Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 492, 2020 г.

С. В. Востоков, И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова

ИНВАРИАНТЫ КУРИХАРЫ И УСТРАНЕНИЕ ВЫСШЕГО ВЕТВЛЕНИЯ

Авторы посвящают эту работу Анатолию Владимировичу Яковлеву

§1. Обозначения и основные определения

Будем использовать следующие обозначения:
p – фиксированное простое число, $p > 2$;
$v_p(x)$ – p-адическое нормирование p-адического числа x.

1.1. Дискретно нормированные поля. Для дискретно нормированного поля K обозначим через v_K его нормирование, через $\overline{K}$ – его поле вычетов, и, если $\operatorname{char}\overline{K} = p$, положим $e_K = v_K(p)$. Элемент π, такой, что $v_K(\pi) = 1$, называется униформизирующей поля K.

Будем использовать следующие стандартные обозначения:
$O_K = \{x \in K \mid v_K(x) \geqslant 0\}$;
$U_K = \{x \in K \mid v_K(x) = 0\}$;
$U_K(n) = \{x \in K \mid v_K(x-1) \geqslant n\}$ для $n \in \mathbb{N}$.
Положим $W_K = \{x \in U_K(1) \mid p \nmid v_K(x-1), v_K(x-1) < \frac{pe_K}{p-1}\}$.

Пусть L/K – расширение дискретно нормированных полей, v_L – дискретное нормирование поля L, и v_L индуцирует нормирование w поля K. Обозначим через $e_{L/K}$ индекс $w(K^*)$ в $v_L(L^*)$.

Конечное расширение L/K дискретно нормированных полей, таких, что $\operatorname{char}\overline{K} = p$, называется

• неразветвленным, если $e_{L/K} = 1$ и расширение $\overline{L}/\overline{K}$ сепарабельно;

• ручным, если $p \nmid e_{L/K}$ и расширение $\overline{L}/\overline{K}$ сепарабельно;

• свирепым, если $e_{L/K} = 1$ и расширение $\overline{L}/\overline{K}$ чисто несепарабельно;

• вполне разветвленным, если $e_{L/K} = |L : K|$.

Ключевые слова: высшие локальные поля, дикое ветвление, кэлеровы дифференциалы.

Работа поддержана грантом РНФ 16-11-10200.

Через v_0 будем обозначать такое (ненормализованное) нормирование рассматриваемого дискретно нормированного поля, для которого выполнено $v_0(p) = 1$.

Пусть L/K – конечное сепарабельное расширение дискретно нормированных полей, таких, что $\operatorname{char} K = 0$, $\operatorname{char} \overline{K} = p$. Глубиной ветвления расширения L/K называется

$$d_{L/K} = \frac{1}{e_L} \min\Big\{ v_L\Big(\frac{\operatorname{Tr}_{L/K} a}{a}\Big) \mid a \in L^* \Big\}.$$

1.2. Двумерные локальные поля. Пусть K – двумерное локальное поле. Будем обозначать $K^{(1)} = \overline{K}$, $K^{(0)} = \overline{K^{(1)}}$. Для всех рассматриваемых двумерных полей K предполагаем, что они имеют смешанную характеристику, т. е. $\operatorname{char} K = 0$, $\operatorname{char} \overline{K} = p > 0$, а поле $K^{(0)}$ совершенно. Для любого двумерного поля K смешанной характеристики применимы обозначения из пункта 1.1.

Обозначим через $\overline{v}_K = (v_{\overline{K}}, v_K) : K \to \mathbb{Z}^2$ нормирование ранга 2 поля K; здесь $\mathbb{Z}^2$ предполагается линейно упорядоченным в следующем смысле: $(a, b) < (c, d)$, если $b < d$ или $b = d$ и $a < c$.

Для данного нормирования $\overline{v}_K$ определим локальные параметры: униформизирующую π, для которой выполнено $\overline{v}_K(\pi) = (0, 1)$, и "второй локальный параметр" t, для которого выполнено $\overline{v}_K(t) = (1, 0)$.

Подполем констант поля K называется его максимальное подполе, такое, что его поле вычетов (относительно v_K) совершенно. В частности, если последнее поле вычетов поля K конечно, то подполем констант поля K является алгебраическое замыкание $\mathbb{Q}_p$ в K.

Пусть K – двумерное поле, k – его подполе констант. Поле K называется стандартным, если $e_{K/k} = 1$. Стандартные поля – это в точности поля, которые можно представить в виде $k\{\{t\}\}$, см. [8, §1] или [9].

Двумерное поле K называется почти стандартным, если существует неразветвленное расширение L/K, такое, что поле L стандартно.

Пусть K – двумерное поле, k – его подполе констант. Конечное расширение L/K называется *константным*, если $L = lK$, где l – алгебраическое расширение поля k.

Пусть K – двумерное поле, L – такое стандартное поле, что $K \subset L$, расширение L/K конечное и константное. Положим

$$m_f(K) = |\overline{L} : \overline{K}|_{\text{insep}}.$$

Величина $m_f(K)$ не зависит от выбора поля L, см. [6], лемма 2.2.

1.3. Классификация Курихары и связанные с ней инварианты. Пусть $K_0 = k\{\{t\}\}$ – стандартное двумерное поле. Для $x \in K_0$ определим формальную производную $\frac{\partial x}{\partial t}$ следующим образом. Если $x = \sum a_i t^i$, где $a_i \in k$, положим

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sum i a_i t^{i-1}.$$

Легко видеть, что $\frac{\partial x}{\partial t}$ является корректно определенным элементом поля K_0.

Пусть K_0 и L_0 – такие стандартные поля, что $K_0 \subset L_0$, и пусть t, t' – вторые локальные параметры этих полей. Тогда

$$\frac{\partial x}{\partial t'} = \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'},$$

где первая дробь в правой части – это образ в L_0 соответствующего элемента из K_0.

Пусть K_0 – стандартное поле, t – второй локальный параметр K_0, и $a, b \in K_0^*$. Положим

$$c(a,b) = v_0\Big(\frac{\partial a}{\partial t_0}\Big) - v_0\Big(\frac{\partial b}{\partial t_0}\Big) - v_0(a) + v_0(b).$$

В [1], §1.3 доказано, что $c(a,b)$ не зависит от выбора поля K_0 и второго локального параметра t.

