Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 491, 2020 г.

Д. А. Павлов

КОНСТРУКТИВНОЕ ОПИСАНИЕ ГЁЛЬДЕРОВЫХ КЛАССОВ НА КОМПАКТАХ В $\mathbb{R}^3$

Введение

Во второй половине двадцатого века многие авторы занимались проблемой конструктивного описания класса гёльдеровых функций на кривой в комплексной плоскости, см. [1–4]. Однако в этих работах существенно используется конформное отображение, поэтому для получения аналогичных результатов в трёхмерном пространстве потребовались новые методы.

В работе Т. А. Алексеевой и Н. А. Широкова [5] дано конструктивное описание класса гёльдеровых функций на пространственной кривой, дуга которой соизмерима с хордой. В качестве приближающих функций использованы гармонические функции с равномерными оценками на их градиенты в окрестности кривой. Размер окрестности напрямую связан со скоростью приближения: чем точнее приближение, тем у́же окрестность.

В данной статье мы расширяем конструктивное описание с кривой на произвольное её компактное подмножество. Многие построения и рассуждения основаны на упомянутой работе. Единственным существенным отличием является замена оценки на градиент другим свойством приближающей функции, которое мы назвали «гёльдеровостью». Отказ от градиента мотивирован отсутствием (в большинстве случаев) связности малых окрестностей рассматриваемого множества.

Автор выражает признательность Н. А. Широкову за предложенную тему исследования, ценные советы и замечания.

Ключевые слова: конструктивное описание, классы Гёльдера, гармонические функции, свойство соизмеримости дуги и хорды.

1. Основные определения и вспомогательные утверждения

Через $B_r(M)$ будем обозначать открытый шар с центром в точке M радиуса r, а через $S_r(M)$ – сферу, его ограничивающую. δ-Окрестностью множества A будем называть множество

$$\Omega_\delta(A) = \bigcup_{M\in A} B_\delta(M).$$

Меру Лебега в $\mathbb{R}^3$ будем обозначать символом m_3, а меру Хаусдорфа на сфере и на поверхностях, составленных из частей сфер, будем обозначать символом m_2. Через $|XY|$ будем обозначать евклидово расстояние между точками X и Y. Замыкание множества A будем обозначать через $\overline{A}$. Длину градиента для краткости будем обозначать символом $|\operatorname{grad} f|$ и называть модулем. Часто мы будем писать неравенства вида $f \leqslant Cg \leqslant Ch$. В таких случаях C означает не обязательно одну и ту же константу, но всегда не зависящую от аргументов, понятных из контекста.

Определение 1. *Пусть $L \subset \mathbb{R}^3$ – незамкнутая жорданова кривая. Будем говорить, что L обладает свойством соизмеримости дуги и хорды, если существует такая константа $C_0 = C_0(L)$, что для любых точек M_1, $M_2 \in L$ длина дуги между M_1 и M_2 не превосходит $C_0 \cdot |M_1M_2|$.*

Определение 2. *Пусть ω – модуль непрерывности, удовлетворяющий условиям*

$$\int_0^x \frac{\omega(t)}{t}\,dt \leqslant C'\omega(x), \quad x\int_x^{+\infty} \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt \leqslant C''\omega(x), \tag{1}$$

где C', C'' – константы, зависящие от ω, но не от x. Через $H^\omega(A)$ обозначим класс всех вещественных функций f, заданных на множестве A и таких, что для любых точек M_1, $M_2 \in A$ выполнено неравенство $|f(M_1) - f(M_2)| \leqslant C_f\omega(|M_1M_2|)$.

Заметим, что $\omega(t) = t^\alpha$ при $\alpha \in (0, 1)$ удовлетворяет условиям (1) (достаточно положить $C' = 1/\alpha$, $C'' = 1/(1-\alpha)$), поэтому классы гёльдеровых с показателем $\alpha \in (0, 1)$ функций удовлетворяют определению 2. Для краткости мы будем называть гёльдеровыми функции из любых классов $H^\omega(A)$.

