Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 492, 2020 г.

П. Б. Гвоздевский

КОММУТАТОРНЫЕ ДЛИНЫ В ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЕ НАД ТЕЛОМ

§1. Введение

Вопросы о коммутаторных длинах суть вопросы о вербальных отображениях специального вида. В общем случае для группы G *вербальным отображением* называется отображение

$$G^n \to G, \qquad (g_1, \dots, g_m) \mapsto w(g_1, \dots, g_m),$$

где w – слово от m переменных (т.е. элемент свободной группы от m образующих), и, соответственно, $w(g_1, \dots, g_n)$ есть результат подстановки элементов $g_1,\dots,g_n$ в это слово.

По определению *коммутаторная длина* элемента $g \in [G, G]$ не превосходит d, если g лежит в образе вербального отображения заданного словом $w = [x_1, y_1] \dots [x_d, y_d]$ от $2d$ переменных, иными словами, если его можно выразить как произведение d коммутаторов.

Вербальные отображения активно изучались в случае, когда $G = \mathcal{G}(K)$, где $\mathcal{G}$ – простая или полупростая алгебраическая группа, определенная над полем K, см. ссылки в работах [2, 15, 16]. Почти все результаты в этом направлении были доказаны для случаев, когда K — алгебраически замкнутое или конечное поле, или когда $\mathcal{G}$ расщепима или анизотропна над K.

Сюръективность вербальных отображений заданных словом $w = [x, y]$ для разных типов групп имеет долгую историю, см. [10, 13]. Для расщепимой и, более общо, для квазирасщепимой группы $\mathcal{G}^+(K)$ такую сюръективность можно доказать, с помощью метода под названием “разложение Гаусса с заданной полупростой частью”. Точнее, она доказывается для группы $\mathcal{G}^+(K)/Z(\mathcal{G}^+(K))$, и поле предполагается достаточно большим, см. [10]. Напомним основную идею этого метода,

---

Ключевые слова: коммутаторная длина, полная линейная группа, тела, разложение Гаусса.

Работа выполнена при поддержке программы социальных инвестиций “Родные города” ПАО “Газпром нефть”, а также за счет гранта в форме субсидий федерального бюджета на создание и развитие международных центров мирового уровня, соглашение между МОН и ПОМИ РАН No. 075-15-2019-1620 от 8 ноября 2019 г.

см. [8, 9, 11, 12, 14, 18]. Пусть $\mathcal{G}$ – квазирасщепимая группа, T – фиксированный максимальный квазирасщепимый тор группы $\mathcal{G}$, B — фиксированная подгруппа Бореля, содержащая тор T, противоположную борелевскую подгруппу мы обозначим через B^-. Метод основан на возможности для каждого нецентрального класса сопряженности группы $\mathcal{G}^+(K)$ найти представитель g этого класса с разложением Гаусса $g = vhu$ с любым, наперед заданным, элементом $h \in T \cap \mathcal{G}^+(K)$, где $u, v \in \mathcal{G}^+(K)$ – элементы из унипотентных радикалов подгрупп B и B^- соответственно.

В работе Курсова [5] изучались произведения коммутаторов в полной линейной группе над телом, см. также [6]. Предполагалось, что тело конечномерно над своим центром и не совпадает с ним. Позже результат Курсова был переоткрыт Гордеевым и Егорченковой в работе [4], см. также [3]. В этой работе был доказан соответствующий аналог разложения Гаусса с заданной полупростой частью.

Однако, этот аналог не позволяет задавать диагональный множитель h полностью: последний элемент на диагонали можно задавать только с точностью до множителя из коммутанта мультипликативной группы тела. В связи с этим, такое разложение не позволяет доказать, что любой нецентральный элемент элементарной группы представляется в виде одного коммутатора. Тем не менее в [5] доказано, что, если любой элемент коммутанта мультипликативной группы тела представляется в виде произведения не более, чем c коммутаторов, то любой нецентральный элемент элементарной группы также представляется в виде произведения не более, чем c коммутаторов элементов полной линейной группы.

На самом деле, без ограничения на коммутаторные длины элементов коммутанта мультипликативной группы, представить произвольный нецентральный элемент элементарной группы в виде одного коммутатора невозможно.

Хорошо известно, что если элемент $\tau \in D^*$ мультипликативной группы тела D не принадлежит коммутанту $[D^*, D^*]$ его мультипликативной группы, то диагональная матрица $g = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \tau)$ не принадлежит элементарной подгруппе, поскольку имеет нетривиальный определитель Дьедонне.

Читателю, знакомому с основами теории моделей, мы оставим в качестве упражнения вывести из этого факта и теоремы о компактности следующее утверждение: для любых натуральных $n \geqslant 2$ и $d \geqslant 1$ существует натуральное N, такое, что для любого (не обязательно даже конечномерного над центром) тела D и любого $\tau \in D^*$, если τ нельзя выразить в виде произведения N коммутаторов в мультипликативной группе, то $\operatorname{diag}(1, \dots, 1, \tau)$ нельзя выразить в виде произведения d коммутаторов в полной линейной группе матриц размера $n \times n$. При этом, если мы имеем $\tau \in [D^*, D^*]$, то матрица $\operatorname{diag}(1, \dots, 1, \tau)$ лежит в элементарной подгруппе. Таким образом, если в коммутанте мультипликативной группы есть элемент большой коммутаторной длины, то в элементарной группе также есть элемент большой коммутаторной длины.

В настоящей статье мы докажем эффективную версию этого утверждения, а именно, покажем, что можно взять $N = d(8n^2 - 13n + 8) - 2n^2 + 3n - 1$ (теорема 1). Таким образом, имеется оценка снизу на максимальную коммутаторную длину в элементарной группе (следствие 1), зависящая от максимальной коммутаторной длины в коммутанте мультипликативной группы, и, как следствие, – необходимое условие для представления любого нецентрального элемента в виде коммутатора (следствие 2).

