $\operatorname{im} f = \ker \operatorname{coker} f$ – образ f. Морфизм f называется строгим, если в его каноническом разложении (1) $\bar{f}$ – изоморфизм. Последовательность в $\mathcal{A}$

$$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0 \qquad (2)$$

называется короткой точной, если $f = \ker g, g = \operatorname{coker} f$.

Далее всюду $\mathcal{A}$ обозначает предабелеву категорию. Напомним определение собственного класса коядер из [2]. Класс коядер ω в $\mathcal{A}$ называется собственным, если ω удовлетворяет следующим условиям.

P0. Расщепляемые эпиморфизмы лежат в ω.

P1. Композиция коядер из ω, если она определена, также лежит в ω.

Ключевые слова: предабелева категория, собственный класс коядер, последовательность Майера–Вьеториса.

Автор благодарит грант РФФИ 18-31-20004 мол_а_вед за поддержку.

P2. Для универсального квадрата вида

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\sigma'} & B' \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \tau'} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \tau} \\ A & \xrightarrow{\sigma} & B, \end{array}$$

в котором $\sigma \in \omega$, также имеем $\sigma' \in \omega$.

P3. Если $\sigma\tau \in \omega$, где τ – коядро, то $\sigma \in \omega$.

Короткая точная последовательность (2) называется ω-собственной, если $g \in \omega$. Строгий морфизм $f\colon X \to Y$ назовём ω-строгим, если $\operatorname{coim} f \in \omega$.

Отметим, что из аксиом P0–P3 вытекает более сильная форма условия P3 (см. [2, лемма 1.1]), а именно, для собственного класса ω выполняется условие

P3*. Если $\sigma\tau \in \omega$ (а τ произволен), то $\sigma \in \omega$.

Легко проверяется, что класс ω_0, состоящий из всех расщепляющихся эпиморфизмов, является собственным (и при этом $\omega_0 \subset \omega$). Ясно также, что любой расщепляющийся эпиморфизм $\sigma\colon X \to Y$ вкладывается в диаграмму прямой суммы, т. е. существуют морфизмы $\tau\colon X \to Z$ и i, j такие, что $\sigma i = \mathrm{id}_Y, \tau j = 1_Z, i\sigma + j\tau = 1_X$.

Через $\operatorname{Com}\mathcal{A}$ обозначим категорию (коцепных) комплексов $M = (M^n, d_M^n)$ над $\mathcal{A}$ и их морфизмов (степени 0). Непосредственно проверяется, что $\operatorname{Com}\mathcal{A}$ – предабелева категория, при этом последовательность в $\operatorname{Com}\mathcal{A}$

$$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0 \tag{3}$$

является короткой точной тогда и только тогда, когда для любого n последовательность

$$0 \to X^n \xrightarrow{f^n} Y^n \xrightarrow{g^n} Z^n \to 0 \tag{4}$$

– короткая точная (в $\mathcal{A}$). Короткую точную последовательность (3) в $\operatorname{Com}\mathcal{A}$ назовем ω-собственной, если для любого $n \quad g^n \in \omega$. Для простоты мы часто не будем делать различия в обозначении между $g = (g^n)$ и g^n.

Полезно заметить, что короткая точная последовательность вида (3), расщепляющаяся в каждой степени (т.е. для любого n последовательность (4) расщепляется) является ω_0-собственной.

Комплекс $M = (M^n, d_M^n)$ называется строгим, если для любого n d_M^n – строгий морфизм. Строгий комплекс M назовём ацикличным, если $\operatorname{im} d_M^{n-1} = \ker d_M^n$ для всех n, а ацикличный комплекс M назовём ω-ацикличным, если для любого n $\operatorname{coim} d_M^n \in \omega$ (т.е. d_M^n – ω-строгие морфизмы). Примерами ω-ацикличных комплексов служат комплексы, гомотопные нулю; на самом деле они ω_0-ацикличны ввиду [4, следствие 2.8].

Следующая теорема доказана в [2, теорема 2.2].

Теорема 1. *Пусть дана ω-собственная последовательность в* $\operatorname{Com}\mathcal{A}$ *вида* (3). *Если какие-либо два комплекса в ней ω-ацикличны, то и третий ω-ацикличен.*

В случае, когда $\mathcal{A}$ – абелева категория, теорема 1 может быть выведена из длинной точной когомологической последовательности. Для предабелевых категорий такая последовательность получена в [4] при выполнении более жестких, чем в нашем случае, условий.