В дальнейшем мы будем работать с функциями, заданными как интегралы от непрерывных или гладких функций по шарам или сферам (как с постоянным, так и с переменным радиусом). Для вычисления производных этих функций нам будут полезны леммы 1–3.

Лемма 1. *Пусть $B_r(M)$ содержится вместе со своей окрестностью в некотором компакте $K \subset \mathbb{R}^3$, $f \in C^1(K)$, $\vec{v}$ – единичный вектор. Рассмотрим функцию*

$$g(M) = \int\limits_{B_r(M)} f(M_1)\, dm_3(M_1).$$

Если g определена в некоторой окрестности точки M, то g дифференцируема по направлению $\vec{v}$ и

$$g'_{\vec{v}}(M) = \int\limits_{B_r(M)} f'_{\vec{v}}(M_1)\, dm_3(M_1).$$

Доказательство этой леммы следует из определения функции g и гладкости функции f.

Лемма 2. *Пусть $B_{r(M)}(M)$ содержится вместе со своей окрестностью в некотором компакте $K \subset \mathbb{R}^3$, где $r \in C^1(K)$, $f \in C(K)$, $\vec{v}$ – единичный вектор. Рассмотрим функцию*

$$g(M) = \int\limits_{B_{r(M)}(M)} f(M_1)\, dm_3(M_1).$$

Если функция g определена в некоторой окрестности точки M, то g дифференцируема по направлению $\vec{v}$ и

$$g'_{\vec{v}}(M) = \int\limits_{S_{r(M)}(M)} ((\vec{n}(M_1), \vec{v}) + r'_{\vec{v}}(M)) f(M_1)\, dm_2(M_1),$$

где $\vec{n}(M_1)$ – внешняя единичная нормаль к сфере в точке M_1, $(\cdot\,,\cdot)$ – скалярное произведение.

Доказательство. Запишем разностное отношение

$$\begin{aligned}
&\frac{g(M+h\vec{v})-g(M)}{h}\\
&=\frac{1}{h}\int\limits_{B_{r(M+h\vec{v})}(M+h\vec{v})} f(M_1)\,dm_3(M_1)-\frac{1}{h}\int\limits_{B_{r(M)}(M)} f(M_1)\,dm_3(M_1)\\
&=\left(\frac{1}{h}\int\limits_{B_{r(M+h\vec{v})}(M+h\vec{v})} f(M_1)dm_3(M_1)-\frac{1}{h}\int\limits_{B_{r(M)}(M+h\vec{v})} f(M_1)\,dm_3(M_1)\right)\\
&+\left(\frac{1}{h}\int\limits_{B_{r(M)}(M+h\vec{v})} f(M_1)\,dm_3(M_1)-\frac{1}{h}\int\limits_{B_{r(M)}(M)} f(M_1)\,dm_3(M_1)\right)\\
&=A(h)+D(h).
\end{aligned}$$

Разность интегралов в $A(h)$ представляет собой интеграл по сферическому слою толщины $|r(M+h\vec{v})-r(M)|$. Расписывая интегральные суммы, как это обычно делается при сведении кратного интеграла к повторному, мы получим, что

$$A(h)=\frac{1}{h}\int\limits_{S_{r(M)}(M+h\vec{v})}\int\limits_{M_1}^{M_2} f(T)\,dT\,dm_2(M_1),$$

где $l(M_1)=M_1M_2$ – отрезок нормали к сфере $S_{r(M)}(M+h\vec{v})$ в точке M_1, содержащийся в слое. Применяя теорему о среднем, получим

$$A(h)=\int\limits_{S_{r(M)}(M+h\vec{v})}\frac{r(M+h\vec{v})-r(M)}{h}f(T_{M_1})\,dm_2(M_1),$$

где $T_{M_1}\in l(M_1)$. Переходя к пределу, получим

$$A(h)\to\int\limits_{S_{r(M)}(M)} r'_{\vec{v}}(M)f(M_1)\,dm_2(M_1).$$

Вводя точно так же отрезок $l(M_1)$ для сферы $S_{r(M)}(M)$ и множества $B_{r(M)}(M+h\vec{v}) \triangle B_{r(M)}(M)$, напишем

$$D(h) = \frac{1}{h} \int\limits_{S_{r(M)}(M)} \int\limits_{M_1}^{M_2} f(T)\, d(T)\, dm_2(M_1).$$

