Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 491, 2020 г.

А. Целищев

ОТСУТСТВИЕ ЛОКАЛЬНОЙ БЕЗУСЛОВНОЙ СТРУКТУРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ НА ДВУМЕРНОМ ТОРЕ

§1. Введение

Как известно (впрочем, это легко проверить), пространство $C^k(\mathbb{T})$ k раз непрерывно дифференцируемых функций на единичной окружности изоморфно пространству $C(\mathbb{T})$. При этом в старших размерностях ситуация отличается – уже в двумерном случае пространство $C^k(\mathbb{T}^2)$ не изоморфно пространству $C(\mathbb{T}^2)$. Этот факт был впервые анонсирован в [4], а позже были получены его различные обобщения (см. [5, 7–10, 13–16, 18]). Однако наиболее общий и естественный контекст был рассмотрен только в довольно недавней работе [11] (см. также препринт [12] для двумерного случая).

Более конкретно, предположим, что у нас есть набор $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_J\}$ дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами на торе $\mathbb{T}^2$. Это означает, что каждый оператор T_j является линейной комбинацией операторов $\partial_1^\alpha \partial_2^\beta$. Число $\alpha+\beta$ называется порядком такого дифференциального монома, а под порядком оператора T_j мы понимаем максимальный порядок среди всех составляющих его мономов. Рассмотрим следующую полунорму на тригонометрических полиномах f:

$$\|f\|_{\mathcal{T}} = \max_{1\leqslant j\leqslant J} \|T_j f\|_{C(\mathbb{T}^2)}.$$

Теперь определим банахово пространство $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)$ с помощью этой полунормы (то есть факторизуем по её ядру и пополним). Например,

---

Ключевые слова: пространства гладких функций, локальная безусловная структура.

Исследование выполнено при поддержке гранта в форме субсидий из федерального бюджета на осуществление государственной поддержки создания и развития научных центров мирового уровня, включая международные математические центры и научные центры мирового уровня, выполняющие исследования и разработки по приоритетам научно-технологического развития, соглашение между Минобрнауки РФ и ПОМИ РАН от 8 ноября 2019 г. No. 075-15-2019-1620.

если $\mathcal{T}$ состоит из всех дифференциальных мономов порядка не более k, то мы получаем пространство $C^k(\mathbb{T}^2)$.

В работах [9,10] было доказано следующее утверждение. Предположим, что все дифференциальные мономы, входящие во все операторы T_j – порядка не больше k. Отбросим младшую часть каждого оператора T_j (это означает, что мы исключим из T_j все мономы, порядок которых строго меньше, чем k). Если среди оставшихся старших частей есть хотя бы две линейно независимые, то $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)$ не изоморфно дополняемому подпространству в $C(S)$. (Через S обозначено произвольное несчётное компактное метрическое пространство. Согласно теореме Милютина, все такие пространства $C(S)$ изоморфны.) Однако, в случае, когда все старшие части отличаются друг от друга домножением на константу, ситуация оставалась неясной.

В препринте [12] (и в статье [11] для произвольной размерности) было доказано обобщение этого утверждения. Чтобы его сформулировать, нам нужно понятие смешанной однородности.

Зафиксируем некоторый *шаблон смешанной однородности*, то есть прямую Λ, которая пересекает положительные координатные полуоси. Уравнение такой прямой имеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где a и b – положительные числа. Мы называем такую прямую *допустимой*, если все мультииндексы (α, β) такие, что $\partial_1^\alpha \partial_2^\beta$ участвует в одном из T_j, лежат ниже Λ или на ней. Это означает, что все такие мультииндексы должны удовлетворять следующему неравенству:

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} \leqslant 1.$$

Теперь определим старшую часть оператора T_j как сумму всех дифференциальных мономов, участвующих в T_j, мультииндексы которых лежат на прямой Λ, а младшую часть – как сумму всех остальных мономов оператора T_j. Старшая часть обозначается через σ_j, а младшая – через τ_j.

Предположим, что при некотором выборе допустимой прямой Λ найдутся как минимум два линейно независимых оператора среди всех старших частей σ_j. В таком случае, в [11,12] было доказано, что $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)$ не изоморфно дополняемому подпространству пространства $C(S)$.

Однако, при более ограничительных предположениях о наборе $\mathcal{T}$ это – не самое сильное известное утверждение. Например, в [7] было доказано, что $C^k(\mathbb{T}^2)$ не изоморфно факторпространству пространства

$C(S)$. Следующая теорема распространяет это утверждение на наш более общий контекст.

Теорема 1. *Если для набора $\mathcal{T}$ среди операторов σ_j найдутся по крайней мере два линейно независимых (при некотором выборе допустимой прямой Λ), то $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)$ не изоморфно факторпространству пространства $C(S)$.*

Это первый основной результат настоящей статьи.

Известно также, что в специальных случаях заключение теоремы из [11, 12] может быть усилено ещё одним способом. В [13] было доказано, что если все операторы в наборе $\mathcal{T}$ являются дифференциальными мономами и хотя бы два старших (относительно некоторого шаблона однородности) монома линейно независимы (то есть попросту различны), то пространство $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)$ не имеет локальной безусловной структуры.

Приведём необходимые определения, следуя работе [3]. Говорят, что банахово пространство X имеет локальную безусловную структуру, если существует такая константа $C > 0$, что для любого конечномерного подпространства $F \subset X$ существует банахово пространство E с 1-безусловным базисом и два линейных оператора $R : F \to E$ и $S : E \to X$ такие, что $SRx = x$ для всех $x \in F$ и $\|S\| \cdot \|R\| \leqslant C$. Базис $\{e_n\}$ назывется 1-безусловным, если для любых чисел ε_n, по модулю не превосходящих единицы, и любой финитной последовательности (α_n) имеет место следующее неравенство: $\| \sum \varepsilon_n \alpha_n x_n\| \leqslant \| \sum \alpha_n x_n\|$.

Стоит отметить, что пространство X имеет локальную безусловную структуру тогда и только тогда, когда его сопряженное X^* является дополняемым подпространством в банаховой решётке (см. [17]). Поскольку пространство $C(S)$ имеет локальную безусловную структуру, неизоморфность пространства $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)$ дополняемому подпространству в $C(S)$ также получится, если удастся установить отсутствие локальной безусловной структуры в $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)$. Следующая теорема говорит, когда такой структуры там действительно нет.

Теорема 2. *Если для набора $\mathcal{T}$ среди операторов σ_j найдутся по крайней мере два линейно независимых (при некотором выборе допустимой прямой Λ), то в пространстве $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)$ нет локальной безусловной структуры.*

Основные инструменты доказательств этих теорем – в основном такие же, как в [11, 12]. Мы используем новую теорему вложения, установленную в этих работах, а также некоторые факты о p-суммирующих операторах.