Для морфизма $f\colon M \to N$ в $\operatorname{Com}\mathcal{A}$ его конус определяется как комплекс

$$\mathrm{C}(f) = (M^{n+1} \oplus N^n, d_{\mathrm{C}(f)}), \quad d_{\mathrm{C}(f)} = \begin{pmatrix} -d_M & 0 \\ f & d_N \end{pmatrix}.$$

Цилиндром морфизма f называется комплекс

$$\operatorname{Cyl}(f) := \mathrm{C}\left(\begin{pmatrix} -1_M \\ f \end{pmatrix}\right);$$

таким образом,

$$d_{\operatorname{Cyl}(f)} = \begin{pmatrix} -d_M & 0 & 0 \\ -1 & d_M & 0 \\ f & 0 & d_N \end{pmatrix}.$$

Имеется короткая точная последовательность в $\operatorname{Com}\mathcal{A}$

$$0 \to M \xrightarrow{\bar f} \operatorname{Cyl}(f) \xrightarrow{\pi} \mathrm{C}(f) \to 0, \tag{5}$$

расщепляющаяся в каждой степени, где

$$\bar f = (0, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, следующая короткая точная последовательность

$$0 \to N \xrightarrow{\alpha} \operatorname{Cyl}(f) \xrightarrow{\beta} \mathrm{C}(-1_M) \to 0, \tag{6}$$

где

$$\alpha = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

расщепляется в $\operatorname{Com}\mathcal{A}$, поскольку для морфизмов

$$\nu = (0, f, 1)\colon \operatorname{Cyl}(f) \to N, \ \ \mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -f \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} : \mathrm{C}(-1_M) \to \operatorname{Cyl}(f)$$

выполняются соотношения: $\nu\alpha = 1_N, \ \beta\mu = 1_{\mathrm{C}(-1_M)}, \ \alpha\nu + \mu\beta = 1_{\operatorname{Cyl}(f)}$.

Будет полезна двойственная конструкция по отношению к цилиндру; см. [2]. А именно, коцилиндром морфизма комплексов $f\colon M \to N$ называется

$$\operatorname{Cocyl} f := \mathrm{C}\Big((-f, 1_N)\Big)[-1];$$

таким образом,

$$d_{\operatorname{Cocyl}(f)} = \begin{pmatrix} d_M & 0 & 0 \\ 0 & d_N & 0 \\ f & -1 & -d_N \end{pmatrix}.$$

Имеется две коротких точных последовательности в $\operatorname{Com}\mathcal{A}$ с участием коцилиндра: одна – расщепляющаяся в каждой степени "двойственная" последовательности (5):

$$0 \to \mathrm{C}(-f)[-1] \xrightarrow{\lambda} \operatorname{Cocyl}(f) \xrightarrow{\rho} N \to 0, \tag{7}$$

где

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad \rho = (0, 1, 0);$$

другая – "двойственная" последовательности (6) и так же, как (6), расщепляющаяся в $\operatorname{Com}\mathcal{A}$:

$$0 \to \mathrm{C}(1_N)[-1] \xrightarrow{i} \operatorname{Cocyl}(f) \xrightarrow{p} M \to 0, \tag{8}$$

где

$$i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad p = (1, 0, 0).$$

3. Последовательность Майера–Вьеториса.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A}$ – предабелева категория, ω – собственный класс коядер в $\mathcal{A}$. Предположим, что в следующей коммутативной* *диаграмме строки представляют собой ω-ацикличные комплексы:*

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "j^{n-1}"] & C^{n-1} \arrow[r, "\sigma^n"] \arrow[d, "\gamma^{n-1}"', "\simeq"] & A^n \arrow[r, "i^n"] \arrow[d, "\alpha^n"'] & B^n \arrow[r, "j^n"] \arrow[d, "\beta^n"'] & C^n \arrow[r, "\sigma^{n+1}"] \arrow[d, "\gamma^n"', "\simeq"] & \dots \\
\dots \arrow[r, "j_1^{n-1}"] & C_1^{n-1} \arrow[r, "\sigma_1^n"] & A_1^n \arrow[r, "i_1^n"] & B_1^n \arrow[r, "j_1^n"] & C_1^n \arrow[r, "\sigma_1^{n+1}"] & \dots,
\end{tikzcd} \tag{9}$$