Поле K называется полем типа I, если для его локальных параметров π_K и t_K выполнено $c(\pi_K, t_K) > -\frac{1}{e_F}$, и полем типа II в противном случае. Это условие не зависит от выбора локальных параметров, и это определение полей типа I и типа II совпадает с определением из [4] и [5], см. [7], предложение 4.3, и [1], §1.3.

Для поля K типа I со вторым локальным параметром t положим $\Gamma_c(K) = \max\{c(\pi, t) | \pi \in K^*, v_K(\pi) = 1\}$. Эта величина не зависит от выбора t, см. [7], следствие 4.4.

1.4. Предположения для рассматриваемого поля. Везде далее мы предполагаем, что

K – двумерное поле смешанной характеристики;

поле $K^{(0)}$ совершенно;

K содержит первообразный корень p-й степени из единицы;

K имеет тип I.

Обозначим через k подполе констант поля K, обозначим через t некоторый второй локальный параметр поля K и положим $c(x) = c(x,t)$.

Основные результаты получены для поля K, которое не является почти стандартным.

§2. Оценка на $c(u)$ и глубину

В этом параграфе для $x \in K$ положим $s(x) = \frac{pe_K}{p-1} - v_K(x-1)$.

2.1. Определение. Ряд $f \in k\{\{T\}\}$ называется нормализованным, если либо $f \in U_k$, либо $f \in O_{k\{\{T\}\}}$ и $\overline{f} \notin \overline{k}((\overline{T}^p))$.

2.2. Лемма. *Для любых a, b, x выполнено*

1. $c(ab,x) \geqslant \min(c(a,x), c(b,x))$*;*
2. $c(a^{-1},x) = c(a,x)$*;*
3. $c(a^p,x) = c(a,x) + 1$.

Доказательство. Утверждения легко вытекают из определения. □

2.3. Лемма. *Пусть N – положительное число, π – униформизирующая поля K, и $c(\pi) > N$.*

1) *Пусть f, g – нормализованные элементы $k\{\{T\}\}$, не принадлежащие U_k, $i,j > 0$, $i \leqslant \frac{e_K}{p-1}$, $c\big(1 + \pi^{pi} f(t^{p^j})\big) \geqslant N$. Тогда*

$$c\big(1 + \pi^i g(t^{p^{j-1}})\big) \geqslant N - 2.$$

2) *Пусть $g \in k$. Тогда*

$$c(1 + \pi^i g) > N + e_K^{-1}.$$

Доказательство. Пусть F – стандартное поле, являющееся конечным расширением поля K, и t_F – его второй локальный параметр.

1) Положим

$$x_1 = \frac{\partial(\pi^{pi})}{\partial t_F} f(t^{p^j}), \qquad y_1 = \frac{\partial(f(t^{p^j}))}{\partial t_F} \pi^{pi},$$

$$x_2 = \frac{\partial(\pi^{i})}{\partial t_F} g(t^{p^{j-1}}), \qquad y_2 = \frac{\partial(g(t^{p^{j-1}}))}{\partial t_F} \pi^{i}.$$

Оценим нормирования элементов x_1 и x_2. Имеем

$$\begin{aligned} v_0(x_1) \geqslant v_0\Big(\frac{\partial(\pi^{pi})}{\partial t_F}\Big) \\ &= v_0(pi\pi^{pi-1}) + v_0\Big(\frac{\partial\pi}{\partial t_F}\Big) \\ &\geqslant pie_K^{-1} + 1 + v_0\Big(\frac{\partial t}{\partial t_F}\Big) + v_0\Big(\frac{\partial\pi}{\partial t_F}\Big) - v_0\Big(\frac{\partial t}{\partial t_F}\Big) - v_0(\pi) \\ &= pie_K^{-1} + 1 + v_0\Big(\frac{\partial t}{\partial t_F}\Big) + c(\pi) \geqslant pie_K^{-1} + 1 + v_0\Big(\frac{\partial t}{\partial t_F}\Big) + N, \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$v_0(x_2) \geqslant ie_K^{-1} + v_0\Big(\frac{\partial t}{\partial t_F}\Big) + N.$$

Заметим, что

$$v_0(y_1) - v_0\Big(\frac{\partial t}{\partial t_F}\Big) = j + pie_K^{-1},$$

так как

$$v_0\Big(\frac{\partial(f(t^{p^j}))}{\partial t}\Big) = j,$$

и, аналогично,

$$v_0(y_2) - v_0\Big(\frac{\partial t}{\partial t_F}\Big) = j - 1 + ie_K^{-1}.$$

Имеем

$$v_0(x_1+y_1) = v_0\left(\frac{\partial\big(\pi^{pi} f(t^{p^j})\big)}{\partial t_F}\right) = c(1+\pi^{pi} f(t^{p^j})) + v_0\left(\frac{\partial t}{\partial t_F}\right) \geqslant N + v_0\left(\frac{\partial t}{\partial t_F}\right),$$

следовательно,

$$v_0(y_1) \geqslant N + v_0\Big(\frac{\partial t}{\partial t_F}\Big).$$

Получаем, что $j + pie_K^{-1} \geqslant N$. Учитывая, что $i \leqslant \frac{e_K}{p-1}$, получаем, что

$$j + ie_K^{-1} \geqslant N - 1.$$

Теперь докажем требуемое неравенство. Имеем

$$\begin{aligned} c\big(1 + \pi^i g(t^{p^{j-1}})\big) &= v_0(x_2 + y_2) - v_0\Big(\frac{\partial t}{\partial t_F}\Big) \\ &\geqslant \min\Big\{v_0(x_2) - v_0\Big(\frac{\partial t}{\partial t_F}\Big), v_0(y_2) - v_0\Big(\frac{\partial t}{\partial t_F}\Big)\Big\} \\ &\geqslant \min\{ie_K^{-1} + N, j - 1 + ie_K^{-1}\} \\ &\geqslant \min\{e_K^{-1} + N, N - 2\} = N - 2. \end{aligned}$$