Сначала введем некоторые определения. Обобщённую функцию f на торе $\mathbb{T}^2$ назовём правильной, если $\hat{f}(s,t) = 0$, когда $s = 0$ или $t = 0$. Кроме того, нам понадобится понятие пространств Соболева с нецелым показателем гладкости:

$$W_2^{\alpha,\beta}(\mathbb{T}^2) = \{f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)' : \{(1+m^2)^{\alpha/2}(1+n^2)^{\beta/2}\hat{f}(m,n)\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^2)\}.$$

Норма f в $W_2^{\alpha,\beta}(\mathbb{T}^2)$ задаётся выражением

$$\|\{(1+m^2)^{\alpha/2}(1+n^2)^{\beta/2}\hat{f}(m,n)\}\|_{\ell^2}.$$

Приведём теперь теорему вложения (см. теорему 0.2 и замечание 1.6 в [11]), которую мы будем использовать в дальнейшем.

Факт 1. *Пусть правильные обобщённые функции $\phi_1, \dots, \phi_N$ являются решением следующей системы уравнений*:

$$-\partial_1^k \varphi_1 = \mu_0; \;\; \partial_2^l \varphi_j - \partial_1^k \varphi_{j+1} = \mu_j, \;\; j = 1, \dots, N-1; \;\; \partial_2^l \phi_N = \mu_N, \quad (1)$$

где $\mu_0, \dots, \mu_N$ – функции из $L^1(\mathbb{T}^2)$ (или меры). Тогда верно следующее неравенство:

$$\sum_{j=1}^N \|\varphi_j\|_{W_2^{\frac{k-1}{2},\frac{l-1}{2}}(\mathbb{T}^2)} \lesssim \sum_{j=0}^N \|\mu_j\|.$$

Здесь (и везде далее в этой статье) символ $A \lesssim B$ означает, что существует такая константа $C > 0$, что $A \leqslant CB$.

Сделаем несколько замечаний. Во-первых, теоремы 1 и 2 верны и для тора произвольной размерности $\mathbb{T}^n$. Но этот факт не может быть получен из 2-мерных утверждений (или, по крайней мере, неясно, как это сделать; некоторые объяснения по этому поводу можно найти в [11]). Доказательства теорем в более высоких размерностях похожи, однако, они намного более технически сложны (и даже требуют другой теоремы вложения, опять же, см. теорему 1.1 в статье [11]). В этой статье мы ограничимся двумерным случаем.

Итак, мы приведём здесь детальные доказательства теорем 1 и 2. Начнем с первой теоремы, потому что ее доказательство проще и содержит меньше технических деталей (однако читатель может заметить, что доказательства обеих теорем весьма похожи и используют многие идеи из препринта [12]).

Отметим также, что в статье [13] было доказано (опять же, в случае, когда все операторы в $\mathcal{T}$ являются дифференциальными мономами и среди их старших частей есть хотя бы два линейно различных оператора), что если $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)^*$ изоморфно подпространству пространства Y с локальной безусловной структурой, то Y содержит пространства ℓ_∞^k равномерно и равномерно дополняемо (определение см. в [13]). То же самое утверждение может быть доказано и в нашей ситуации, но мы не приводим здесь детали, потому что наша главная цель – показать, что, используя теорему вложения из [12], мы можем адаптировать различные методы к более общему контексту, и, хотя это утверждение влечёт теорему 1, мы решили пожертвовать общностью ради простоты и прозрачности изложения.

Также следует сказать несколько слов об обозначениях. Как уже упоминалось, мы пишем $A \lesssim B$, если $A \leqslant CB$ для некоторой константы $C > 0$. Из контекста всегда будет ясно, от каких параметров может зависеть C, а от каких – нет. Кроме того, обозначение $A \asymp B$ означает, что $A \lesssim B$ и $B \lesssim A$.

§2. Неизоморфность факторпространству пространства $C(S)$

Как это было сделано в [12], мы начинаем доказательство теоремы 1 с некоторых простых, но полезных наблюдений.

2.1. Несколько упрощений. Обозначим пространство правильных функций из $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)$ через $C_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)$. Ясно, что это пространство дополняемо в $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)$ (проектор задается сверткой с некоторой мерой), поэтому мы можем доказать теорему 1 для $C_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)$ вместо $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)$.

Далее, предположим, что допустимая прямая Λ задается уравнением $x/a + y/b = 1$. Покажем, что без ограничения общности можно считать, что a и b являются натуральными числами. Действительно, в соответствии с условиями теоремы 1, на Λ есть как минимум две точки (r_1, r_2) и (ρ_1, ρ_2) с неотрицательными целочисленными координатами. Для определённости будем считать, что $r_1 > \rho_1$ и $r_2 < \rho_2$.

Тогда уравнение прямой Λ можно записать в следующем виде:

$$\frac{x}{r_1-\rho_1}+\frac{y}{\rho_2-r_2}=\frac{\rho_1}{r_1-\rho_1}+\frac{\rho_2}{\rho_2-r_2}.$$

Теперь заметим, что мы можем сдвинуть прямую Λ (и всю конструкцию) на вектор с целыми неотрицательными координатами. Это означает, что мы можем заменить набор $\mathcal{T}$ на набор $\{T_1\partial_1^u\partial_2^v,\dots,T_J\partial_1^u\partial_2^v\}$. Соответствующие пространства

$$C_0^{\{T_1,\dots,T_J\}}(\mathbb{T}^2) \quad \text{и} \quad C_0^{\{T_1\partial_1^u\partial_2^v,\dots,T_J\partial_1^u\partial_2^v\}}(\mathbb{T}^2)$$

изоморфны – изоморфизм задается отображением $f\mapsto\partial_1^u\partial_2^v f$. Таким образом, делая этот сдвиг, мы можем считать, что уравнение прямой Λ имеет следующий вид:

$$\frac{x}{r_1-\rho_1}+\frac{y}{\rho_2-r_2}=\frac{\rho_1+u}{r_1-\rho_1}+\frac{\rho_2+v}{\rho_2-r_2}.$$

Если записать это уравнение в виде $x/a_1+y/b_1=1$, то a_1 и b_1 будут следующими числами:

$$\rho_1+u+(\rho_2+v)\frac{r_1-\rho_1}{\rho_2-r_2} \quad \text{и} \quad \rho_2+v+(\rho_1+u)\frac{\rho_2-r_2}{r_1-\rho_1}.$$

Ясно, что мы можем найти такие натуральные u и v, что эти два выражения будут целыми числами.

Итак, без ограничения общности мы предполагаем, что уравнение прямой Λ имеет вид $x/a+y/b=1$, где a и b – натуральные числа. Обозначим их наибольший общий делитель через N. Тогда все точки с целыми координатами на Λ имеют вид $(jm,(N-j)n)$, $0\leqslant j\leqslant N$ (здесь $m=a/N$ и $n=b/N$, поэтому m и n взаимно просты).