Пусть l – ориентированная длина этого отрезка (знак выбирается в зависимости от того, лежит M_2 на внешней или внутренней нормали). Тогда в треугольнике с вершинами M, M_2, $M+h\vec{v}$ выполнено соотношение

$$r^2(M) = ((r(M)+l)\vec{n}(M_1) - h\vec{v})^2.$$

Отсюда мы получим квадратное уравнение на l, дискриминант которого положителен и отделён от нуля при достаточно малых h. Тогда при малых h

$$l = h(\vec{n}(M_1),\, \vec{v}) - r(M) + \sqrt{r^2(M) + h^2(\vec{n}(M_1),\, \vec{v})^2 - h^2},$$

поскольку для другого корня имеем $|l| > |r(M)|$, а это невозможно, ведь $|l| \leqslant |h|$. Значит, $l/h \to (\vec{n}(M_1),\, \vec{v})$, тогда по теореме о среднем

$$D(h) \to \int\limits_{S_{r(M)}(M)} (\vec{n}(M_1),\, \vec{v}) f(M_1)\, dm_2(M_1).$$

Складывая найденные соотношения для $A(h)$ и $D(h)$, получим требуемую формулу. □

Лемма 3. *Пусть $S_{r(M)}(M)$ содержится вместе со своей окрестностью в некотором компакте $K \subset \mathbb{R}^3$, где $r \in C^1(K)$, $f \in C^1(K)$, $\vec{v}$ – единичный вектор. Рассмотрим функцию*

$$g(M) = \int\limits_{S_{r(M)}(M)} f(M_1)\, dm_2(M_1).$$

Если функция g определена в некоторой окрестности точки M, то g дифференцируема по направлению $\vec{v}$ и

$$g'_{\vec{v}}(M) = \int\limits_{S_{r(M)}(M)} r'_{\vec{v}}(M) f'_{\vec{n}(M_1)}(M_1)\, dm_2(M_1) + 2 \int\limits_{S_{r(M)}(M)} \frac{r'_{\vec{v}}(M)}{r(M)} f(M_1)\, dm_2(M_1) + \int\limits_{S_{r(M)}(M)} f'_{\vec{v}}(M_1)\, dm_2(M_1).$$

Доказательство. Запишем и преобразуем разностное соотношение

$$\begin{aligned}
&\frac{g(M+h\vec{v}) - g(M)}{h} \\
&= \frac{1}{h} \int\limits_{S_{r(M+h\vec{v})}(M+h\vec{v})} f(M_1)\, dm_2(M_1) - \frac{1}{h} \int\limits_{S_{r(M)}(M)} f(M_1)\, dm_2(M_1) \\
&= \frac{1}{h} \int\limits_{S_{r(M+h\vec{v})}(M+h\vec{v})} f(M_1)\, dm_2(M_1) - \frac{1}{h} \int\limits_{S_{r(M)}(M+h\vec{v})} f(M_1)\, dm_2(M_1) \\
&\quad + \left(\frac{1}{h} \int\limits_{S_{r(M)}(M+h\vec{v})} f(M_1)\, dm_2(M_1) - \frac{1}{h} \int\limits_{S_{r(M)}(M)} f(M_1)\, dm_2(M_1) \right) \\
&= \frac{1}{h} \int\limits_{S_{r(M)}(M)} \frac{r^2(M+h\vec{v})}{r^2(M)} f(H(M_1))\, dm_2(M_1) \\
&\quad - \frac{1}{h} \int\limits_{S_{r(M)}(M)} f(M_1 + h\vec{v})\, dm_2(M_1) + E(h),
\end{aligned}$$

где

$$H(M_1) = M_1 + h\vec{v} + \frac{r(M+h\vec{v}) - r(M)}{r(M)} \overrightarrow{MM_1}.$$

Мы сделали замену переменной, $H(M_1)$ – образ точки M_1 при соответствующей гомотетии и параллельном переносе.