Однако, основной результат работ [5] и [4] все же не является оптимальным. Как мы покажем, для тел, конечномерных над своим центром, в которых любой элемент коммутанта мультипликативной группы тела представляется в виде произведения не более, чем c коммутаторов, любой элемент элементарной группы представляется в виде произведения не более, чем $\lceil \frac{c}{n} \rceil$ коммутаторов элементов полной линейной группы матриц размера $n \times n$, а также в виде произведения не более, чем $\lceil \frac{c}{n-2} \rceil$ коммутаторов элементов элементарной группы, где через $\lceil x \rceil$ обозначается верхняя целая часть числа x (теорема 2). В частности имеется достаточное условие для представления любого нецентрального элемента в виде коммутатора (следствия 3 и 4).

Я выражаю благодарность своему учителю Николаю Вавилову за внимательное чтение работы и ценные замечания.

§2. Основные обозначения

2.1. Полная и элементарная линейные группы. Пусть D – тело, $D^* = D \setminus \{0\}$ – его мультипликативная группа. Зафиксируем натуральное число $n \geqslant 2$. Через $\mathrm{GL}(n, D)$ обозначается полная линейная группа степени n над телом D. Через $\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ обозначается диагональная матрица с элементами $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ по диагонали. Через $h_{i,j}(\varepsilon)$, где $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, и $\varepsilon \in D^*$, мы обозначаем диагональную матрицу, у которой в i-й диагональной позиции стоит элемент ε, в j-й диагональной позиции стоит элемент ε^{-1}, а в остальных диагональных позициях стоят единицы.

Обозначим через $t_{i,j}(\xi)$, где $1 \leqslant i,j \leqslant n$, $i \neq j$, $\xi \in D$, элементарную трансвекцию, то есть матрицу, у которой в позиции (i,j) стоит элемент ξ, а в остальных позициях она совпадает с единичной матрицей.

Также введем обозначение для корневых подгрупп $X_{i,j} = t_{i,j}(D) \leqslant \mathrm{GL}(n,D)$.

Хорошо известно, что элементарные трансвекции удовлетворяют следующим соотношениям.

$$t_{i,j}(\xi)t_{i,j}(\zeta) = t_{i,j}(\xi+\zeta), \tag{1}$$

$$[t_{i,j}(\xi), t_{p,q}(\zeta)] = \begin{cases} t_{i,q}(\xi\zeta), & \text{если } j = p, i \neq q, \\ e, & \text{если } j \neq k, i \neq q, \end{cases} \tag{2}$$

$$t_{i,j}(\zeta)t_{j,i}(\xi) = h_{i,j}(\zeta)h_{i,j}(\zeta^{-1}+\xi)t_{j,i}((1+\xi\zeta)\xi)t_{i,j}((1+\zeta\xi)^{-1}\zeta),$$
$$\text{если } \zeta, 1+\zeta\xi \in D^*, \tag{3}$$

$$t_{i,j}(\xi)t_{j,i}(-\xi^{-1})t_{i,j}(\xi) = t_{j,i}(-\xi^{-1})t_{i,j}(\xi)t_{j,i}(-\xi^{-1}). \tag{4}$$

Подгруппа

$$E(n,D) = \big\langle t_{i,j}(\xi)\colon 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \xi \in D \big\rangle,$$

порожденная всеми элементарными трансвекциями, называется *элементарной группой*. В случае тела элементарная группа совпадает с ядром определителя Дьедонне $\det\colon \mathrm{GL}(n,D) \to D^*/[D^*,D^*]$, см., например, [1], в частности, мы имеем $[\mathrm{GL}(n,D),\mathrm{GL}(n,D)] \leqslant E(n,D)$. На самом деле, кроме случая, когда $n = 2$ и $D = \mathbb{F}_2$, мы имеем $E(n,D) = [\mathrm{GL}(n,D),\mathrm{GL}(n,D)]$.

2.2. Подгруппы треугольных и диагональных матриц. Через $U,V \leqslant \mathrm{GL}(n,D)$ мы обозначаем группы верхних и нижних унитреугольных матриц соответственно, то есть треугольных матриц с единицами на диагонали. Отметим, что $U,V \leqslant E(n,D)$.

Положим

$$H = \{\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\colon \varepsilon_i \in D^*\} \leqslant \mathrm{GL}(n,D).$$

Отметим, что определитель Дьедонне матрицы $h = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ равен образу произведения $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$ в фактор группе $D^*/[D^*, D^*]$. Таким образом, элемент h лежит в элементарной группе тогда и только тогда, когда произведение $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$ лежит в коммутанте группы D^*.

Положим $B = HU \leqslant \mathrm{GL}(n, D)$ – подгруппа верхнетреугольных матриц, и $B^- = HV \leqslant \mathrm{GL}(n, D)$ – подгруппа нижнетреугольных матриц.

Для $\kappa \in \mathbb{N}_0^{n-1}$ будем обозначать через $H_{\leqslant\kappa}$ множество элементов $h \in H$, которые могут быть представлены в виде произведения элементов вида $h_{i,i+1}(\varepsilon)$, где $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и $\varepsilon \in D^*$, таким образом, что количество множителей с заданным i не превосходит κ_i. Порядок множителей при этом может быть любым.

2.3. Коммутаторные длины. Пусть G – группа. Будем обозначать через $[G, G]_{\leqslant k}$ множество элементов, которые можно записать в виде произведения не более, чем k коммутаторов. Для каждого элемента $g \in [G, G]$ будем обозначать через $l_G(g)$ его коммутаторную длину, то есть наименьшее такое k, что $g \in [G, G]_{\leqslant k}$. Если группа, о которой идет речь, понятна из контекста, мы будем писать просто $l(g)$.

Через $Z(G)$ мы будем обозначать центр группы G.