2.2. Основная конструкция. Предположим, что $C_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)$ изоморфно фактору пространства $C(S)$. Обозначим через P факторотображение, $P: C(S)\to C_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)$.

Благодаря сделанным выше упрощениям, старшая часть каждого оператора из $\mathcal{T}$ имеет следующий вид:

$$\sigma_s=\sum_{j=0}^{N}a_{sj}\partial_1^{jm}\partial_2^{(N-j)n}.$$

Отметим, что пространство $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)$ зависит только от линейной оболочки операторов из $\mathcal{T}$, поэтому мы можем изменить наш набор так, чтобы эти изменения не влияли на эту линейную оболочку.

Теперь рассмотрим матрицу (a_{sj}). Пусть j_0 – это наименьший индекс, такой что $a_{sj_0} \neq 0$ при некотором s. Без ограничения общности можно считать, что $a_{1j_0} \neq 0$. Затем, умножая T_1 на константу и вычитая кратное оператора T_1 из других операторов, мы можем считать, что $a_{1j_0} = -1$ и $a_{sj_0} = 0$, если $s > 1$. Согласно условию теоремы, существует такой индекс j_1, что $a_{sj_1} \neq 0$ для некоторого $s > 1$. Опять же, без ограничения общности мы считаем, что $a_{2j_1} = 1$ и $a_{sj_1} = 0$ для всех $s > 2$.

Таким образом, у нас есть два оператора, T_1 и T_2, старшие части которых линейно независимы. Тогда для простоты обозначим коэффициенты их старших частей через a_j и b_j соответственно, то есть

$$\sigma_1 = \sum_{j=0}^{N} a_j \partial_1^{jm} \partial_2^{(N-j)n};$$

$$\sigma_2 = \sum_{j=0}^{N} b_j \partial_1^{jm} \partial_2^{(N-j)n}.$$

Кроме того, T_1 является единственным оператором из набора $\mathcal{T}$, который включает в себя дифференциальный моном $\partial_1^{j_0 m} \partial_2^{(N-j_0)m}$, а T_2 – единственный оператор из $\mathcal{T}$ кроме, может быть, T_1, который включает в себя моном $\partial_1^{j_1 m} \partial_2^{(N-j_1)m}$.

Рассмотрим вложение пространства $C_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)$ в $C_0^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^2)$ (обозначим его через i). Затем мы можем вложить это пространство в $W_1^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^2)$. Обозначим это вложение через g. Здесь, разумеется, пространства $C_0^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^2)$ и $W_1^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^2)$ определяются полунормами $\max\{\|T_1 f\|_{C(\mathbb{T}^2)}, \|T_2 f\|_{C(\mathbb{T}^2)}\}$ и $\max\{\|T_1 f\|_{L^1(\mathbb{T}^2)}, \|T_2 f\|_{L^1(\mathbb{T}^2)}\}$, соответственно, и состоят только из правильных функций. Отметим, что оператор g является 1-суммирующим – это легко следует из теоремы Пича о факторизации. Теория p-суммирующих операторов хорошо изложена в книге [19] (см. главу III.F).

Наша следующая цель – построить оператор s, действующий из $W_1^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^2)$ в $W_2^{\frac{m-1}{2},\frac{n-1}{2}}(\mathbb{T}^2)$. Опять же, конструкция будет очень похожа на то, что сделано в [12] (но с некоторыми упрощениями).

Нам понадобится следующий простой факт.

Факт 2. *Система уравнений* (1), *где* μ_j – *правильные меры* (*или функции из* L^1), *разрешима тогда и только тогда, когда выполняется следующее соотношение*:

$$\sum_{j=0}^{N} \partial_1^{jk} \partial_2^{(N-j)l} \mu_j = 0. \tag{2}$$

Этот факт довольно просто доказывается по индукции, подробности можно найти в [12] (см. лемму 2.1).

Рассмотрим произвольную функцию $f \in W_1^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^2)$ и сопоставим ей пару функций $(f_1, f_2) = (T_1 f, T_2 f)$. Ясно, что для них выполняется уравнение $T_2 f_1 - T_1 f_2 = 0$. Перепишем это дифференциальное уравнение в другом виде. Чтобы сделать это, отметим, что если $\alpha/a + \beta/b < 1$, то мы можем выразить дифференциальный моном $\partial_1^\alpha \partial_2^\beta$ через ∂_1^a и ∂_2^b, используя мультипликаторы Фурье:

$$\partial_1^\alpha \partial_2^\beta f = I_{\alpha\beta} \partial_1^a f + J_{\alpha\beta} \partial_2^b f,$$

где $I_{\alpha\beta}$ и $J_{\alpha\beta}$ – мультипликаторы Фурье со следующими символами:

$$\frac{(iu)^{\alpha+a}(iv)^\beta}{(iu)^{2a} \pm (iv)^{2b}} \qquad \text{и} \qquad \pm\frac{(iu)^\alpha (iv)^{\beta+b}}{(iu)^{2a} \pm (iv)^{2b}},$$

соответственно. Это означает, что они действуют на функцию $g \in L_0^1(\mathbb{T}^2)$, умножая ее коэффициенты Фурье $\hat{g}(u, v)$ на эти выражения. Выбор знака $\pm$ определяется условием $(-1)^a = \pm(-1)^b$, так что знаменатели не обращаются в ноль, когда u и v не равны нулю. В препринте [12] доказано, что такие мультипликаторы ограничены как операторы на $L_0^1(\mathbb{T}^2)$. Сформулируем это утверждение для удобства дальнейших ссылок.

Факт 3. *Определённые выше мультипликаторы Фурье* $I_{\alpha\beta}$ *и* $J_{\alpha\beta}$ *ограничены на* $L_0^1(\mathbb{T}^2)$.

При помощи этих мультипликаторов мы можем записать младшие части операторов T_1 и T_2 в следующем виде:

$$\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} (I_{\alpha\beta} \partial_1^a + J_{\alpha\beta} \partial_2^b).$$

Теперь мы можем перегруппировать члены в выражении $T_2 f_1 - T_1 f_2$ и переписать его в виде

$$\sum_{j=0}^{N} \partial_1^{jm} \partial_2^{(N-j)n} \mu_j = 0,$$

где μ_j – это в точности функции $b_j f_1 - a_j f_2$, когда $j \neq 0, N$, μ_0 имеет вид $b_0 f_1 - a_0 f_2$ плюс некоторая линейная комбинация операторов $J_{\alpha\beta}$, применённых к f_1 и f_2, а μ_N равно $b_N f_1 - a_N f_2$ плюс некоторая линейная комбинация операторов $I_{\alpha\beta}$, примененных к f_1 и f_2.