Ясно, что

$$E(h) \to \int\limits_{S_{r(M)}(M)} f'_{\vec{v}}(M_1)\, dm_2(M_1).$$

Далее, обозначим

$$\frac{1}{h}\int\limits_{S_{r(M)}(M)}\frac{r^2(M+h\vec{v})}{r^2(M)}f(H(M_1))dm_2(M_1)-\frac{1}{h}\int\limits_{S_{r(M)}(M)}f(M_1+h\vec{v})dm_2(M_1)$$
$$=\frac{1}{h}\int\limits_{S_{r(M)}(M)}\frac{r^2(M+h\vec{v})}{r^2(M)}(f(H(M_1))-f(M_1+h\vec{v}))\,dm_2(M_1)$$
$$+\frac{1}{h}\int\limits_{S_{r(M)}(M)}\left(\frac{r^2(M+h\vec{v})}{r^2(M)}-1\right)f(M_1+h\vec{v})\,dm_2(M_1)=A(h)+D(h).$$

Обозначим ещё

$$\vec{n}(h,M_1)=\frac{r(M+h\vec{v})-r(M)}{r(M)}\,\overrightarrow{MM_1}.$$

Поскольку $|MM_1|=r(M)$, справедливо равенство

$$|\vec{n}(h,M_1)|=|r(M+h\vec{v})-r(M)|.$$

Тогда, пользуясь непрерывной дифференцируемостью f, можем написать

$$\frac{f(H(M_1))-f(M_1+h\vec{v})}{h}=f'_{\vec{n}(h,M_1)}(M_1+h\vec{v})\frac{r(M+h\vec{v})-r(M)}{h}$$
$$+\frac{o(|r(M+h\vec{v})-r(M)|)}{h}\to f'_{\vec{n}(M_1)}(M_1)r'_{\vec{v}}(M).$$

Значит,

$$A(h)\to\int\limits_{S_{r(M)}(M)}r'_{\vec{v}}(M)f'_{\vec{n}(M_1)}(M_1)\,dm_2(M_1).$$

Наконец,

$$\frac{r^2(M+h\vec{v})-r^2(M)}{h}\cdot\frac{1}{r^2(M)}\to(r^2(M))'_{\vec{v}}\,\frac{1}{r^2(M)}=2\,\frac{r'_{\vec{v}}(M)}{r(M)},$$

откуда

$$D(h)\to 2\int\limits_{S_{r(M)}(M)}\frac{r'_{\vec{v}}(M)}{r(M)}f(M_1)\,dm_2(M_1).$$

Складывая полученные соотношения для $A(h)$, $D(h)$ и $E(h)$, получим требуемую формулу. □

2. Псевдогармоническое расширение

Рассмотрим конструкцию так называемого псевдогармонического расширения, которая вполне аналогична конструкции псевдоаналитического расширения, введённой Е. М. Дынькиным в [6].

Теорема 1. *Пусть L – кривая, обладающая свойством соизмеримости дуги и хорды, $K \subset L$ – компакт, $f \in H^\omega(K)$. Тогда существует псевдогармоническое расширение функции f, то есть такая функция f_0, что $f_0 \in C(\mathbb{R}^3)$, $f_0 \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus K)$, $f_0|_K = f$,*

$$|\operatorname{grad} f_0(M)| \leqslant C_1 \frac{\omega(d(M))}{d(M)}, \tag{2}$$

$$f_0(M) = 0 \text{ для } |OM| \geqslant R_0,\ K \subset B_{R_0}(O), \tag{3}$$

$$|\Delta f_0(M)| \leqslant C_2 \frac{\omega(d(M))}{d^2(M)}, \tag{4}$$

где C_1, C_2 – константы, зависящие только от f, $d(M)$ – расстояние от точки M до множества K.