Положим
$$c = \sup l_{D^*}(\xi), \qquad \xi \in [D^*, D^*].$$
Кроме случая $n = 2$, $D = \mathbb{F}_2$, положим
$$C = \sup l_{\mathrm{GL}(n,D)}(g), \qquad g \in E(n, D) \setminus Z(E(n, D)).$$
При $n \geqslant 3$, также положим
$$C' = \sup l_{E(n,D)}(g), \qquad g \in E(n, D) \setminus Z(E(n, D)).$$

Цель настоящей статьи – дать оценки чисел C и C' при заданном значении числа c.

Отметим также, что если $g \in Z(E(n, D))$, то мы можем разложить его в произведение $g = g_1 g_2$, где g_2 – произвольный нецентральный коммутатор элементов группы $E(n, D)$ (скажем, $g_2 = [t_{12}(1), t_{21}(1)]$), и $g_1 = g g_2^{-1}$ – не центральный элемент. Таким образом, длина элемента g в коммутаторах элементов группы $\mathrm{GL}(n, D)$ (соответственно $E(n, D)$) не превосходит $C + 1$ (соответственно $C' + 1$).

§3. Оценка снизу

В этом параграфе мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть D – произвольное тело. Пусть $\tau \in D^*$, такой, что матрица* $\mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, \tau)$ *представима в виде произведения d коммутаторов в группе* $\mathrm{GL}(n, D)$*, где $d \geqslant 1$. Тогда элемент τ представим в виде произведения*

$$d(8n^2 - 13n + 8) - 2n^2 + 3n - 1$$

коммутаторов в группе D^*.

Из этой теоремы мы получаем следующее следствие.

Следствие 1. *В наших обозначениях, если $c \geqslant 1$, то выполнено следующее неравенство.*

$$C \geqslant \frac{c + 2n^2 - 3n + 1}{8n^2 - 13n + 8}.$$

Разобьем доказательство на несколько лемм.

Введем следующие обозначения. Через $e_k \in \mathbb{N}_0^{n-1}$ мы будем обозначать строку, у которой стоит единица на k-й позиции и нули на остальных.

Будем обозначать через U_k – подгруппу в группе U, состоящую из верхне унитреугольных матриц, у которых в позиции $(k, k+1)$ стоит ноль. Используя (2), несложно видеть, что U является полупрямым произведением $U = U_k \leftthreetimes X_{k,k+1}$, а также, что $U_k^{t_{k+1,k}(\theta)} \leqslant U$ для любого $\theta \in D$.

Аналогично определим группу V_k. Тогда $V = V_k \leftthreetimes X_{k+1,k}$.

Лемма 1. *Пусть $1 \leqslant k \leqslant n-1$, и пусть $\xi \in D$. Тогда имеет место включение*

$$UVUt_{k+1,k}(\xi) \leqslant H_{\leqslant 2e_k} UVU.$$

Доказательство. Пусть $u_1, u_2 \in U$ и $v \in V$. Докажем, что

$$u_1 v u_2 t_{k+1,k}(\xi) \in H_{\leqslant 2e_k} UVU.$$

Запишем элемент u_2 в виде $u_2 = u_2' t_{k,k+1}(\zeta)$, где $u_2' \in U_k$. Аналогично, запишем элемент v в виде $v = v' t_{k+1,k}(\eta)$, где $v' \in V_k$.

Случай 1: $\zeta = 0$. Используя (2), мы получаем

$$u_1 v u_2 t_{k+1,k}(\xi) = u_1 v u_2' t_{k+1,k}(\xi) = u_1 v t_{k+1,k}(\xi) (u_2')^{t_{k+1,k}(\xi)} \in UVU.$$

Случай 2: $\zeta \in D^*$, но $\zeta\xi \neq -1$. Пользуясь (3), мы получаем

$$u_1vu_2t_{k+1,k}(\xi) = u_1vu_2't_{k,k+1}(\zeta)t_{k+1,k}(\xi)$$
$$= u_1vu_2'h_{k,k+1}(\zeta)h_{k,k+1}(\zeta^{-1}+\xi)t_{k+1,k}((1+\xi\zeta)\xi)t_{k,k+1}((1+\zeta\xi)^{-1}\zeta).$$

Далее, пользуясь тем, что подгруппа H нормализует подгруппы U,V и U' мы можем вынести множители $h_{k,k+1}(\zeta_k)h_{k,k+1}(\zeta_k^{-1}+\xi)$ в начало, после чего сделать такое же преобразование, как и в первом случае, получив, что $u_1vu_2t_{k+1,k}(\xi) \in H_{\leqslant 2e_k}UVU$.

Случай 3: $\eta\zeta \neq -1$. Действуя аналогично предыдущим случаям, мы получаем, что $u_1vt_{k,k+1}(\zeta) \in H_{\leqslant 2e_k}UV$. Таким образом,

$$\begin{aligned} u_1vu_2 &= u_1vu_2't_{k,k+1}(\zeta) = u_1vt_{k,k+1}(\zeta)(u_2')^{t_{k,k+1}(\zeta)} \\ &\in H_{\leqslant 2e_k}UV(u_2')^{t_{k,k+1}(\zeta)}, \end{aligned}$$

где $(u_2')^{t_{k,k+1}(\zeta)} \in U_k$. Далее применив вычисление из первого случая, мы получаем, что $u_1vu_2t_{k+1,k}(\xi) \in H_{\leqslant 2e_k}UVU$.