Согласно факту 2, мы можем найти решение следующей системы дифференциальных уравнений:

$$-\partial_1^m \varphi_1 = \mu_0; \;\; \partial_2^n \varphi_j - \partial_1^m \varphi_{j+1} = \mu_j, \; j = 1, \ldots, N-1; \;\; \partial_2^n \varphi_N = \mu_N. \quad (3)$$

Используя факт 1, мы можем заключить, что все функции φ_j лежат в пространстве $W_2^{\frac{m-1}{2}, \frac{n-1}{2}}(\mathbb{T}^2)$. В качетве образа функции f мы возьмём функцию $\varphi_{j_0+1} \in W_2^{\frac{m-1}{2}, \frac{n-1}{2}}(\mathbb{T}^2)$ (она зависит линейно от f), и таким образом получим ограниченный линейный оператор s, действующий из $W_1^{T_1, T_2}(\mathbb{T}^2)$ в $W_2^{\frac{m-1}{2}, \frac{n-1}{2}}(\mathbb{T}^2)$. Подводя итог, мы имеем следующую диаграмму:

$$C(S) \xrightarrow{P} C_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{i} C_0^{T_1, T_2}(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{g} W_1^{T_1, T_2}(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{s} W_2^{\frac{m-1}{2}, \frac{n-1}{2}}(\mathbb{T}^2).$$

2.3. Противоречие. Теперь перейдем к заключительной части доказательства. Мы построим оператор, действующий из пространства $W_2^{\frac{m-1}{2}, \frac{n-1}{2}}(\mathbb{T}^2)$ в пространство $C(S)$ и используем некоторые стандартные факты из теории банаховых пространств (в основном об абсолютно суммирующих операторах), чтобы получить противоречие. Перейдем к деталям.

Рассмотрим функцию $v_{pq} := z_1^p z_2^q \in C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)$. Мы будем предполагать, что натуральные числа p и q удовлетворяют неравенству

$$\frac{\delta}{2} q^n \leqslant p^m \leqslant \delta q^n,$$

где δ – малое фиксированное число (зависящее, конечно, от нашего набора $\mathcal{T}$, но не от p и q), которое будет выбрано позже. Также мы будем рассматривать только достаточно большие значения p: $p > C$

для некоторой большой константы C. Далее мы всегда по умолчанию будем предполагать, что числа p и q удовлетворяют этим условиям.

Прежде всего, заметим, что $\|v_{pq}\|_{C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)} \asymp p^{mN}$.

В самом деле, любой дифференциальный моном $\partial_1^\alpha \partial_2^\beta$, участвующий в младшей части любого оператора из $\mathcal{T}$, действует на v_{pq} следующим образом: $(\partial_1^\alpha \partial_2^\beta)(z_1^p z_2^q) = (ip)^\alpha (iq)^\beta z_1^p z_2^q$. Поскольку этот моном находится в младшей части некоторого оператора, имеет место следующее неравенство: $\frac{\alpha}{Nm} + \frac{\beta}{Nn} < 1$. Поэтому, если $\alpha = \alpha_0 m$, то $\beta = (N - \alpha_0 - c)n$ для некоторого $c > 0$. Следовательно, норма функции $\partial_1^\alpha \partial_2^\beta v_{pq}$ в $C(\mathbb{T}^2)$ равна $p^\alpha q^\beta = p^{\alpha_0 m} q^{(N-\alpha_0-c)n} \asymp p^{m(N-c)}$. Ясно, что эта величина может быть в произвольное число раз меньше, чем p^{mN}, если p достаточно велико.

С другой стороны, если мы применим любой дифференциальный моном, участвующий в старшей части одного из операторов (и потому имеющий вид $\partial_1^{jm} \partial_2^{(N-j)n}$), к v_{pq}, то мы получаем функцию с нормой $p^{jm} q^{(N-j)n} \asymp p^{mN}$. Более того, если $j > j_0$, то $p^{jm} q^{(N-j)n} \asymp \delta^j q^{nN}$, и эта величина может быть в произвольное число раз меньше, чем $p^{j_0 m} q^{(N-j_0)n} \asymp \delta^{j_0} q^{nN}$, если δ достаточно мало, поэтому $\|T_1 v_{pq}\|_{C(\mathbb{T}^2)} \asymp p^{mN}$. Все эти вычисления показывают, что действительно $\|v_{pq}\|_{C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)} \asymp p^{mN}$.

Аналогично можно получить, что $\|v_{pq}\|_{C^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^2)} \asymp p^{mN}$ и $\|v_{pq}\|_{W_1^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^2)} \asymp p^{mN}$. В связи с этим, будем рассматривать функции

$$w_{pq} := \frac{v_{pq}}{p^{mN}}.$$

Согласно рассуждениям, приведённым выше, мы имеем $\|w_{pq}\|_{C_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)} \asymp 1$. Следовательно, существуют функции $f_{pq} \in C(S)$, такие что $P(f_{pq}) = w_{pq}$ и $\|f_{pq}\|_{C(S)} \leqslant C$. Кроме того, легко заметить (опять же, воспользовавшись рассужденями выше), что $T_1 w_{pq} = c_{pq} v_{pq}$ и $T_2 w_{pq} = d_{pq} v_{pq}$, где $|c_{pq}|, |d_{pq}| \asymp 1$.

Далее, нам нужно решить систему дифференциальных уравнений (3). Напомним, что μ_0 равно $b_0 c_{pq} v_{pq} - a_0 d_{pq} v_{pq}$ плюс некоторая линейная комбинация операторов $I_{\alpha\beta}$ и $J_{\alpha\beta}$, применённых к $T_1 w_{pq}$ и $T_2 w_{pq}$. Поэтому мы запишем μ_0 в следующем виде:

$$\mu_0 = \xi_{pq} c_{pq} v_{pq} + \eta_{pq} d_{pq} v_{pq} + (b_0 c_{pq} v_{pq} - a_0 d_{pq} v_{pq}).$$

Легко понять, что $\xi_{pq}, \eta_{pq} = O(p^{-\varepsilon})$ для некоторого малого фиксированного числа $\varepsilon > 0$. Действительно, напомним, что символ любого мультипликатора Фурье $I_{\alpha\beta}$ имеет вид

$$\frac{(ip)^{\alpha+a}(iq^{\beta})}{(ip)^{2a} \pm (iq)^{2b}}.$$

Модуль этого выражения можно оценить следующим образом:

$$\Big|\frac{(ip)^{\alpha+Nm}(iq^{\beta})}{(ip)^{2Nm} \pm (iq)^{2Nn}}\Big| \asymp \frac{p^{\alpha}q^{\beta}}{p^{Nm}} \asymp \frac{p^{\alpha} \cdot p^{\frac{m}{n}\beta}}{p^{Nm}}.$$

Здесь $\alpha/m + \beta/n < N$, и потому это выражение в самом деле есть $O(p^{-\varepsilon})$. То же самое верно для всех операторов $I_{\alpha\beta}$ и $J_{\alpha\beta}$.