Доказательство. Начнём с геометрических построений, которые будут использоваться на протяжении всей работы. Пусть n – натуральное число. Возьмём произвольную точку $M_{0n} \in K$. Далее точки M_{kn} выбираются индуктивно: если $M_{0n}, \ldots, M_{(k-1)n}$ уже выбраны, то M_{kn} – ближайшая к множеству $\bigcup\limits_{i=0}^{k-1} \overline{B}_{2^{-n}}(M_{in})$ точка множества

$$K \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} B_{2^{-n}}(M_{in}),$$

если последнее множество непусто. Так как $M_{kn} \in L$, кривая L спрямляема и $|M_{kn}M_{k'n}| \geqslant 2^{-n}$ при $k \neq k'$, то мы выберем $m_n \leqslant \widetilde{C} \cdot 2^n$ точек, где $\widetilde{C}$ не зависит от n. Процесс выбора точек M_{kn} окончен, так что $K \subset \bigcup\limits_{k=0}^{m_n} B_{2^{-n}}(M_{kn})$.

Положим $\Omega_n^* = \bigcup\limits_{k=0}^{m_n} \overline{B}_{2^{-n+1}}(M_{kn})$, $\Omega_n = \Omega_n^* \setminus \Omega_{n+1}^*$. Из определения ясно, что $d(M) \leqslant 2^{-n+1}$ для $M \in \Omega_n^*$. Покажем, что если $d(M) \leqslant 2^{-n-1}$, то $M \in \Omega_{n+1}^*$. Действительно, $|MN| \leqslant 2^{-n-1}$ для некоторой точки $N \in K$, $|NM_{k_0(n+1)}| \leqslant 2^{-n-1}$ для некоторого k_0, откуда

$|MM_{k_0(n+1)}| \leqslant 2^{-n-1}+2^{-n-1} = 2^{-n}$, то есть $M \in \overline{B}_{2^{-(n+1)+1}}(M_{k_0(n+1)})$. Таким образом,

$$2^{-n-1} < d(M) \leqslant 2^{-n+1}, \quad M \in \Omega_n. \tag{5}$$

Из этой оценки следует, что множества Ω_n с номерами, отличающимися хотя бы на 2, не пересекаются. Но множества Ω_n и Ω_{n+1} не пересекаются, потому что $\Omega_{n+1} \subset \Omega^*_{n+1}$. Получается, что множества Ω_n попарно не пересекаются. Также ясно, что объединение всех множеств Ω_n совпадает с объединением всех Ω^*_n. Определим теперь множества ω_{kn}: $\omega_{0n} = \overline{B}_{2^{-n+1}}(M_{0n}) \cap \Omega_n$,

$$\omega_{kn} = \left(\overline{B}_{2^{-n+1}}(M_{kn}) \cap \Omega_n\right) \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} \overline{B}_{2^{-n+1}}(M_{kn}) \text{ при } k = 1, \ldots, m_n.$$

Ясно, что множества ω_{kn} попарно (по всем k и n) не пересекаются.

Положим $g(M) = f(M_{kn})$ при $M \in \omega_{kn}$ и $g(M) = 0$ для M, не принадлежащих ни одному ω_{kn}. Обозначим $B_*(M) = B_{\frac{1}{8}d(M)}(M)$. Оценим величину $|M_{kn}M_{k'n'}|$ в случае, когда $M \in \omega_{kn}$, $M_1 \in B_*(M) \cap \omega_{k'n'}$. Применяя неравенства (5), получим

$$2^{-n'-1} \leqslant d(M_1) \leqslant d(M) + |MM_1| \leqslant 2^{-n+1} + \frac{1}{8}d(M) \leqslant 2^{-n+2},$$

то есть $-n' \leqslant -n+3$. Пусть N, $N_1 \in K$ таковы, что $|MN| = d(M)$, $|M_1N_1|=d(M_1)$. Снова применяя оценку (5) и оценку числа n' через n, получим неравенства

$$|NM_{kn}| \leqslant |NM| + |MM_{kn}| \leqslant 2^{-n+1} + 2^{-n+1} = 2^{-n+2},$$
$$|N_1M_{k'n'}| \leqslant 2^{-n'+2} \leqslant 2^{-n+5}$$