а также для любого $n \in \mathbb{Z}$ γ^n – изоморфизм. Положим $\Delta^n := \sigma^{n+1}(\gamma^n)^{-1}j_1^n$. Тогда следующий комплекс

$$\dots \xrightarrow{\Delta^{n-1}} A^n \xrightarrow{(-i^n,\alpha^n)^{\mathrm{T}}} B^n \oplus A_1^n \xrightarrow{(\beta^n, i_1^n)} B_1^n \xrightarrow{\Delta^n} A^{n+1} \longrightarrow \dots \tag{10}$$

ω-ацикличен.

Доказательство. Поскольку в диаграмме (9) используются не вполне “когомологические” обозначения, мы перейдём к рассмотрению морфизма комплексов $f\colon X \to Y$(в $\mathrm{Com}\,\mathcal{A}$), изображаемого следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & X^{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n-2}"', "\simeq"] & X^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & X^n \arrow[r] \arrow[d, "f^n"'] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"', "\simeq"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & Y^{n-2} \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r] & Y^n \arrow[r] & Y^{n+1} \arrow[r] & \dots.
\end{tikzcd} \tag{11}$$

Кроме того, предположим, что X и Y – ω-ацикличные комплексы, а также что для любого $k \in \mathbb{Z}$ f^{n+1+3k} – изоморфизм. Используя последовательность (6), получаем, что $\mathrm{Cyl}(f) = Y \oplus \mathrm{C}(-1_X)$ – ω-ацикличный комплекс. Затем применяя теорему 1 к последовательности (5), получаем, что и конус $\mathrm{C}(f)$ ω-ацикличен.

Для всех $k \in \mathbb{Z}$ введём обозначение $g_k := (f^{n+1+3k})^{-1}$. Рассмотрим морфизм комплексов, представленный следующей диаграммой, в которой верхняя строка – это конус $\mathrm{C}(f)$:

$$
\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "d_{\mathrm{C}(f)}"] & X^n \oplus Y^{n-1} \arrow[r, "d_{\mathrm{C}(f)}"] \arrow[d, equal] & X^{n+1} \oplus Y^n \arrow[r, "d_{\mathrm{C}(f)}"] \arrow[d, "{(0,1)}"'] & {} \\
\dots \arrow[r, "{(-d_X, f^{n-1})^{\mathrm{T}}}"'] & X^n \oplus Y^{n-1} \arrow[r, "{(f^n, d_Y)}"'] & Y^n \arrow[r, "\Delta"'] & {}
\end{tikzcd}
\tag{12}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "d_{\mathrm{C}(f)}"] & X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \arrow[r, "d_{\mathrm{C}(f)}"] \arrow[d, "{(1, d_X g_0)}"'] & \dots \\
{} \arrow[r, "\Delta"'] & X^{n+2} \arrow[r, "{(-d_X, f^{n+2})^{\mathrm{T}}}"'] & \dots\,.
\end{tikzcd}
$$

Сам морфизм обозначим через Φ, а через $\mathrm{MV}(f)$ обозначим комплекс, представленный нижней строкой диаграммы (12). Тогда непосредственно получаем короткую точную последовательность в $\mathrm{Com}\,\mathcal{A}$

$$0 \to \operatorname{Ker}\Phi \xrightarrow{i} \mathrm{C}(f) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{MV}(f) \to 0, \tag{13}$$

расщепляющуюся в каждой степени. При этом $\operatorname{Ker}\Phi$ описывается следующим образом:

$$\dots \to X^{n-2} \underset{\simeq}{\xrightarrow{f^{n-2}}} Y^{n-2} \to 0 \to X^{n+1} \underset{\simeq}{\xrightarrow{f^{n+1}}} Y^{n+1} \to 0 \to \dots$$

Ясно, что $\operatorname{Ker}\Phi$ – ω-ацикличный комплекс. Применяя теорему 1 к последовательности (13), получаем, что $\mathrm{MV}(f)$ также ω-ацикличен. Выполняя соответствующие переобозначения, приходим к тому, что (10) – ω-ацикличный комплекс. □

4. Заключительные замечания.