Теперь нужно найти решение системы дифференциальных уравнений (3). В частности, нас интересует функция φ_{j_0+1} (именно так мы определили оператор s).

Если $j_0 = 0$, то нам нужно только первое дифференциальное уравнение, чтобы найти φ_1. По построению, то, что $j_0 = 0$, означает, что $a_0 = -1$ и $b_0 = 0$. Поэтому ясно, что $\varphi_1 = k_{pq}\frac{v_{pq}}{p^m}$, где $|k_{pq}| \asymp 1$.

Если же $j_0 > 0$, то, по построению, $a_0 = b_0 = 0$, и мы используем первое уравнение из системы (3), чтобы заключить, что

$$\varphi_1 = \xi_{pq}^{(1)} \cdot \frac{v_{pq}}{p^m}, \quad \text{где} \quad \xi_{pq}^{(1)} = O(p^{-\varepsilon}).$$

Заметим, что в этом случае $|\partial_2^n \varphi_1| = |\xi_{pq}^{(1)}\frac{q^n}{p^m}v_{pq}| \asymp |\xi_{pq}^{(1)}v_{pq}|$. Теперь, если $j_0 = 1$, то мы используем второе уравнение, чтобы заключить, что $\varphi_2 = k_{pq}\frac{v_{pq}}{p^m}$, где $|k_{pq}| \asymp 1$ (опять же, в этом случае $\mu_1 = b_1 c_{pq} v_{pq} - a_1 d_{pq} v_{pq}$ и, поскольку $j_0 = -1$, мы видим, что $a_1 = -1, b_1 = 0$). Если $j_0 > 1$, то из второго уравнения мы заключаем, что $\varphi_2 = \xi_{pq}^{(2)} v_{pq}$, где $|\xi_{pq}^{(2)}| = O(p^{-\varepsilon})$, и т. д.

Так или иначе, можно заключить, что для функции φ_{j_0+1} верно следующее:

$$\varphi_{j_0+1} = k_{pq}\frac{v_{pq}}{p^m}, \quad \text{где} \quad |k_{pq}| \asymp 1.$$

Теперь, чтобы подчеркнуть зависимость функции φ_{j_0+1} от p и q, будем использовать обозначение $\varphi^{(p,q)} := \varphi_{j_0}$. Ясно, что набор $\{\varphi^{(p,q)}\}$ является ортогональной системой в $W_2^{\frac{m-1}{2},\frac{n-1}{2}}$ и

$$\|\varphi^{(p,q)}\|_{W_2^{\frac{m-1}{2},\frac{n-1}{2}}} \asymp p^{-m} p^{\frac{m-1}{2}} q^{\frac{n-1}{2}} \asymp p^{-1/2} q^{-1/2}.$$

Наконец, рассмотрим оператор $A : W_2^{\frac{m-1}{2},\frac{n-1}{2}} \to C(S)$, который переводит функции $p^{1/2}q^{1/2}\varphi^{(p,q)}$ в $\alpha_{pq} f_{pq}$, где (α_{pq}) – произвольная последовательность чисел, такая, что $\sum |\alpha_{pq}|^2 = 1$. Чтобы не углубляться в вопросы сходимости, будем рассматривать только финитные последовательности (α_{pq}) – то есть будем считать, что $\alpha_{pq} = 0$, если $p \geqslant M$, где M – произвольное большое натуральное число. Напомним также, что p и q удовлетворяют наложенным ранее условиям.

Для всякой функции $h \in W_2^{\frac{m-1}{2}, \frac{n-1}{2}}$, такой, что

$$h = \sum_{p<M} \varkappa_{pq} p^{1/2} q^{1/2} \varphi^{(p,q)},$$

мы имеем:

$$Ah = \sum_{p<M} \varkappa_{pq} \alpha_{pq} f_{pq}.$$

Поэтому, для оценки нормы оператора A напишем:

$$\|Ah\|_{C(S)} \lesssim \sum_{p<M} |\varkappa_{pq}\alpha_{pq}| \leqslant \Big(\sum |\varkappa_{pq}|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum |\alpha_{pq}|^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\sum |\varkappa_{pq}|^2\Big)^{1/2} \lesssim \|h\|_{W_2^{\frac{m-1}{2}, \frac{n-1}{2}}}.$$

Таким образом получается, что $\|A\| \lesssim 1$.

Кроме того, напомним, что оператор g (см. диаграмму в конце параграфа 2.2) является 1-суммирующим и, следовательно, оператор $sgiP$ – тоже 1-суммирующий. Поскольку этот оператор действует из пространства $C(S)$, он также является 1-интегральным (см. [19]). Отсюда можно заключить, что оператор $sgiPA$ – также 1-интегральный и, так как он переводит в ноль функции вне конечномерного пространства, он также 1-ядерный и, кроме того, для него выполняется соотношение $i_1(sgiPA) \geqslant |\mathrm{tr}(sgiPA)|$ (через i_1 мы тут обозначили норму в классе 1-интегральных операторов) – соответствующий факт можно также найти в книге [19] (см. страницы 218–219). Таким образом, мы получаем, что след оператора $sgiPA$ ограничен константой, не зависящей от выбора последовательности (α_{pq}), так как

$$|\mathrm{tr}(sgiPA)| \leqslant i_1(sgiPA) \leqslant i_1(sgiP)\|A\| \lesssim \pi_1(sgiP)\|A\| \lesssim \|sgiP\|\|A\| \lesssim 1.$$

Докажем теперь, что на самом деле это не так, и таким образом придём к противоречию. Напомним, что по построению оператор $sgiP$ переводит f_{pq} в $\varphi^{(p,q)}$, а A переводит $\varphi^{(p,q)}$ в $p^{-1/2}q^{-1/2}\alpha_{pq} f_{pq}$. Следовательно, оператор $sgiPA$ – диагональный (в базисе $\{\varphi^{(p,q)}\}$):

$$sgiPA(\varphi^{(p,q)}) = p^{-1/2}q^{-1/2}\alpha_{pq}\varphi^{(p,q)}.$$

Поскольку его след ограничен, можно сделать вывод, что

$$\Big|\sum p^{-1/2}q^{-1/2}\alpha_{pq}\Big| \lesssim 1.$$

Это неравенство справедливо для произвольной финитной последовательности (α_{pq}), такой, что $\sum|\alpha_{pq}|^2 = 1$, из чего следует, что

$$\sum p^{-1}q^{-1} \lesssim 1.$$

Но это, очевидно, неверно. Действительно, напомним, что количество допустимых чисел q здесь порядка $p^{m/n}$, и для каждого такого q мы имеем $q \asymp p^{m/n}$. Следовательно, наша сумма может быть оценена снизу следующим образом:

$$\sum_{C<p<M} p^{-1}.$$

Поскольку $\sum p^{-1}$ – расходящийся ряд, мы получили противоречие, и доказательство теоремы 1 завершено.