2) Имеем

$$c(1+\pi^i g) = v_0\Big(\frac{\partial(1+\pi^i g)}{\partial t_F}\Big) - v_0\Big(\frac{\partial t}{\partial t_F}\Big) \geqslant v_0\Big(\frac{\partial(\pi)}{\partial t_F}\Big) - v_0\Big(\frac{\partial t}{\partial t_F}\Big)$$

$$= c(\pi) + e_K^{-1} > N + e_k^{-1}. \qquad \square$$

2.4. Лемма. *Пусть N – положительное число, $\Gamma_c(K) \geqslant N$, элемент $u \in O_K$ таков, что $u \notin (K^*)^p$, $c(u) \geqslant N$, расширение $K(\sqrt[p]{u})/K$ не является неразветвленным.*

1) *Предположим, что $0 < v_K(u-1) < \frac{pe_K}{p-1}$, $p \mid v_K(u-1)$. Тогда существует элемент $u' \in U_K(1)$, такой, что $u'u^{-1} \in (K^*)^p$, $c(u') \geqslant N-1$, $0 < v_K(u'-1) < \frac{pe_K}{p-1}$, и выполнено одно из двух условий:*

i) *$u' \in W_K$, $v_K(u-1) < v_K(u'-1)$,*

ii) *$s(u') \leqslant \frac{1}{p}s(u)$.*

2) *Предположим, что $p \mid v_K(u)$, $v_K(u) > 0$. Тогда существует элемент $u' \in U_K(1)$, такой, что $u'u^{-1} \in (K^*)^p$, $c(u') \geqslant N-1$, $0 < v_K(u'-1) < \frac{pe_K}{p-1}$, и выполнено одно из двух условий:*

i) *$u' \in W_K$,*

ii) *$s(u') \leqslant \frac{e_K}{p-1}$.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 4.2 из [1].

Обозначим через π такую униформизирующую поля K, что $c(\pi) \geqslant N$.

Пусть $i_0 = \frac{1}{p}v_K(u-1)$. По следствию 2.3.1 из [1] элемент u можно представить в виде

$$u = \pi^{v_K(u)} \prod_{i \geqslant pi_0} (1+\pi^i f_i(t^{p^{n_i}})),$$

где f_i нормализован или $f_i = 0$, и $c(1+\pi^i f_i(t^{p^{n_i}})) \geqslant N$ для любого i. Положим

$$i_1 = \min\Big\{\min\{i : f_i \neq 0,\ p \nmid i\}, \frac{pe_K}{p-1}\Big\},$$

$$u' = \prod_{i \geqslant i_1} (1+\pi^i f_i(t^{p^{n_i}})) \times \prod_{i_0 \leqslant i < \frac{i_1}{p}} \frac{1+\pi^{pi} f_{pi}(t^{p^{n_{pi}}})}{\big(1+\pi^i f_{pi}^{\phi^{-1}}\big(t^{p^{n_{pi}-1}}\big)\big)^p},$$

где ϕ обозначает применение автоморфизма Фробениуса к коэффициентам степенного ряда из $k\{\{T\}\}$.

Проверим, что $c(u') \geqslant N-1$. Имеем $u = u'b^p$, где

$$b = \pi^{v_K(u)/p} \prod_{i_0 \leqslant i < \frac{i_1}{p}} \Big(1 + \pi^i f_{pi}^{\phi^{-1}}\big(t^{p^{n_{pi}-1}}\big)\Big).$$

Применяя лемму 2.3 к $f = f_{pi}$, $g = f_{pi}^{\phi^{-1}}$, получаем, что для каждого сомножителя в правой части величина c не меньше, чем $N-2$. Применяя лемму 2.2 получаем, что

$$c(b^{-1}) = c(b) \geqslant N-2,$$
$$c(b^{-p}) = c(b^{-1}) + 1 \geqslant N-1,$$

и, наконец, $c(u') \geqslant \min(c(u), c(b^{-p})) \geqslant N-1$.

Неравенство $v_K(u'-1) < \frac{pe_K}{p-1}$ следует из того, что $K(\sqrt[p]{u'}) = K(\sqrt[p]{u}) \neq K$, и расширение $K(\sqrt[p]{u'})/K$ не является неразветвленным.

Проверим, что выполнено условие i) или ii). Если $i_1 < e_K + i_0$, то

$$v_K(u'-1) = i_1,$$

и выполнено условие i).

Предположим, что $i_1 \geqslant e_K + i_0$. Тогда

$$v_K(u'-1) \geqslant e_K + i_0.$$

В случае 1) имеем

$$s(u) = \frac{pe_K}{p-1} - pi_0, \qquad s(u') \leqslant \frac{pe_K}{p-1} - (e_K + i_0) = \frac{1}{p}\Big(\frac{pe_K}{p-1} - pi_0\Big).$$

В случае 2) имеем $i_0 = 0$,

$$s(u') \leqslant \frac{pe_K}{p-1} - e_K = \frac{e_K}{p-1}.$$

В обоих случаях выполнено условие ii). □

2.5. Лемма. *Пусть N – положительное число, $\Gamma_c(K) \geqslant N$, элемент $u \in O_K$ таков, что $u \notin (K^*)^p$, $c(u) \geqslant N$, расширение $K(\sqrt[p]{u})/K$ не является неразветвленным.*

1) *Предположим, что $0 < v_K(u-1) < \frac{pe_K}{p-1}$, $p \mid v_K(u-1)$. Тогда существует элемент $u' \in W_K$, такой, что $u'u^{-1} \in (K^*)^p$, $c(u') > N - \log_p\big(\frac{e_K}{p-1}\big)$, и выполнено одно из двух условий:*

i) *$c(u') \geqslant N-1$;*

ii) $c(u') < N-1$, *и для некоторого целого числа* a, *такого, что*

$$1 < a \leqslant \log_p\Bigl(\frac{e_K}{p-1}\Bigr),$$

выполнено

$$c(u') \geqslant N-a, \qquad p^{a-1}s(u') < s(u).$$

2) *Предположим, что* $p \mid v_K(u)$, $v_K(u) > 0$. *Тогда существует элемент* $u' \in W_K$, *такой, что* $u'u^{-1} \in (K^*)^p$, $c(u') \geqslant N - \log_p\bigl(\frac{e_K}{p-1}\bigr)$, *и выполнено одно из двух условий:*

i) $c(u') \geqslant N-1$;

ii) $c(u') < N-1$, *и для некоторого целого числа* a, *такого, что*

$$1 < a \leqslant \log_p\Bigl(\frac{e_K}{p-1}\Bigr),$$

выполнено

$$c(u') \geqslant N-a, \qquad p^{a-2}s(u') < \frac{e_K}{p-1}.$$

Доказательство. Будем доказывать утверждение для обоих случаев. Положим $b = \log_p\bigl(\frac{e_K}{p-1}\bigr)$.