Верно также утверждение, в некоторой степени обратное теореме 2; более точно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– предабелева категория,* $f\colon X \to Y$ *– морфизм в* $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ *такой, что комплекс* $\mathrm{MV}(f)$ *(см. (12))* ω*-ацикличен, а также* ω*-ацикличен один из комплексов* X *и* Y*. Тогда* ω*-ацикличен и другой комплекс.*

Доказательство. Из доказательства теоремы 2 следует, что сейчас конус $\mathrm{C}(f)$ морфизма f ω-ацикличен (см. последовательность (13)).

а) Предположим сначала, что Y – ω-ацикличный комплекс. Из короткой точной последовательности (6) получаем, что $\mathrm{Cyl}(f)$ также ω-ацикличен, а тогда с помощью последовательности (5) получаем, что X ω-ацикличен.

б) Теперь предположим, что ω-ацикличен X. Тогда с помощью последовательности (8) заключаем, что $\mathrm{Cocyl}(f)$ ω-ацикличен. Так как $\mathrm{C}(-f) \simeq \mathrm{C}(f)$, то с помощью последовательности (7) окончательно получаем, что Y – ω-ацикличный комплекс. $\square$

Замечание 4. Включим коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\alpha"] & B' \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \tag{14}$$

в следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} K' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "\bar\alpha"'] & A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\alpha"'] & B' \arrow[r, "\nu'"] \arrow[d, "\beta"] & V' \arrow[d, "\bar\beta"] \\ K \arrow[r, "i"'] & A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "\nu"'] & V, \end{tikzcd} \tag{15}$$

где

$$i = \ker f,\ \nu = \operatorname{coker} f,\ i' = \ker f',\ \nu' = \operatorname{coker} f', \tag{16}$$

а $\bar\alpha$ и $\bar\beta$ – морфизмы, индуцируемые на ядрах и коядрах соответственно.

Если $\mathcal{A}$ – абелева категория, то стандартный диаграммный поиск показывает, что квадрат (14) биуниверсален, т.е. в $\mathcal{A}$ точна следующая последовательность

$$0 \to A' \overset{(-f',\alpha)^{\mathrm{T}}}{\longrightarrow} B' \oplus A \overset{(\beta,f)}{\longrightarrow} B \to 0, \tag{17}$$

тогда и только тогда, когда $\bar\alpha$ и $\bar\beta$ – изоморфизмы. В случае, когда $\mathcal{A}$ предабелева, из теоремы 2 вытекает следующий “относительный” вариант предыдущего утверждения.

Предложение 5. *Пусть в предабелевой категории $\mathcal{A}$ дана диаграмма* (15)*, в которой выполняются соотношения* (16) *и, кроме того, $\nu', \nu \in \omega$, а f', f – ω-строгие морфизмы. Если $\bar\alpha, \bar\beta$ – изоморфизмы, то квадрат* (15) *биуниверсален, а соответствующая последовательность* (17) *является ω-собственной.*

Доказательство. Сделанные предположения о диаграмме (15) означают, что строки этой диаграммы представляют собой ω-ацикличные комплексы, и потому предложение непосредственно вытекает из теоремы 2. □

Замечание 6. Несложный диаграммный поиск (однако сейчас он осуществляется над предабелевой категорией $\mathcal{A}$) показывает, что если квадрат (14) биуниверсален, то в диаграмме (15) $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ – изоморфизмы.

Список литературы

1. P. Selick, *Introduction to homotopy theory.* AMS, Fields Inst. Monographs, v. 9, 1997.
2. А. И. Генералов, *Относительная гомологическая алгебра в предабелевых категориях*, I. *Производные категории.* — Алгебра и анализ, **4**, No. 1 (1992), 98–119.
3. А. И. Генералов, *Производные категории аддитивной категории.* — Алгебра и анализ, **4**, No. 5 (1992), 91–103.
4. А. И. Генералов, Ker-Coker-*последовательность для предабелевых категорий*, Абелевы группы и модули, Томск, Nos. 11–12 (1994), 78–89.

Generalov A. I. Algebraic Mayer–Vietoris theorem over preabelian categories.

The famous “algebraic Mayer–Vietoris theorem” is usually stated for complexes over an abelian category. In the present paper this theorem is generalized for complexes over a preabelian category. We use the technique and results from the relative homological algebra that is developed in the paper (A. I. Generalov, Algebra i analyz **4**, No. 3 (1992)).

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 С.-Петербург, Россия
E-mail: ageneralov@gmail.com

Поступило 1 июня 2020 г.