§3. Отсутствие локальной безусловной структуры

Приступим теперь к доказательству другого основного утверждения этой статьи, теоремы 2. В основном это доказательство использует методы из [13], а также теорему вложения из [11] (факт 1). Точно так же, как в доказательстве теоремы 1, будем доказывать теорему от противного и предположим, что пространство $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)$ имеет локальную безусловную структуру.

3.1. Основные конструкции. Во-первых, отметим, что мы можем сделать те же упрощения, что и при доказательстве теоремы 1. Мы будем рассматривать пространство $C_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)$ вместо $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)$, поскольку переход к дополняемому подпространству сохраняет локальную безусловную структуру. Кроме того, мы будем предполагать, что все дополнительные предположения из §2.1 выполнены. Далее мы определяем операторы i, g, s так же, как в §2.2. Мы по-прежнему обозначаем старшую часть оператора T_j через σ_j, а младшую часть – через τ_j.

Обозначим через H набор дифференциальных мономов, соответствующих всем точкам с целочисленными координатами на прямой Λ. Тогда мы можем рассмотреть вложение $j : C_0^H(\mathbb{T}^2) \to C_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)$, являющееся непрерывным оператором (см. [1, теорема 9.5]). Таким образом, у нас есть следующая диаграмма:

$$C_0^H(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{j} C_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{i} C_0^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{g} W_1^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{s} W_2^{\frac{m-1}{2},\frac{n-1}{2}}(\mathbb{T}^2).$$

Напомним, что оператор g 1-суммирующий. Воспользуемся следующим фактом (см. [3] или [17, глава 23]).

Факт 4. *Пусть X – банахово пространство, имеющее локальную безусловную структуру. Тогда всякий 1-суммирующий оператор T, действующий из X в произвольное банахово пространство Y, может быть факторизован через пространство L^1, то есть существует мера μ и операторы $V : X \to L^1(\mu)$ и $U : L^1(\mu) \to Y^{**}$ такие, что $UV = \kappa T$, где $\kappa : Y \to Y^{**}$ – каноническое вложение.*

Благодаря этому факту, мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
C_0^H(\mathbb{T}^2) \arrow[r, "j"] & C_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "V"] & C_0^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^2) \arrow[r, "g"] & W_1^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^2) \arrow[r, "s"] & W_2^{\frac{m-1}{2},\frac{n-1}{2}}(\mathbb{T}^2) \\
 & & L^1(\mu) \arrow[urr, "U"] & &
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим теперь двойственную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
C_0^H(\mathbb{T}^2)^* & C_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)^* \arrow[l, "j^*"'] & C_0^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^2)^* \arrow[l, "i^*"'] & W_1^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^2)^* \arrow[l, "g^*"'] & W_2^{\frac{m-1}{2},\frac{n-1}{2}}(\mathbb{T}^2) \arrow[l, "s^*"'] \arrow[dll, "U^*"] \\
 & & L^\infty(\mu) \arrow[ul, "V^*"] & &
\end{tikzcd}$$

Следующий шаг доказательства – построение некоторого специального оператора, который действует из $C_0^H(\mathbb{T}^2)^*$ в $W_{1/2}^H(\mathbb{T}^2)$ (это пространство квазибанахово; определение будет дано ниже). Эта конструкция повторяет конструкцию из статьи [13], но для полноты изложения мы приведём её здесь.

Рассмотрим пространство $W_2^H(\mathbb{T}^2)$, которое определяется с помощью следующей полунормы (и состоит только из правильных функций):

$$\|f\|_{W_2^H(\mathbb{T}^2)} = \max_{T \in H} \|Tf\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}.$$

Очевидно, что это гильбертово пространство. Напомним, что H – это следующее множество операторов: $\{\partial_1^{jm}\partial_2^{(N-j)n}\}_{j=0}^N$. Пространство $W_2^H(\mathbb{T}^2)$ можно отождествить с подпространством в $L^2(\mathbb{T}^2) \oplus \ldots \oplus$

$L^2(\mathbb{T}^2)$ (здесь имеется в виду прямая сумма $N+1$ копии пространства $L^2(\mathbb{T}^2)$); это отождествление задается отображением

$$f \mapsto (\partial_1^{jm}\partial_2^{(N-j)n} f)_{j=0}^N.$$

Таким образом, мы можем рассмотреть ортогональный проектор, действующий из прямой суммы $N+1$ копии пространства $L^2(\mathbb{T}^2)$ в $W_2^H(\mathbb{T}^2)$. Обозначим этот проектор через P. Нам понадобятся некоторые свойства этих операторов, поэтому приведём их здесь. Все они перечислены в [13].

Во-первых, легко понять, как P действует на естественном базисе прямой суммы $L^2(\mathbb{T}^2)\oplus\ldots\oplus L^2(\mathbb{T}^2)$. Пусть $k=(k_1,k_2)$ – пара целых чисел и через ϕ_k^l обозначим следующий элемент пространства $L^2(\mathbb{T}^2)\oplus \ldots\oplus L^2(\mathbb{T}^2)$:

$$\phi_k^l = (0,0,\ldots,0,z_1^{k_1}z_2^{k_2},0,0\ldots,0).$$

Моном $z_1^{k_1}z_2^{k_1}$ находится на l-ой позиции. Следующее утверждение доказывается с помощью несложных вычислений.

Факт 5. *Если k_1 или k_2 равняется 0, то $P(\phi_k^l)=0$. Иначе*

$$P(\phi_k^l) = \bar\lambda_l\Big(\sum_{j=0}^N|\lambda_j|^2\Big)^{-1}(\lambda_0 z_1^{k_1}z_2^{k_2},\ldots,\lambda_N z_1^{k_1}z_2^{k_2}),$$

где $\lambda_j=(ik_1)^{jm}(ik_2)^{(N-j)n}$.