Случай 4: $\zeta\xi = -1$ и $\eta\zeta = -1$, то есть $\eta = \xi$ и $\zeta = -\xi^{-1}$. В этом случае, используя (4), мы получаем:

$$\begin{aligned} u_1vu_2t_{k+1,k}(\xi) &= u_1v't_{k+1,k}(\eta)u_2't_{k,k+1}(\zeta)t_{k+1,k}(\xi) = \\ &= u_1v't_{k+1,k}(\xi)t_{k,k+1}(-\xi^{-1})t_{k+1,k}(\xi)(u_2')^{t_{k,k+1}(-\xi^{-1})t_{k+1,k}(\xi)} = \\ &= u_1v't_{k,k+1}(-\xi^{-1})t_{k+1,k}(\xi)t_{k,k+1}(-\xi^{-1})(u_2')^{t_{k,k+1}(-\xi^{-1})t_{k+1,k}(\xi)}. \end{aligned}$$

Аналогично первому случаю, мы получаем, что $u_1v't_{k,k+1}(-\xi^{-1}) \in UV$. Далее, $(u_2')^{t_{k,k+1}(-\xi^{-1})} \in U_k$, следовательно, $(u_2')^{t_{k,k+1}(-\xi^{-1})t_{k+1,k}(\xi)} \in U$. Таким образом, $u_1vu_2t_{k+1,k}(\xi) \in UVU$. □

Положим $\lambda_1 = 2(n-1)$ и $\lambda_i = 4(n-i)$ при $2 \leqslant i \leqslant n-1$.

Лемма 2. *Имеет место включение:*

$$UVUV \leqslant H_{\leqslant\lambda}UVU.$$

Доказательство. Несложно видеть, что любой элемент группы V может быть записан в виде произведения элементарных трансвекций $t_{k+1,k}(\xi)$, среди которых не более, чем $n-1$ трансвекций с $k=1$, и не более чем $2(n-k_0)$ трансвекций с $k=k_0$, для $2 \leqslant k_0 \leqslant n-1$. Утверждение, таким образом, следует из леммы 1. □

Лемма 3. *Имеет место равенство:*
$$\mathrm{GL}(n,D)=HUVU.$$

Доказательство. Известно, что $\mathrm{GL}(n,D) = H\cdot E(n,D)$, а группа $E(n,D)$ в свою очередь порождается подгруппами U и V. Остается применить лемму 2. $\square$

Отметим, что последняя лемма хорошо известна и верна для полулокальных колец, смотри, например, [7]. Похожий результат также можно найти в работе [17].

Положим $\mu=(6,3,\dots,3)\in\mathbb{N}_0^{n-1}$ (на всех позициях, кроме первой, стоят тройки).

Лемма 4. *Имеет место включение*
$$[H,H]_{\leqslant 1}\leqslant H_{\leqslant\mu}$$

Доказательство. Утверждение получается из следующего равенства в $\mathrm{GL}(2,D)$
$$\mathrm{diag}([\xi,\zeta],1)=h_{1,2}(\xi)h_{1,2}(\zeta)h_{1,2}(\xi^{-1}\zeta^{-1}). \qquad \square$$

Положим $\kappa^p=p\mu+(4p-1)\lambda$, где $p\in\mathbb{N}$. Таким образом, $\kappa^1=\mu+3\lambda$ и $\kappa^p=\kappa^{p-1}+\kappa_1+\lambda$ при $p\geqslant 2$.

Лемма 5. *Имеет место включение:*
$$[\mathrm{GL}(n,D),\mathrm{GL}(n,D)]_{\leqslant p}\leqslant H_{\leqslant\kappa^p}UVU.$$

Доказательство. База индукции: $p=1$. Используя лемму 3, тот факт, что подгруппа H нормализует подгруппы U и V, а также леммы 4 и 2, мы получаем
$$\begin{aligned}&[\mathrm{GL}(n,D),\mathrm{GL}(n,D)]_{\leqslant 1}\\ &\quad=[HUVU,HUVU]_{\leqslant 1}\leqslant[H,H]_{\leqslant 1}UVUVUVUVU\leqslant H_{\leqslant\kappa^1}UVU.\end{aligned}$$

Переход от $p-1$ к p. Используя предположение индукции, базу индукции, тот факт, что подгруппа H нормализует подгруппы U и V, а также лемму 2, мы получаем
$$\begin{aligned}&[\mathrm{GL}(n,D),\mathrm{GL}(n,D)]_{\leqslant p}\\ &=[\mathrm{GL}(n,D),\mathrm{GL}(n,D)]_{\leqslant p-1}[\mathrm{GL}(n,D),\mathrm{GL}(n,D)]_{\leqslant 1}\\ &\leqslant H_{\leqslant\kappa^{p-1}}UVUH_{\leqslant\kappa^1}UVU\leqslant H_{\leqslant\kappa^{p-1}+\kappa^1}UVUVU\leqslant H_{\kappa^p}UVU. \qquad \square\end{aligned}$$

Лемма 6. *Для любого* $\kappa \in \mathbb{N}_0^{d-1}$ *имеет место равенство*

$$(H_{\leqslant\kappa}UVU) \cap H = H_{\leqslant\kappa}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}(H_{\leqslant\kappa}UVU) \cap H = (H_{\leqslant\kappa}UVU) \cap B \cap H = (H_{\leqslant\kappa}U(V \cap B)U) \cap H \\ = (H_{\leqslant\kappa}U) \cap H = H_{\leqslant\kappa}(U \cap H) = H_{\leqslant\kappa}. \quad \square\end{aligned}$$

Отвлечемся на время от полной линейной группы, и докажем две чисто теоретико-групповые леммы.

Пусть G – произвольная группа. Напомним, что для каждого элемента $g \in [G,G]$ мы обозначаем через $l(g)$ его коммутаторную длину, то есть наименьшее такое k, что $g \in [G,G]_{\leqslant k}$.

Лемма 7. *Пусть* $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q \in G$, *где* $q \geqslant 1$. *Положим* $a = a_1^{-1} \ldots a_p^{-1}$, *и* $b = b_1^{-1} \ldots b_q^{-1}$.*Пусть* w *– слово из букв* $a_1^{-1}, \ldots, a_p^{-1}, b_1, \ldots, b_q$, *где каждая буква встречается ровно один раз, причем буквы* a_i^{-1} *расположены друг относительно друга по возрастанию индексов. Предположим, что элемент группы* G, *представленный словом* w *равен единичному элементу. Тогда, если хотя бы один из элементов* a *и* b *лежит в коммутанте группы* G, *то второй элемент тоже лежит в коммутанте и выполнено неравенство:* $l(b) \leqslant l(a) + q - 1$.