Построим последовательность элементов u_r. Положим $u_0 = u$.

В случае 1) определим элементы u_r при $r \geqslant 1$ так, что для любого r выполняется неравенство $c(u_r) \geqslant N-r$, для любого r выполняется условие (1) или условие (2), где

$$u_r \in W_K, \qquad v_K(u_{r-1}-1) < v_K(u_r-1) < \frac{pe_K}{p-1}, \tag{1}$$

$$s(u_r) \leqslant \frac{1}{p}s(u_{r-1}), \tag{2}$$

и, если при $r = r_0$ выполняется условие (1), то последовательность заканчивается на элементе u_{r_0}. Существование такой последовательности следует из леммы 2.4.

В случае 2) определим элемент u_1 так, что $c(u_1) \geqslant N-1$, и выполняется $u_1 \in W_K$ или $s(u_1) \leqslant \frac{e_K}{p-1}$. Существование такого элемента u_1 также следует из леммы 2.4. Если $u_1 \in W_K$, то последовательность заканчивается, и мы полагаем $r_0 = 1$. В противном случае определим элементы u_r при $r \geqslant 2$ аналогично случаю 1), то есть так, чтобы для любого r выполнялось неравенство $c(u_r) > N-r$, для любого r выполнялось условие (1) или условие (2), и при выполнении условия (1) для $r = r_0$ последовательность заканчивается.

Если $r_0 = 1$, положим $u' = u_1$. Элемент u' удовлетворяет условию леммы, выполнено условие i).

Далее будем предполагать, что последовательность не заканчивается на элементе u_1.

Докажем, что последовательность конечна и $r_0 \leqslant b$. Предположим, что это не так. Тогда существует $r \in \mathbb{Z}$, такое, что $r > b-1$, элемент u_r определен и выполняется условие (2). В случае 1) имеем $s(u) < \frac{pe_K}{p-1}$, следовательно, в обоих случаях имеем

$$s(u_1) \leqslant \frac{e_K}{p-1} = p^b,$$

и

$$s(u_r) \leqslant \frac{1}{p^{r-1}} s(u_1) \leqslant p^{b-r-1} < 1.$$

При этом левая часть неравенства – целое положительное число. Противоречие.

Положим $u' = u_{r_0}$ и $a = r_0$. Тогда выполнены условия $u' \in W_K$, $u'u^{-1} \in (K^*)^p$, $c(u') \geqslant N - a$.

Докажем, что выполнено условие ii). Имеем $r_0 > 1$ и

$$s(u_{r_0}) < s(u_{r_0-1}) \leqslant \frac{1}{p^{r_0-2}} s(u_1).$$

Учитывая, что в случае 1) выполнено $s(u_1) \leqslant \frac{1}{p} s(u_0)$, а в случае 2) выполнено $s(u_1) \leqslant \frac{e_K}{p-1}$, получаем нужные неравенства. □

2.6. Лемма. *Пусть F – двумерное локальное поле смешанной характеристики, элемент $x \in O_F$ таков, что $0 < v_F(x-1) < \frac{pe_F}{p-1}$, $p \nmid v_F(x-1)$ или $p \nmid v_F(x)$. Тогда $F(\sqrt[p]{x})/F$ – вполне разветвленное расширение степени p, и*

$$d(F(\sqrt[p]{x})/F) = 1 - \frac{p-1}{pe_F} v_F(x-1).$$

Доказательство. См. [3], предложение 1.4 и [2], лемма 2–10.

Следующая лемма будет применяться к $F = k\{\{t\}\}$. Сформулируем нужное утверждение в общем виде.

2.7. Лемма. *Пусть N – положительное число, $\Gamma_c(K) \geqslant N$, F – подполе K, $u \in F$, $u \notin (K^*)^p$, расширение $K(\sqrt[p]{u})/K$ не является неразветвленным.*

1) *Предположим, что* $0 < v_K(u-1) < \frac{pe_K}{p-1}$, $p \mid v_K(u-1)$, $p \nmid v_F(u-1)$. *Тогда существует элемент* $u' \in W_K$*, такой, что* $u'u^{-1} \in (K^*)^p$,

$$c(u') > N - \log_p\Big(\frac{e_K}{p-1}\Big),$$

и выполнено одно из двух условий:

i) $c(u') \geqslant N-1$;

ii) $c(u') < N-1$, *и для некоторого целого числа* a, *такого, что*

$$1 < a \leqslant \log_p(\frac{e_K}{p-1}),$$

выполнено

$$c(u') \geqslant N-a, \qquad p^{a-1} d\big(K(\sqrt[p]{u})/K\big) < d\big(F(\sqrt[p]{u})/F\big).$$

2) *Предположим, что* $p \mid v_K(u)$, $p \nmid v_F(u)$, $v_K(u) > 0$. *Тогда существует элемент* $u' \in W_K$*, такой, что* $u'u^{-1} \in (K^*)^p$,

$$c(u') \geqslant N - \log_p\Big(\frac{e_K}{p-1}\Big),$$

и выполнено одно из двух условий:

i) $c(u') \geqslant N-1$;

ii) $c(u') < N-1$, *и для некоторого целого числа* a, *такого, что*

$$1 < a \leqslant \log_p\Big(\frac{e_K}{p-1}\Big),$$

выполнено

$$c(u') \geqslant N-a, \qquad p^{a-1} d\big(K(\sqrt[p]{u})/K\big) < 1 = d\big(F(\sqrt[p]{u})/F\big).$$

3) *Если выполнено условие* 1) *или условие* 2), *то расширение* $K(\sqrt[p]{u})/K$ *вполне разветвлено.*

Доказательство. Имеем $K(\sqrt[p]{u}) = K(\sqrt[p]{u'})$, поэтому утверждение следует из леммы 2.6, примененной к расширениям $F(\sqrt[p]{u})/F$ и $K(\sqrt[p]{u})/K$, и леммы 2.5. □

§3. Общий случай, оценка порядка $\sqrt{\Gamma}$

Получим оценку на $\Gamma\big(K(\sqrt[p]{u})\big)$ через $c(u)$.