Поймём теперь, как действует P на элементы пространства $C_0^H(\mathbb{T}^2)^*$. Пространство $C_0^H(\mathbb{T}^2)$ можно отождествить с подпространством в $C(\mathbb{T}^2)\oplus\ldots\oplus C(\mathbb{T}^2)$ (так же, как $W_2^H(\mathbb{T}^2)$ мы отождествляли с подпространством в $L^2(\mathbb{T}^2)\oplus\ldots\oplus L^2(\mathbb{T}^2)$). Поэтому имеем:

$$C_0^H(\mathbb{T}^2)^* = (\mathcal{M}(\mathbb{T}^2)\oplus\ldots\oplus\mathcal{M}(\mathbb{T}^2))/\mathcal{X},$$

где $\mathcal{X}$ – это аннулятор пространства $C_0^H(\mathbb{T}^2)$ в $\big(C(\mathbb{T}^2)\oplus\ldots\oplus C(\mathbb{T}^2)\big)^*$:

$$\mathcal{X} = \Big\{(\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_N) : \sum_{j=0}^N\int \partial_1^{jm}\partial_2^{(N-j)n}h\,d\bar\mu_j = 0\ \forall\, h\in C_0^H(\mathbb{T}^2)\Big\}.$$

На этом этапе, чтобы избежать некоторых технических сложностей, мы должны рассмотреть оператор Φ_M, являющийся свёрткой с M-ым ядром Фейера по обеим переменным, и операторы P_M такие, что

$$P_M(F) = P(\Phi_M\mu_0,\Phi_M\mu_1,\ldots,\Phi_M\mu_N),\quad F\in C_0^H(\mathbb{T}^2)^*,$$

где $(\mu_0, \dots, \mu_N)$ – любой представитель функционала F. Эта формула корректна, так как P – *ортогональный* проектор, а потому, если $(\nu_0, \dots, \nu_N)$ лежит в $\mathcal{X}$, то $(\Phi_M \nu_0, \dots, \Phi_M \nu_N)$ попадает в $\mathcal{X} \cap (L^2(\mathbb{T}^2) \oplus \dots \oplus L^2(\mathbb{T}^2))$, то есть в ядро проектора P. Приведём теперь следующий факт из [13].

Факт 6. *Операторы* $P_M : C_0^H(\mathbb{T}^2) \to W_{1/2}^H(\mathbb{T}^2)$ *равномерно ограничены по* M.

Определение пространства $W_{1/2}^H(\mathbb{T}^2)$ здесь понятно из контекста.

Доказательство (по модулю некоторых технических деталей) следует из теории сингулярных интегральных операторов (и мультипликаторов Фурье) со смешанной однородностью, разработанной в [2] (легко видеть, что формулы из факта 5, задающие компоненты оператора P, являются мультипликаторами Фурье с определенной однородностью), и даже верно, что эти операторы равномерно имеют слабый тип $(1, 1)$. Конечно, тут есть некоторые технические различия, например, в [2] все было сделано для пространства $\mathbb{R}^n$ вместо $\mathbb{T}^n$. Но эти различия преодолеваются довольно легко, опять же, некоторые детали можно найти в [13].

Таким образом, у нас имеется следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
W_{1/2}^H(\mathbb{T}^2) & C_0^H(\mathbb{T}^2)^* \arrow[l, "P_M"'] & C_0^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^2)^* \arrow[l, "j^*"'] & C_0^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^2)^* \arrow[l, "i^*"'] & W_1^{T_1,T_2}(\mathbb{T}^2)^* \arrow[l, "g^*"'] \\
 & & & L^\infty(\mu) \arrow[ul, "V^*"'] & W_2^{\frac{m-1}{2},\frac{n-1}{2}}(\mathbb{T}^2) \arrow[l, "U^*"'] \arrow[u, "s^*"']
\end{tikzcd}$$

Теперь мы воспользуемся некоторыми фактами из теории p-суммирующих операторов. Хорошая ссылка здесь – [6]. Пространство $W_{\frac{1}{2}}^H(\mathbb{T}^2)$ яляется квазибанаховым пространством котипа 2, а $L^\infty(\mu)$ – пространством типа $C(K)$. Следовательно, $P_M j^* V^*$ – 2-суммирующий оператор и $\pi_2(P_M j^* V^*) \lesssim \|P_M j^* V^*\| \lesssim 1$ (это следует из обобщения теоремы Гротендика; подробности см. в [6]). Следовательно, $P_M j^* i^* g^* s^*$ – также 2-суммирующий оператор и его норма в классе 2-суммирующих операторов ограничена константой, не зависящей от M. В следующем параграфе мы покажем, что это на самом деле не так.

3.2. Заключительные вычисления и противоречие. Как и при доказательстве теоремы 1, обозначим через v_{pq} функцию $z_1^p z_2^q$. Опять же, мы рассматриваем только достаточно большие значения p и предполагаем, что пара чисел (p, q) удовлетворяет следующему условию:

$$\frac{\delta}{2}q^n \leqslant p^m \leqslant \delta q^n.$$

Нетрудно заметить, что

$$\|v_{pq}\|_{W_2^{\frac{m-1}{2},\frac{n-1}{2}}} \asymp p^{\frac{m-1}{2}} q^{\frac{n-1}{2}} \asymp p^m p^{-1/2} q^{-1/2}.$$

В связи с этим, обозначим через w_{pq} функцию $\frac{v_{pq}}{\|v_{pq}\|}$. Эти функции образуют ортонормированную систему в пространстве $W_2^{\frac{m-1}{2},\frac{n-1}{2}}$ и, следовательно, последовательность таких функции слабо 2-суммируемая. Поэтому, ввиду того, что $\pi_2(Pj^*i^*g^*s^*) \lesssim 1$, мы имеем:

$$\sum \|Pj^*i^*g^*s^*w_{pq}\|^2_{W^H_{1/2}} \lesssim 1.$$

Сначала поймём, куда оператор $j^*i^*g^*s^*$ переводит функцию w_{pq}. Рассмотрим любую функцию $v_{\tilde{p}\tilde{q}} = z_1^{\tilde{p}} z_2^{\tilde{q}} \in C_0(\mathbb{T}^2)$; линейные комбинации таких функций плотны в $C_0(\mathbb{T}^2)$. Напишем:

$$\langle v_{\tilde{p}\tilde{q}}, (j^*i^*g^*s^*)w_{pq}\rangle = \langle (sgij)v_{\tilde{p}\tilde{q}}, w_{pq}\rangle = \langle sv_{\tilde{p}\tilde{q}}, w_{pq}\rangle_{W_2^{\frac{m-1}{2},\frac{n-1}{2}}}. \tag{4}$$

Вспомним, как оператор s действует на функцию $v_{\tilde{p}\tilde{q}}$. Для этого нужно решить систему уравнений (3), где по определению все функции μ_j – это константы, умноженные на $z_1^{\tilde{p}} z_2^{\tilde{q}}$. Следовательно, функции, являющиеся решениями этой системы, также кратны $z_1^{\tilde{p}} z_2^{\tilde{q}}$, и потому мы можем заключить, что $\langle sv_{\tilde{p}\tilde{q}}, w_{pq}\rangle_{W_2^{\frac{m-1}{2},\frac{n-1}{2}}} \neq 0$, только если $p = \tilde{p}$ и $q = \tilde{q}$.