Доказательство. Мы можем свести задачу к случаю, когда первой буквой в слове w является b_1. Для этого нужно переставить буквы в слове w по циклу соответствующим образом, после чего перенумеровать, опять же перестановкой по циклу, элементы a_i ,чтобы условие сохранилось. Элемент a, таким образом заменится на сопряженный, и его коммутаторная длина сохранится.

Итак, пусть буква b_1 первая. Рассмотрим последовательность преобразований слова w, состоящую из $q-1$ шагов, где на i-м шаге мы ставим букву b_{i+1} в начало, не меняя порядок остальных букв относительно друг друга. Один такой шаг не может увеличить коммутаторную длину представленного словом элемента более чем на 1. После применения всех преобразований мы получаем слово представляющее элемент $b^{-1}a$. Таким образом, $b^{-1}a \in [G,G]_{\leqslant q-1}$, откуда следует требуемое утверждение. $\square$

Лемма 8. *Пусть* $a_1, \ldots, a_k \in G$, *такие, что* $a_1 \ldots a_k = e$. *Тогда выполнено неравенство* $l(a_1^{-1} \ldots a_k^{-1}) \leqslant \max(0, k-2)$.

Доказательство. Для $k=1$ утверждение очевидно, пусть $k \geqslant 2$.

Ясно, что $l(a_1^{-1} \dots a_k^{-1}) = l((a_1^{-1} \dots a_k^{-1})^{-1}) = l(a_k \dots a_1)$. Далее, $l(a_k \dots a_1) = l(a_1 a_k \dots a_2)$, поскольку эти элементы сопряжены. Наконец, слово $a_1 a_k \dots a_2$ может быть получено из слова $a_1 \dots a_k$ с помощью $k-2$ преобразований, где i-е преобразование ставит букву a_{k-i} в конец, не меняя порядок остальных букв относительно друг друга. Один такой шаг не может увеличить коммутаторную длину представленного словом элемента более чем на 1. Таким образом $l(a_1 a_k \dots a_2) \leqslant k-2$. □

Вернемся теперь к полной линейной группе над телом. Пусть $\kappa \in \mathbb{N}_0^{n-1}$. Положим

$$s(\kappa) = \max(0, \kappa_1 - 2) + \sum_{i=2}^{n-1} \max(0, \kappa_i - 1).$$

Лемма 9. *Пусть $\kappa \in \mathbb{N}_0^{n-1}$, и пусть $\tau \in D^*$ таково, что матрица $g = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, \tau) \in H_{\leqslant \kappa}$. Тогда $\tau \in [D^*, D^*]_{\leqslant s(\kappa)}$.*

Доказательство. Если $\kappa_{n-1} = 0$, то $\tau = 1$, и утверждение тривиально. Будем считать, что $\kappa_{n-1} \neq 0$. Более того, не умаляя общности можно считать, что $\kappa_i \neq 0$ при всех i. Действительно, иначе рассмотрим наибольшее k, такое, что $\kappa_k = 0$. Несложно видеть, что в таком случае мы имеем

$$\operatorname{diag}(1, \dots, 1, \tau) \in H_{\leqslant (\kappa_{k+1}, \dots, \kappa_{n-1})} \leqslant GL(n-k, D),$$

и мы можем доказывать утверждение для такого элемента.

Итак, пусть $\kappa_i \neq 0$ при всех i. Пусть g является произведением элементов $h_{i,i+1}(\xi_{i,j})$, $1 \leqslant j \leqslant \kappa_i$, в некотором порядке. Причем мы будем считать, что при фиксированном i эти элементы расположены относительно друг друга по возрастанию индекса j.

Положим $\varepsilon_i = \xi_{i,1}^{-1} \dots \xi_{i,\kappa_i}^{-1} \in D^*$. Из леммы 8 и того факта, что $g_{11} = 1$, следует, что $l(\varepsilon_1) \leqslant \max(0, \kappa_1 - 2)$.

При $2 \leqslant i \leqslant n-1$ из леммы 7 и того факта, что $g_{i,i} = 1$, следует, что

$$l(\varepsilon_i) \leqslant l(\varepsilon_{i-1}) + \max(0, \kappa_i - 1).$$

Таким образом,

$$l(\tau) = l(\varepsilon_{n-1}) = l(\varepsilon_1) + \sum_{i=2}^{n-1} (l(\varepsilon_i) - l(\varepsilon_{i-1})) \leqslant s(\kappa). \qquad \square$$

Теперь мы в состоянии завершить доказательство теоремы 1. Пусть

$$g = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, \tau) \in [\mathrm{GL}(n, D), \mathrm{GL}(n, D)]_{\leqslant d}.$$

Используя леммы 5, 6 и 9, мы получаем, что $\tau \in [D^*, D^*]_{\leqslant s(\kappa^d)}$, и, как несложно видеть,

$$s(\kappa^d) = d(8n^2 - 13n + 8) - 2n^2 + 3n - 1.$$

§4. Оценка сверху

В этом параграфе мы докажем следующую теорему, доказательство которой представляет собой модификацию доказательства основной теоремы работы [4].

Теорема 2. *Пусть D – тело с центром K. Пусть $1 < \dim_K D < \infty$ (таким образом K – бесконечное поле). Тогда в наших обозначениях имеет место неравенство*

$$C \leqslant \left\lceil \frac{c}{n} \right\rceil,$$

где через $\lceil x \rceil$ обозначается верхняя целая часть числа x.

При $n \geqslant 3$ также имеет место неравенство

$$C' \leqslant \left\lceil \frac{c}{n-2} \right\rceil.$$

В следующих двух леммах мы предполагаем, что выполнено условие теоремы 2.