3.1. Лемма. *Пусть* M – *положительное число,* $u \in W_K$,

$$M > \frac{p}{p-1} - \frac{1}{pe_K}, \qquad \Gamma_c(K) > M - \frac{p}{p-1}, \qquad c(u) \geqslant M.$$

Тогда поле $K(\sqrt[p]{u})$ имеет тип I, и

$$\Gamma_c\big(K(\sqrt[p]{u})\big) > M - \frac{p}{p-1}.$$

Доказательство. Положим $L = K(\sqrt[p]{u})$.

Пусть $x \in L$ таков, что $x^p = u$.

Имеем $v_0(x) = 0$,

$$v_0(x-1) = \frac{1}{p}v_0(u-1) < \frac{1}{p-1}.$$

По лемме 2.2 выполнено $c(x) = c(u) - 1$. Следовательно,

$$c(x-1) = c(x) + v_0(x) - v_0(x-1) > c(u) - \frac{p}{p-1} \geqslant M - \frac{p}{p-1}.$$

Пусть π – такая униформизирующая поля K, что

$$c(\pi) > M - \frac{p}{p-1}.$$

Из того, что $u \in W_K$, получаем, что расширение L/K вполне разветвлено. Из этого следует, что существует униформизирующая π_L поля L, такая, что

$$\pi_L = (x-1)^j \pi^j$$

для некоторых целых i и j, а также следует, что t является вторым локальным параметром L. Снова применяя лемму 2.2 , получаем что

$$c(\pi_L, t) = c(\pi_L) \geqslant \min\{c(x-1), c(\pi)\} > M - \frac{p}{p-1} > -\frac{1}{pe_K} = -\frac{1}{e_L}.$$

Из этого следует, что поле L имеет тип I, и

$$\Gamma_c(L) \geqslant c(\pi_L, t) > M - \frac{p}{p-1}. \qquad \square$$

3.2. Лемма. *Пусть E/F – ручное расширение двумерных полей. Тогда E и F – поля одного типа, и, если они являются полями типа I, $\Gamma_c(E) = \Gamma_c(F)$.*

Доказательство. См. [1], лемма 3.3. $\square$

3.3. Лемма. *Пусть E/F – ручное или вполне разветвленное константное расширение двумерных полей. Тогда $m_f(E) = m_f(F)$.*

Доказательство. Пусть L – стандартное поле, такое, что расширение L/E является конечным и константным. Тогда

$$|\overline{L}:\overline{F}|_{\mathrm{insep}} = |\overline{L}:\overline{F}|_{\mathrm{insep}} \cdot |\overline{E}:\overline{F}|_{\mathrm{insep}},$$

и $|\overline{E}:\overline{F}|_{\mathrm{insep}} = 1$. □

3.4. Лемма. *Пусть число N таково, что*

$$N > \log_p\Big(\frac{e_K}{p-1}\Big) + \frac{p}{p-1} - \frac{1}{pe_K}, \qquad \Gamma_c(K) \geqslant N,$$

l/k – вполне разветвленное расширение степени p. Тогда поле lK имеет тип I, $m_f(lK) = m_f(K)$,

$$\Gamma_c(lK) \geqslant N - \log_p\Big(\frac{e_K}{p-1}\Big) - \frac{p}{p-1},$$

расширение lK/K является неразветвленным или вполне разветвеленным. При этом выполнено хотя бы одно из двух условий:

i) $\Gamma_c(lK) \geqslant \Gamma_c(K) - 1 - \frac{p}{p-1}$;

ii) *для некоторого числа a, такого, что $1 < a \leqslant \log_p\big(\frac{e_K}{p-1}\big)$, выполнено*

$$\Gamma_c(lK) \geqslant \Gamma_c(K) - a - \frac{p}{p-1}, \qquad p^{a-1}d\big(lK/K\big) < d\big(l/k\big).$$

Доказательство. Если расширение lK/K неразветвлено, все утверждения следуют из лемм 3.2 и 3.3

Предположим, что расширение lK/K не является неразветвленным.

Пусть $u \in k$ таков, что $l = k(\sqrt[p]{u})$, и выполнено либо $0 < v_k(u-1) < \frac{pe_k}{p-1}$, $p \nmid v_k(u-1)$, либо $p \nmid v_k(u)$, $v_k(u) > 0$. Тогда

$$c(u) = \infty > N.$$

Следовательно, к полю $F = k\{\{t\}\}$, элементу u и числу N можно применить лемму 2.7. Из нее следует, что расширение $K(\sqrt[p]{u})/K$ вполне разветвлено, и существует такой элемент $u' \in K$, что

$$c(u') > N - \log_p\Big(\frac{e_K}{p-1}\Big)$$

и выполнено хотя бы одно из двух условий:

i′) $c(u') \geqslant N - 1$;

ii′) $c(u') < N - 1$, для некоторого целого числа a, такого, что

$$1 < a \leqslant \log_p\Big(\frac{e_K}{p-1}\Big),$$

выполнено

$$c(u') \geqslant N-a, \qquad p^{a-1}d\bigl(K(\sqrt[p]{u})/K\bigr) < d\bigl(k\{\{t\}\}(\sqrt[p]{u})/k\{\{t\}\}\bigr).$$

Имеем

$$lK = K(\sqrt[p]{u}) = K(\sqrt[p]{u'}).$$

Применим лемму 3.1 к полю K, элементу u', числу и $M = N-1$ в случае i') и числу $M = N-a$ в случае ii'). Получаем, что поле lK имеет тип I, и, учитывая равенства

$$d(l/k) = d\bigl(k(\sqrt[p]{u})/k\bigr) = d\bigl(k\{\{t\}\}(\sqrt[p]{u})/k\{\{t\}\}\bigr),$$

получаем, что из условия i') следует условие i), а из условия ii') следует условие ii).

Равенство $m_f(lK) = m_f(K)$ следует из леммы 3.3. □

3.5. Лемма. *Пусть l/k – конечное расширение, k_0 – максимальное ручное подрасширение расширения l/k,*

$$q = e_{k_0/k}, \qquad r = \log_p(|l : k_0|),$$

$$\Gamma_c(K) \geqslant \frac{r(r-1)}{2} + r\Bigl(\log_p\Bigl(\frac{qe_K}{p-1}\Bigr) + \frac{p}{p-1}\Bigr) - \frac{1}{pe_K}.$$

Тогда $m_f(lK) = m_f(K)$.