Итак, теперь нам нужно вычислить функцию $s(v_{pq})$. Напомним, что при доказательстве теоремы 1 мы выяснили, что s переводит $\frac{v_{pq}}{p^{mN}}$ в $k_{pq}\frac{v_{pq}}{p^m}$, где $|k_{pq}| \asymp 1$. Поэтому мы имеем:

$$s(v_{pq}) = k_{pq} p^{mN} p^{-m} v_{pq}.$$

Таким образом, мы можем написать следующее равенство:

$$\begin{aligned}\langle sv_{pq}, w_{pq}\rangle = k_{pq} p^{mN} p^{-m} \|v_{pq}\|_{W_2^{\frac{m-1}{2},\frac{n-1}{2}}} &\asymp k_{pq} p^{mN} p^{-m} p^m p^{-1/2} q^{-1/2} \\ &= k_{pq} p^{mN} p^{-1/2} q^{-1/2}.\end{aligned}$$

Итак, мы получаем следующую формулу для выражения, стоящего в правой части равенства (4):

$$\langle sv_{\tilde{p}\tilde{q}}, w_{pq}\rangle_{W_2^{\frac{m-1}{2},\frac{n-1}{2}}} = \begin{cases} 0, & (p,q)\neq(\tilde{p},\tilde{q}),\\ k_{pq}p^{mN}p^{-1/2}q^{-1/2}, & (p,q)=(\tilde{p},\tilde{q}). \end{cases}$$

Напомним, что элемент пространства $C(\mathbb{T}^2)\oplus\ldots\oplus C(\mathbb{T}^2)$, соответствующий функции $v_{pq}\in C_0^H(\mathbb{T}^2)$, выглядит так:

$$(\partial_1^{jm}\partial_2^{(N-j)n}v_{pq})_{j=0}^N = ((ip)^{jm}(iq)^{(N-j)n}v_{pq})_{j=0}^N.$$

Поэтому, так как $p^{mN}\asymp q^{nN}$, мы можем взять следующего представителя класса эквивалентности, соответствующего $(j^*i^*g^*s^*)w_{pq}$:

$$(l_{pq}p^{-1/2}q^{-1/2}v_{pq},0,0,\ldots,0),\quad \text{где}\quad |l_{pq}|\asymp 1.$$

Наконец, мы применяем проектор P_M (используя формулу из факта 5; в нашем случае $|\lambda_j| = p^{jm}q^{(N-j)n}\asymp p^{mN}$ и следовательно $\bar{\lambda}_l\lambda_k(\sum|\lambda_j|^2)^{-1}\asymp 1$). Устремляя M к бесконечности, мы получаем:

$$\sum\|l_{pq}p^{-1/2}q^{-1/2}v_{pq}\|_{L^{1/2}}^2\asymp\sum p^{-1}q^{-1},$$

и мы уже выясняли, что такая сумма неограничена. Таким образом, мы пришли к противоречию, и теорема доказана.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю С. В. Кислякову за постановку задач, а также за полезные обсуждения в процессе их решения.

Список литературы

1. O. V. Besov, V. P. Il'in, S. M. Nikol'skii, *Integral Representation of Functions and Imbedding Theorems.* Washington, Halsted Press, 1978.
2. E. B. Fabes and N. M. Rivière, *Singular integrals with mixed homogeneity.* — Stud. Math. **27**, No. 1 (1966), 19–38.
3. Y. Gordon, D. R. Lewis, *Absolutely summing operators and local unconditional structure.* — Acta Math. **133** (1974), 27–48.
4. A. Grothendieck, *Erratum au mémoire: produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* — Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **6** (1955-1956), 117–120.
5. Г. М. Хенкин, *Отсутствие равномерного гомеоморфизма между пространствами гладких функций от одного и от n переменных ($n\geqslant 2$).* — Матем. сб. **74**, No. 4 (1967), 595–606.

6. С. В. Кисляков, *Абсолютно суммирующие операторы на диск-алгебре.* — Алгебра и анализ **3**, No. 4 (1991), 1–77.
7. С. В. Кисляков, *Соболевские операторы вложения и неизоморфность некоторых банаховых пространств*, Функц. анализ и его прил. **9**, No. 4 (1975), 22–27.
8. S. V. Kislyakov, *There is no local unconditional structure in the space of continuously differentiable functions on the torus.* LOMI Preprint R-1-77, Leningrad, 1977.
9. С. В. Кисляков, Д. В. Максимов, *Изоморфный тип пространства гладких функций, порожденного конечным семейством дифференциальных операторов.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **327** (2005), 78–97.
10. С. В. Кисляков, Д. В. Максимов, *Изоморфный тип пространств гладких функций, порождённых конечным семейством неоднородных дифференциальных операторов.* Препринт ПОМИ, 6/2009.
11. S. V. Kislyakov, D. V. Maksimov, and D. M. Stolyarov, *Differential expressions with mixed homogeneity and spaces of smooth functions they generate in arbitrary dimension.* — J. Funct. Anal. **269** (2015), 3220–3263.
12. S. V. Kislyakov, D. V. Maksimov, and D. M. Stolyarov, *Differential expressions with mixed homogeneity and spaces of smooth functions they generate* `https://arxiv.org/abs/1209.2078`
13. S. V. Kislyakov, N. G. Sidorenko, *Absence of a local unconditional structure in anisotropic spaces of smooth functions.* — Sibirsk. Mat. Zh. **29**, No. 3 (1988), 64–77.
14. S. Kwapień, A. Pełczyński, *Absolutely summing operators and translation-invariant spaces of functions on compact abelian groups.* — Math. Nachr. **94** (1980), 303–340.
15. Д. В. Максимов, *Изоморфный тип пространства гладких функций, порожденного конечным набором дифференциальных операторов. II.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **333** (2006), 62–65.
16. A. Pełczyński, K. Senator, *On isomorphisms of anisotropic Sobolev spaces with "classical" Banach spaces and Sobolev-type embedding theorem.* — Studia Math. **84** (1986), 169–215.
17. A. Pietsch, *Operator Ideals.* Elsevier, North-Holland, 1980.
18. Н. Г. Сидоренко, *Неизоморфность некоторых банаховых пространств гладких функций пространству непрерывных функций.* — Функц. анализ и его прил. **21**, No. 4 (1987), 91–93.
19. P. Wojtaszczyk, *Banach spaces for analysts.* Cambridge University Press, 1991.

Tselishchev A. Absence of local unconditional structure in spaces of smooth functions on the two-dimensional torus.

Consider a finite collection $\{T_1, \ldots, T_J\}$ of differential operators with constant coefficients on $\mathbb{T}^2$ and the space of smooth functions generated by this collection, namely, the space of functions f such that $T_j f \in C(\mathbb{T}^2)$. It is proved that under a certain natural condition this space is not isomorphic to a quotient of a $C(S)$-space and does not have a local unconditional

structure. This fact generalizes the previously known result that such spaces are not isomorphic to a complemented subspace of $C(S)$.

ПОМИ РАН, Международный математический
институт им. Леонарда Эйлера,
наб. р. Фонтанки 27,
Ст. Петербург, 191023, Россия
E-mail: celis-anton@yandex.ru

Поступило 4 июля 2020 г.