Лемма 10. *Пусть $c = d_1 + \ldots + d_n$ – разбиение числа c, где $d_n \in \mathbb{N}_0$. Пусть $g \in E(n, D) \setminus Z(E(n, D))$. Тогда найдется $\gamma \in E(n, D)$, такой, что $g^\gamma = vhu$, где $v \in V$, $u \in U$ и $h = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_i \in [D^*, D^*]_{\leqslant d_i}$ при всех $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Доказательство. Пусть k – наименьшее целое число, такое, что $d_k \neq 0$.

База индукции: $k = n$, то есть $d_n = c$. Согласно теореме 2.1 работы [4] найдется элемент $\gamma \in E(n, D)$, такой, что $g^\gamma = vhu$, где $v \in V$, $u \in U$ и $h = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, \varepsilon_n)$. Так как $g \in E(n, D)$, то $\varepsilon_n \in [D^*, D^*] = [D^*, D^*]_{\leqslant c}$, что и требовалось.

Переход от $k + 1$ к k. По предположению индукции найдется $\gamma_1 \in E(n, D)$, такой, что $g^{\gamma_1} = v_1 h_1 u_1$, где $v_1 \in V$, $u_1 \in U$ и

$$h_1 = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, \widetilde{\varepsilon}_{k+1}, \dots, \widetilde{\varepsilon}_n),$$

где $\widetilde{\varepsilon}_i \in [D^*, D^*]_{\leqslant d_i}$ при $i \geqslant k+2$, и $\widetilde{\varepsilon}_{k+1} \in [D^*, D^*]_{\leqslant d_k + d_{k+1}}$.

Случай 1: $u_1 = u_1' t_{k,k+1}(\zeta)$, где $u_1' \in U_k$ и $\zeta \in D^*$. Разложим элемент $\widetilde{\varepsilon}_{k+1}$ в произведение $\widetilde{\varepsilon}_{k+1} = \varepsilon_{k+1}\theta$, где $\varepsilon_{k+1} \in [D^*, D^*]_{\leqslant d_{k+1}}$ и $\theta \in [D^*, D^*]_{\leqslant d_k}$.

Так как $\zeta \in D^*$, то $\theta = 1 + \xi\zeta$ для некоторого $\xi \in D$. Положим $\gamma = \gamma_1 t_{k+1,k}(\xi)$. Тогда, применяя (3), несложно видеть, что $g^\gamma = vhu$, где $v \in V$, $u \in U$ и

$$h = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, 1 + \zeta\xi, \varepsilon_{k+1}, \widetilde{\varepsilon}_{k+2}, \dots, \widetilde{\varepsilon}_n).$$

Остается заметить, что элемент $1+\zeta\xi$ сопряжен с элементом $1+\xi\zeta = \theta$ и, следовательно, имеет такую же коммутаторную длину.

Случай 2: $v_1 = v_1' t_{k+1,k}(\zeta)$, где $v_1' \in V_k$ и $\zeta \in D^*$. Доказательство аналогично предыдущему.

Случай 3: $u_1 \in U_k$ и $v_1 \in V_k$. Ясно, что если $\widetilde{\varepsilon}_{k+1} = 1$, то уже можно взять $\gamma = \gamma_1$. Будем считать, что $\widetilde{\varepsilon}_{k+1} \neq 1$. Положим $\gamma_2 = \gamma_1 t_{k,k+1}(1)$. Тогда

$$g^{\gamma_2} = t_{k,k+1}(-1) v_1 h_1 u_1 t_{k,k+1}(1) = v_1^{t_{k,k+1}(1)} h_1 [h_1^{-1}, t_{k,k+1}(-1)] u_1^{t_{k,k+1}(1)},$$

где $v_1^{t_{k,k+1}(1)} \in V$, $u_1^{t_{k,k+1}(1)} \in U_k$, и, так как $\widetilde{\varepsilon}_{k+1} \neq 1$, то

$$[h_1^{-1}, t_{k,k+1}(-1)] = t_{k,k+1}(\zeta),$$

где $\zeta \in D^*$. Таким образом, задача свелась к первому случаю. □

Лемма 11. *Пусть $g = vhu \in \mathrm{GL}(n, D)$, где $v \in V$, $u \in U$ и $h = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_i \in [D^*, D^*]_{\leqslant 1}$. Тогда $g \in [\mathrm{GL}(n, D), \mathrm{GL}(n, D)]_{\leqslant 1}$.*

Если, кроме того, элементы ε_1 и ε_2 равны единице, то

$$g \in [E(n, D), E(n, D)]_{\leqslant 1}.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon_i = [a_i, b_i]$, где $a_i, b_i \in D^*$. Если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, то мы можем считать, что a_2, $b_1 \in K$, $a_1 = (a_2 \dots a_n)^{-1}$, и $b_2 = (b_1 b_3 \dots b_n)^{-1}$.

Так как поле K бесконечно, то заменяя при $i \geqslant 2$ элементы a_i на $t_i a_i$, а также a_1 на $(t_2 \dots t_n)^{-1} a_1$ при подходящих $t_i \in K^*$, можно считать, что приведенные нормы элементов a_i попарно различны. Элементы ε_i не поменяются при такой замене. Условие $a_1 = (a_2 \dots a_n)^{-1}$ при этом сохранится, если мы это предполагали.

Положим

$$h_1 = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n), \qquad \tau = \mathrm{diag}(b_1, \dots, b_n),$$
$$h_2 = \tau h_1^{-1} \tau^{-1} = \mathrm{diag}(b_1 a_1^{-1} b^{-1}, \dots, b_n a_n^{-1} b_n^{-1}).$$

Таким образом $h = h_1 h_2$. Так как приведенные нормы элементов a_i, а значит, и элементов $b_i a_i b_i^{-1}$, попарно различны, то элементы h_1 и h_2 являются D-регулярными (см. определение 3.3 и предложение 3.4 работы [4]). По предложению 4.1 работы [4] найдутся $u' \in U$ и $v' \in V$, такие, что $v = [v', h_1]$ и $u = [h_2^{-1}, u']$.