Доказательство. Пусть поля

$$k_0 \subset k_1 \subset \cdots \subset k_r = l$$

таковы, что k_0/k – ручное расширение степени q, при $i \geqslant 0$ расширения k_{i+1}/k_i вполне разветвлены и их степени равны p, и при этом

$$\Gamma_c(K) \geqslant \frac{r(r-1)}{2} + m\Bigl(\log_p\Bigl(\frac{qe_K}{p-1}\Bigr) + \frac{p}{p-1}\Bigr) - \frac{1}{pe_K}.$$

Положим $K_i = k_iK$. Из леммы 3.2 и 3.3 следует, что поле K_0 имеет тип I, $\Gamma_c(K_0) = \Gamma_c(K)$, $m_f(K_0) = m_f(K)$. Докажем индукцией по i, что для $i = 1, 2, \ldots, m$ поле K_i имеет тип I, $m_f(K_i) = m_f(K)$, расширения K_s/K_{s-1} при $s \leqslant i$ вполне разветвлены или неразветвлены, и

$$\Gamma_c(K_i) \geqslant \Gamma_c(K) - \sum_{s=0}^{i-1}\Bigl(\log_p\Bigl(\frac{e_{K_s}}{p-1}\Bigr) + \frac{p}{p-1}\Bigr)$$

– тогда при $i = r$ мы получим, что $m_f(k_rK) = m_f(K)$.

С учетом леммы 3.4 достаточно проверить, что

$$\Gamma_c(K) \geqslant \sum_{s=0}^{r-1}\Big(\log_p\Big(\frac{e_{K_s}}{p-1}\Big) + \frac{p}{p-1}\Big) - \frac{1}{pe_K}.$$

Имеем $e(K_s/K) \leqslant e(k_s/k)$ для любого s, следовательно,

$$\log_p\Big(\frac{e_{K_s}}{p-1}\Big) \leqslant \log_p\Big(\frac{p^s qe_K}{p-1}\Big) = s + \log_p\Big(\frac{qe_K}{p-1}\Big).$$

Положим

$$a = \log_p\Big(\frac{qe_K}{p-1}\Big) + \frac{p}{p-1}.$$

Тогда

$$\sum_{s=0}^{r-1}\Big(\log_p\Big(\frac{e_{K_s}}{p-1}\Big) + \frac{p}{p-1}\Big) \leqslant \sum_{s=0}^{r-1}\Big(s+a\Big) = \frac{r(r-1)}{2} + ra. \qquad \square$$

3.6. Лемма. *Пусть $m_f(K) > 1$, число N таково, что*

$$\Gamma_c(K) \geqslant \Big(\log_p N + \log_p\Big(\frac{e_K}{p-1}\Big) - \frac{1}{2} + \frac{p}{p-1}\Big)^2 - \frac{1}{pe_K},$$

l/k – такое конечное расширение, что $m_f(lK) < m_f(K)$. Тогда $|l{:}k| > N$.

Доказательство. С учетом леммы 3.5 достаточно доказать, что если $qp^r \leqslant N$, то

$$\frac{r(r-1)}{2} + r\Big(\log_p\Big(\frac{qe_K}{p-1}\Big) + \frac{p}{p-1}\Big) \leqslant \Big(\log_p N + \log_p\Big(\frac{e_K}{p-1}\Big) - \frac{1}{2} + \frac{p}{p-1}\Big)^2.$$

Положим $a = \log_p\big(\frac{e_K}{p-1}\big) + \frac{p}{p-1}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\frac{r(r-1)}{2} + r\Big(\log_p\Big(\frac{qe_K}{p-1}\Big) + \frac{p}{p-1}\Big)\\
&= \frac{r(r-1)}{2} + r\big(\log_p q + a\big)\\
&= 2\Big(\frac{r-1}{2} + \log_p q + a\Big)\frac{r}{2} \leqslant \Big(\frac{r-1}{2} + \log_p q + a + \frac{r}{2}\Big)^2\\
&= \Big(r + \log_p q + a - \frac{1}{2}\Big)^2 = \Big(\log_p N + a - \frac{1}{2}\Big)^2. \quad \square
\end{aligned}$$

3.7. Теорема. *Пуст поле K не является почти стандартным, число N таково, что*

$$\Gamma_c(K) \geqslant \Big(\log_p N + \log_p\Big(\frac{e_K}{p-1}\Big) - \frac{1}{2} + \frac{p}{p-1}\Big)^2,$$

l/k – такое конечное расширение, что поле lK почти стандартно. Тогда $|l:k| > N$.

Доказательство. Поле является почти стандартным тогда и только тогда, когда значение m_f равно 1, см. [6], лемма 2.3, поэтому утверждение теоремы следует из леммы 3.6.

§4. Случай $|K : k\{\{t\}\}| = p$

4.1. Лемма. *Пусть E/F – конечное сепарабельное расширение полных дискретно нормированных полей, и $F \subset F_1 \subset E$. Тогда $d_{E/F} = d_{E/F_1} + d_{F_1/F}$.*

Доказательство. См. [2], лемма 2–4.

4.2. Лемма. *Пусть поле K не является почти стандартным, $|K : k\{\{t\}\}| = p$, и l/k – вполне разветвленное расширение степени p. Тогда*

1) *расширение lK/K не является неразветвленным,*

2) *если расширение lK/K вполне разветвлено, то поле lK не является почти стандартным.*

Доказательство. 1) Предположим, что расширение lK/K неразветвлено. Имеем

$$e\big(lK/K\big) \cdot e\big(K/k\{\{t\}\}\big) = e\big(K/l\{\{t\}\}\big) \cdot e\big(l\{\{t\}\}|/k\{\{t\}\}\big).$$

и

$$|\overline{lK} : \overline{K}|_{\mathrm{insep}} \cdot |\overline{K} : \overline{k\{\{t\}\}}|_{\mathrm{insep}} = |\overline{lK} : \overline{l\{\{t\}\}}|_{\mathrm{insep}} \cdot |\overline{l\{\{t\}\}}| : \overline{k\{\{t\}\}}|_{\mathrm{insep}},$$

Расширение lK/K неразветвлено, расширения $K/k\{\{t\}\}$ и $l\{\{t\}\}/k\{\{t\}\}$ вполне разветвлены и имеют степень p следовательно,

$$e(lK/l\{\{t\}\}) = 1, |lK : l\{\{t\}\}|_{\mathrm{insep}} = 1.$$

Получаем, что поле lK стандартно, и

$$m_f(K) = |lK : l\{\{t\}\}|_{\mathrm{insep}} = 1.$$

Но по лемме 2.3, [6], из того, что поле K не является почти стандартным, следует, что $m_f(K) > 1$.