Также как и в завершении доказательства основной теоремы работы [4] мы получаем, что

$$g = vhu = v' h_1 v'^{-1} u' h_2 u'^{-1} = v' h_1 v'^{-1} u' \tau h_1^{-1} \tau^{-1} u'^{-1} =$$
$$= [v' h_1 v'^{-1}, u' \tau v^{-1}] \in [\mathrm{GL}(n, D), \mathrm{GL}(n, D)]_{\leqslant 1}.$$

При этом, если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, то согласно нашим предположениям $h_1, \tau \in E(n, D)$, и, следовательно, $g \in [E(n, D), E(n, D)]_{\leqslant 1}$. □

Завершим доказательство теоремы 2. Пусть $g \in E(n, D) \setminus Z(E(n, D))$. Докажем, что $g \in [\mathrm{GL}(n, D), \mathrm{GL}(n, D)]_{\lceil \frac{c}{n} \rceil}$.

По лемме 10 можно считать, что $g = vhu$, где $v \in V$, $u \in U$ и $h = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_i \in [D^*, D^*]_{\leqslant \lceil \frac{c}{n} \rceil}$ при всех $1 \leqslant i \leqslant n$. Для каждого i пусть $\varepsilon_i = \varepsilon_i' \varepsilon_i''$, где $\varepsilon_i' \in [D^*, D^*]_{\leqslant \lceil \frac{c}{n} \rceil - 1}$ и $\varepsilon_i'' \in [D^*, D^*]_{\leqslant 1}$. Положим $h' = \mathrm{diag}(\varepsilon_1', \dots', \varepsilon_n')$ и $h'' = \mathrm{diag}(\varepsilon_1'', \dots, \varepsilon_n'')$. Также положим $\widetilde{v} = v^{h'}$.

Таким образом, мы имеем $g = vhu = h' \widetilde{v} h'' u$. По лемме 11 мы получаем, что $\widetilde{v} h'' u \in [\mathrm{GL}(n, D), \mathrm{GL}(n, D)]_{\leqslant 1}$, также ясно, что $h' \in [\mathrm{GL}(n, D), \mathrm{GL}(n, D)]_{\leqslant \lceil \frac{c}{n} \rceil - 1}$. Таким образом, $g \in [\mathrm{GL}(n, D), \mathrm{GL}(n, D)]_{\lceil \frac{c}{n} \rceil}$.

Пусть $n \geqslant 3$. Докажем, что $g \in [E(n, D), E(n, D)]_{\lceil \frac{c}{n-2} \rceil}$.

По лемме 10 можно считать, что $g = vhu$, где $v \in V$, $u \in U$ и $h = \mathrm{diag}(1, 1, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_i \in [D^*, D^*]_{\leqslant \lceil \frac{c}{n-2} \rceil}$ при всех $3 \leqslant i \leqslant n$. Аналогично предыдущей выкладке для каждого i пусть $\varepsilon_i = \varepsilon_i' \varepsilon_i''$, где $\varepsilon_i' \in [D^*, D^*]_{\leqslant \lceil \frac{c}{n-2} \rceil - 1}$ и $\varepsilon_i'' \in [D^*, D^*]_{\leqslant 1}$. Положим $h' = \mathrm{diag}(1, 1 \varepsilon_3', \dots, \varepsilon_n')$ и $h'' = \mathrm{diag}(1, 1, \varepsilon_3'', \dots, \varepsilon_n'')$. Также положим $\widetilde{v} = v^{h'}$.

Как и раньше $g = h' \widetilde{v} h'' u$. По лемме 11 мы имеем

$$\widetilde{v} h'' u \in [E(n, D), E(n, D)]_{\leqslant 1}.$$

Остается показать, что $h' \in [E(n, D), E(n, D)]_{\leqslant \lceil \frac{c}{n-2} \rceil - 1}$.

Для краткости положим $d = \lceil \frac{c}{n-2} \rceil - 1$. Пусть

$$\varepsilon_i' = [a_{i,1}, b_{i,1}] \dots [a_{i,d}, b_{i,d}].$$

Положим

$$h_{a,k} = \mathrm{diag}((a_{3,k} \dots a_{n,k})^{-1}, 1, a_{3,k}, \dots, a_{n,k}),$$
$$h_{b,k} = \mathrm{diag}(1, (b_{3,k} \dots b_{n,k})^{-1}, b_{3,k}, \dots, b_{n,k}).$$

Таким образом, $h' = [h_{a,1}, h_{b,1}] \dots [h_{a,d}, h_{b,d}] \in [E(n,D), E(n,D)]_{\leqslant d}$.

§5. Представление одним коммутатором

Рассмотрим следствия из результатов настоящей работы, касающиеся вопроса о представлении любого нецентрального элемента группы $E(n,D)$ в виде одного коммутатора.

Во-первых, из следствия 1 мы получаем следующее следствие.

Следствие 2. *Пусть D – произвольное тело. Тогда для того, чтобы любой нецентральный элемент группы $E(n,D)$ представлялся в виде коммутатора элементов из группы $\mathrm{GL}(n,D)$, необходимо, чтобы любой элемент коммутанта группы D^* представлялся ввиде произведения не более чем $6n^2 - 10n + 7$ коммутаторов.*

Во-вторых, из теоремы 2 мы получаем следующие следствия.