2) Следует из леммы 3.3 и леммы 2.3, [6]. □

Снова сформулируем аналоги предложения 4.3 из [1] для разных случаев.

4.3. Лемма. *Пусть поле K не является почти стандартным,*

$$|K : k\{\{t\}\}| = p, \qquad \Gamma_c(K) > 3,$$

l/k – вполне разветвленное расширение степени p,

$$d(K/k\{\{t\}\}) \neq d(l/k).$$

Тогда расширение lK/K вполне разветвлено, поле lK имеет тип I, не является почти стандартным, и

$$\Gamma_c(lK) \geqslant \Gamma_c(K) - 1 - \frac{p}{p-1}.$$

Доказательство. Пусть $u \in k$ таков, что $l = k(\sqrt[p]{u})$, и выполнено либо $p \nmid v_k(u)$, либо $0 < v_k(u-1) < \frac{pe_k}{p-1}$, $p \nmid v_k(u-1)$. Имеем

$$c(u) = \infty > \Gamma_c(K).$$

По лемме 4.2 расширение lK/K не является неразветвленным. Из предложения 4.2, [1] следует, что существует такой $u' \in M$, что

$$c(u') \geqslant \Gamma_c(K) - 1$$

и

$$lK = K(\sqrt[p]{u}) = K(\sqrt[p]{u'}).$$

Применяя лемму 3.1, получаем нужное утверждение. □

4.4. Лемма. *Пусть поле K не является почти стандартным,*

$$|K : k\{\{t\}\}| = p, \qquad \Gamma_c(K) > \log_p\Bigl(\frac{e_K}{p-1}\Bigr) + \frac{p}{p-1} - \frac{1}{pe_K},$$

l/k – вполне разветвленное расширение степени p,

$$\Gamma_c(lK) < \Gamma_c(K) - 1 - \frac{p}{p-1}. \tag{3}$$

Тогда расширение lK/K вполне разветвлено, поле lK имеет тип I, не является почти стандартным,

$$d(K/k\{\{t\}\}) = d\bigl(l/k\bigr) \tag{4}$$

$$d(lK/K) = d\bigl(lK/l\{\{t\}\}\bigr) \tag{5}$$

для некоторого числа a, такого, что $1 < a \leqslant \log_p\bigl(\frac{e_K}{p-1}\bigr)$, выполнено

$$\Gamma_c(lK) \geqslant \Gamma_c(K) - a - \frac{p}{p-1},$$

$$p^{a-1} d\bigl(lK/l\{\{t\}\}\bigr) < d\bigl(K/k\{\{t\}\}\bigr). \tag{6}$$

Доказательство. Равенство (4) следует из леммы 4.3 и неравенства (3).

Применяя лемму 4.1 и равенство (4) получаем, что

$$d\big(lK/k\{\{t\}\}\big) = d(lK/K) + d\big(K/k\{\{t\}\}\big) = d(lK/K) + d(l/k),$$

$$d\big(lK/k\{\{t\}\}\big) = d\big(lK/l\{\{t\}\}\big) + d\big(l\{\{t\}\}/k\{\{t\}\}\big) = d\big(lK/l\{\{t\}\}\big) + d(l/k),$$

следовательно, выполнено равенство (5).

Применим лемму 3.4.

По этой лемме расширение lK/K является неразветвленным или вполне разветвленным. Учитывая лемму 4.2 получаем, что расширение lK/K вполне разветвлено и поле lK не является почти стандартным.

Из неравенства (3) следует, что выполнено условие ii) из леммы 3.4, то есть для некоторого a, такого, что $1 < a \leqslant \log_p\big(\frac{e_K}{p-1}\big)$, выполнено

$$\Gamma_c(lK) \geqslant \Gamma_c(K) - a - 1 - \frac{p}{p-1}, \qquad p^{a-1}d\big(lK/K\big) < d\big(l/k\big).$$

Применяя равенства (4) и (5), получаем неравенство (6). □

4.5. Теорема. *Пусть поле K не является почти стандартным. Пусть l/k – такое конечное расширение, что поле lK почти стандартно. Тогда*

$$\Gamma_c(K) \leqslant v_p(e(l/k))\Big(1 + \frac{p}{p-1}\Big) + \log_p\Big(\frac{d(K/k\{\{t\}\})}{p-1}\Big) - 1 - \frac{1}{pe_K}.$$

Доказательство. Рассмотрим числа q, r и поля

$$k \subset k_0 \subset k_1 \subset \dots \subset k_r$$

такие, что k_0/k – ручное расширение степени q, при $i \geqslant 0$ расширения k_{i+1}/k_i вполне разветвлены и их степени равны p, и докажем, что если

$$\Gamma_c(K) > r\Big(1 + \frac{p}{p-1}\Big) + \log_p\Big(\frac{d(K/k\{\{t\}\})}{p-1}\Big) - 1 - \frac{1}{pe_K},$$

то поле k_rK не является почти стандартным.

Положим $K_i = k_iK$.

Докажем индукцией по i, что для $i = 0, 1, \dots, r-1$ поле K_i имеет тип I, не является почти стандартным, расширения K_s/K_{s-1} при $s \leqslant i$ вполне разветвлены, и

$$\Gamma_c(K_i) > \log_p\Big(\frac{e_{K_i}}{p-1}\Big) + \frac{p}{p-1} - \frac{1}{pe_K} \tag{7}$$

– тогда к полю K_{r-1} можно применить лемму 4.3 или лемму 4.4, и получить, что поле k_rK не является почти стандартным. Для доказательства неравенства (7), достаточно доказать неравенство

$$\Gamma_c(K)-\Gamma(K_i) \leqslant\Big(r\Big(1+\frac{p}{p-1}\Big)+\log_p\Big(\frac{d(K/k\{\{t\}\})}{p-1}\Big)-1\Big)-\Big(\log_p\Big(\frac{e_{K_i}}{p-1}\Big)+\frac{p}{p-1}\Big). \tag{8}$$

При $s\leqslant i$ положим $d_s=d(K_s/k_s\{\{t\}\})$. Имеем

$$d(K/k\{\{t\}\})=d_0,\qquad d_{s-1}\leqslant d_s. \tag{9}$$

Будем применять леммы 4.3 и 4.4 к полям K_s вместо K. При $s<i$ обозначим через a_s числа, соответствующие числу a из леммы 4.4, если $d(k_{s+1}/k_s)=d_s$, и положим $a_s=1$ в случае $d(k_{s+1}/k_s)\neq d_s$. В обоих случаях выполнено

$$\Gamma_c(K_{s+1})\geqslant\Gamma_c(K_s)-a_s-\frac{p}{p-1},\qquad p^{a_s-1}d_{s+1}\leqslant d_s.$$

Положим

$$b_i=\sum_{s=0}^{i-1}a_s.$$

Имеем

$$\frac{d_0}{d_i}=\prod_{s=0}^{i-1}\frac{d_s}{d_{s+1}}\geqslant\prod_{s=0}^{i-1}p^{a_s-1}=p^{b_i-i}.$$

При этом

$$d_i\geqslant\frac{1}{e_{K_i}}\geqslant\frac{1}{qp^ie_K},$$

следовательно,

$$p^{b_i}\leqslant\frac{d_0}{qe_K}=\frac{d(K/k\{\{t\}\})}{qe_K}.$$

По лемме 3.2 выполнено $\Gamma_c(K)=\Gamma_c(K_0)$. Получаем, что

$$\begin{aligned}\Gamma_c(K)-\Gamma_c(K_i)&=\Gamma_c(K_0)-\Gamma_c(K_i)\\&=\sum_{s=0}^{i-1}\big(\Gamma_c(K_{s+1})-\Gamma_c(K_s)\big)\leqslant\sum_{s=0}^{i-1}\Big(a_s+\frac{p}{p-1}\Big)\\&=b_i+i\frac{p}{p-1}\leqslant\log_p\Big(\frac{d(K/k\{\{t\}\})}{qe_K}\Big)+i\frac{p}{p-1}.\end{aligned}$$

Осталось проверить, что правая часть неравенства (8) не меньше, чем

$$\log_p\Big(\frac{d(K/k\{\{t\}\})}{qe_K}\Big)+i\frac{p}{p-1}.$$

Имеем

$$\Big(r\Big(1+\frac{p}{p-1}\Big)+\log_p\Big(\frac{d(K/k\{\{t\}\})}{p-1}\Big)-1\Big)-\Big(\log_p\Big(\frac{e_{K_i}}{p-1}\Big)+\frac{p}{p-1}\Big)$$
$$=\log_p\Big(\frac{d(K/k\{\{t\}\})}{p-1}\cdot\frac{p-1}{e_{K_i}}\Big)+(r-1)\Big(1+\frac{p}{p-1}\Big)$$
$$\geqslant\log_p\Big(\frac{d(K/k\{\{t\}\})}{qp^ie_K}\Big)+i\Big(1+\frac{p}{p-1}\Big)=\log_p\Big(\frac{d(K/k\{\{t\}\})}{qe_K}\Big)+i\frac{p}{p-1}.\ \square$$

Список литературы

1. O. Ivanova, S. Vostokov, I. Zhukov, *On two approaches to classification of higher local fields.* — Чебышёвский сборник **20**, No. 2 (2019), 177–189.
2. O. Hyodo, *Wild ramification in the imperfect residue field case.* — Galois Representations and Arithmetic Algebraic Geometry (Kyoto, 1985/Tokyo, 1986), Adv. Stud. Pure Math., vol. 12, North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 287–314.
3. И. Б. Жуков, М. В. Коротеев, *Устранение высшего ветвления.* — Алгебра и анализ **11**, No. 6 (1999), 153–177.
4. M. Kurihara, *On two types of complete discrete valuation fields.* — Compos. Math. **63** (1987), 237–257.
5. M. Kurihara, *Two types of complete discrete valuation fields*, in book: *Invitation to higher local fields* (*Münster,* 1999), 109–112, Geom. Topol. Monogr., 3, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2000; `https://msp.org/gtm/2000/03/index.xhtml`.
6. О. Ю. Иванова, *Ранг топологической K-группы как $\mathbb{Z}_p$-модуля.* — Алгебра и анализ **20**, No. 4 (2008), 87–117.
7. О. Ю. Иванова, *О связи классификации Курихары с теорией устранения ветвления.* — Алгебра и анализ **24**, No. 2 (2012), 130–153.
8. И. Б. Жуков, А. И. Мадунц, *Многомерные полные поля: топология и другие основные понятия*, . — Труды С.-Петерб. мат. общ. **3** (1995), 4–46.
9. I. B. Zhukov, *Higher dimensional local fields*, in book: *Invitation to higher local fields* (*Münster,* 1999), 5–18, Geom. Topol. Monogr., 3, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2000; `https://msp.org/gtm/2000/03/index.xhtml`.

Vostokov S. V., Zhukov I. B., Ivanova O. Yu. Kurihara invariants and elimination of wild ramification.

This article continues a series of works devoted to relation between two approaches to classification of complete discrete valuation fields with imperfect residue fields and in particular 2-dimensional local fields in the case of mixed characteristic. One of this approaches was introduced in the work of Masato Kurihara "On two types of complete discrete valuation fields" in terms of the module of differentials. Another one is based on Epp's theory of elimination of wild ramification.

We establish a lower bound for the degree of constant field extension that makes a given field into an almost standard one. This bound is expressed in terms of the invariant introduced in Kurihara's work.

С.-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., 7/9,
С.-Петербург, 199034, Россия
E-mail: s.vostokov@spbu.ru

Поступило 24 мая 2020 г.

С.-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., 7/9,
С.-Петербург, 199034, Россия
E-mail: i.zhukov@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
авиационного приборостроения,
Большая Морская ул., 67,
С.-Петербург, 190000, Россия
E-mail: olgaiv80@mail.ru