Следствие 3. *Пусть D – тело с центром K. Пусть $1 < \dim_K D < \infty$. Тогда для того, чтобы любой нецентральный элемент группы $E(n,D)$ представлялся в виде коммутатора элементов из группы $\mathrm{GL}(n,D)$, достаточно, чтобы любой элемент коммутанта группы D^* представлялся ввиде произведения не более чем n коммутаторов.*

Следствие 4. *Пусть D – тело с центром K. Пусть $1 < \dim_K D < \infty$, и пусть $n \geqslant 3$. Тогда для того, чтобы любой нецентральный элемент группы $E(n,D)$ представлялся в виде коммутатора элементов из группы $E(n,D)$, достаточно, чтобы любой элемент коммутанта группы D^* представлялся ввиде произведения не более чем $n-2$ коммутаторов.*

Будем обозначать через $\mathrm{GL}(D)$ *стабильную полную линейную группу*, то есть $\mathrm{GL}(D) = \varinjlim \mathrm{GL}(n,D)$, где предел берется относительно вложений.

$$\mathrm{GL}(n,D) \to \mathrm{GL}(n+1,D), \qquad g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подгруппа $E(D) \leqslant \mathrm{GL}(D)$ определяется как порожденная элементарными трансвекциями. Иными словами, $E(D) = \varinjlim E(n, D)$.

В случае, если $c < \infty$, следующее следствие получается непосредственно из предыдущего. Однако, воспользовавшись доказательством теоремы 2, мы можем увидеть, что накладывать условие $c < \infty$ не обязательно.

Следствие 5. *Пусть D – тело с центром K. Пусть $1 < \dim_K D < \infty$. Тогда любой элемент группы $E(D)$ представим в виде коммутатора элементов из группы $E(D)$.*

Доказательство. Пусть $g \in E(D)$. Так как центр группы $\mathrm{GL}(D)$ тривиален, то найдется $n > 2$ такое, что $g \in E(n, D) \setminus Z(E(n, D))$.

По теореме 2.1.работы [4], на которую мы ссылались при доказательстве базы индукции в лемме 10, можно считать, что $g = vhu$, где $v \in V$, $u \in U$ и $h = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, \tau)$. Так как $g \in E(n, D)$, то $\tau \in [D^*, D^*]$, следовательно, $\tau \in [D^*, D^*]_{\leqslant d}$ при некотором d.

Увеличивая число n, если необходимо, и сопрягая g матрицей перестановки так, чтобы сохранилось предыдущее предположение, можно считать, что $n \geqslant d + 2$.

В таком случае, из доказательства леммы 10 следует, что элемент g сопряжен с элементом $g_1 = v_1 h_1 u_1$ где $v_1 \in V$, $u_1 \in U$ и $h_1 = \mathrm{diag}(1, 1, \varepsilon_3 \dots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_i \in [D^*, D^*]_{\leqslant 1}$.

Тогда по лемме 11, элемент g_1, а значит, и элемент g, представляется ввиде коммутатора элементов группы $E(n, D)$. $\square$

Список литературы

1. Э. Артин, *Геометрическая алгебра.* Наука, Москва, 1969.
2. Н. Л. Гордеев, Б. Э. Кунявский, Е. Б. Плоткин, *Вербальные отображения и вербальные отображения с константами простых алгебраических групп.* — Доклады РАН **471**, No. 2 (2016), 136–138.
3. Е. А. Егорченкова, *Вербальные отображения простых алгебраических групп над бесконечными полями*, Кандидатская диссертация, Санкт-Петребург, 2019.
4. Е. А. Егорченкова, Н. Л. Гордеев, *Произведения коммутаторов полной линейной группы над телом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **470** (2018), 88–104.
5. В. В. Курсов, *О коммутанте полной линейной группы над телом.* — Докл. АН БССР (1979), 869–871.
6. В. В. Курсов, *Коммутаторные свойства линейных групп*, Кандидатская диссертация, Минск, 1984.
7. Z. I. Borevich, *Parabolic subgroups in linear groups over a semilocal ring.* — Vestnik Leningrad. Univ. (1976), no. 13, 16–24.

8. V. Chernousov, E. W. Ellers, N. Gordeev, *Gauss decomposition with prescribed semisimple part: short proof.* — J. Algebra **229** (2000), no. 1, 314–332.
9. Ellers E. W., Gordeev N. *Gauss decomposition with prescribed semisimple part in Chevalley groups. III. Finite twisted groups.* — Comm. Algebra **24**, No. 14 (1996), 4447–4475.
10. E. W. Ellers, N. Gordeev. *On the conjectures of J. Thompson and O. Ore.* — Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), 3657–3671.
11. N. Gordeev, *Sums of orbits of algebraic groups. I.* — J. Algebra **295**, No. 1 (2006), 62–80.
12. N. L. Gordeev, J. Saxl, *Products of conjugacy classes in Chevalley groups over local rings*. — Алгебра и анализ **17**, No. 2 (2005), 96–107.
13. C. Y. Hui, M. Larsen, A. Shalev, *The Waring problem for Lie groups and Chevalley groups*. — Israel J. Math. **210** (2015), 81–100.
14. J. Morita, E. Plotkin, *Prescribed Gauss decompositions for Kac–Moody groups over fields*. — Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **106** (2001), 153–163.
15. N. Gordeev B. Kunyavskii E. P., *Word maps on perfect algebraic groups.* — International Journal of Algebra and Computation **28** (2018), 1487–1515.
16. N. Gordeev B. Kunyavskii E. P., *Word maps, word maps with constants and representation varieties of one-relator groups.* — J. Algebra **500** (2018), 390–424.
17. A. Smolensky, B. Sury, N. Vavilov, *Gauss decomposition for Chevalley groups, revisited*. — International J. Group Theory **1**, No. 1 (2012), 3–16.
18. S.-K. Ye, S. Chen, C.-S. Wang, *Gauss decomposition with prescribed semisimple part in quadratic groups.* — Comm. Algebra **37** (2009), 3054–3063.

Gvozdevsky P. B. Commutator lengths in general linear group over a skew-field.

We give an upper and lower estimate for the maximal commutator length of a noncentral element of the elementary subgroup of the general linear group over a skew-field based on the maximal commutator length of an element of the multiplicative group of that skew-field.

Лаборатория им. П. Л. Чебышева
С.-Петербургский гос. университет
14 линия В. О., дом 29Б
С.-Петербург 199178 Россия
E-mail: gvozdevskiy96@gmail.com

Поступило 31 мая 2020 г.