и

$$|NN_1| \leqslant |NM|+|MM_1|+|M_1N_1| \leqslant 2^{-n+1}+\frac{1}{8}2^{-n+1}+2^{-n'+1} \leqslant 19\cdot 2^{-n}.$$

Из этих неравенств получим, что

$$|M_{kn}M_{k'n'}| \leqslant |M_{kn}N| + |NN_1| + |N_1M_{k'n'}| \leqslant 55 \cdot 2^{-n}.$$

Теперь воспользуемся гёльдеровостью функции f и свойствами модуля непрерывности:

$$|f(M_{kn}) - f(M_{k'n'})| \leqslant C_f\omega(55 \cdot 2^{-n}) \leqslant C\omega(2^{-n}).$$

Отсюда, учитывая соотношения (5), получаем

$$|g(M) - g(M_1)| \leqslant C\omega(d(M)), \quad M_1 \in B_*(M). \tag{6}$$

Определим новую функцию

$$g_1(M) = \frac{1}{m_3 B_*(M)} \int\limits_{B_*(M)} g(M_1)\, dm_3(M_1).$$

Легко проверить, что $g_1 \in C(\mathbb{R}^3 \setminus K)$. Кроме того, используя оценку (6), получим для $M \in \omega_{kn}$:

$$\begin{aligned} &|g_1(M) - f(M_{kn})| = |g_1(M) - g(M)| \\ &= \left| \frac{1}{m_3 B_*(M)} \int\limits_{B_*(M)} g(M_1)\, dm_3(M_1) - \frac{1}{m_3 B_*(M)} \int\limits_{B_*(M)} g(M)\, dm_3(M_1) \right| \\ &\leqslant \frac{1}{m_3 B_*(M)} \int\limits_{B_*(M)} |g(M_1) - g(M)|\, dm_3(M_1) \leqslant C\omega(d(M)). \end{aligned} \tag{7}$$

Отсюда следует, что если $M \to M_* \in K$, то $g_1(M) \to f(M_*)$, так что g_1 можно продолжить на K по непрерывности. Таким образом, функция g_1 непрерывна, совпадает с f на K и обнуляется вне некоторого шара (ибо такова функция g).

Теперь мы построим функцию $d_0 \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus K)$, $d_0 \asymp d$. Определим для каждого $n \in \mathbb{Z}$ множество $\Sigma_n = \{M \in \mathbb{R}^3 \setminus K \mid 2^{n-1} < d(M) \leqslant 2^n\}$. Для $M \in \Sigma_n$ положим $d_1(M) = 2^{n-1}$. Далее, определим функцию

$$d_2(M) = \frac{1}{m_3 B_{2^{n-4}}(M)} \int\limits_{B_{2^{n-4}}(M)} d_1(M_1)\, dm_3(M_1)$$
$$\text{при} \quad 2^{n-0,5} < d(M) \leqslant 2^{n+0,5}.$$

Заметим, что «граница смены» радиуса шара, по которому берётся интеграл, то есть множество $S_n = \{M \in \mathbb{R}^3 \setminus K \mid d(M) = 2^{n-0,5}\}$ вместе со своей окрестностью радиуса 2^{n-3} лежит во внутренности множества Σ_n, поскольку

$$2^{n-0,5} + 2^{n-3} = 2^{n-3}(2^{2,5} + 1) < 7 \cdot 2^{n-3} < 2^n, \; 2^{n-0,5} - 2^{n-3} > 2^{n-1}.$$

Поэтому $d_1 = \mathrm{const}$ в $\Omega_{2^{n-3}}(S_n)$, откуда $d_2 = \mathrm{const}$ в $\Omega_{2^{n-4}}(S_n)$, а значит в окрестности S_n выполнено $|\mathrm{grad}\, d_2| = 0$. Осталось рассмотреть те M, которые отделены от S_n. Пусть $d(M) < 2^{n+0,5}$, $\vec{v}$ – произвольный единичный вектор. Тогда по лемме 2 получаем

$$d'_{2\vec{v}}(M) = \frac{1}{m_3 B_{2^{n-4}}(M)} \int\limits_{S_{2^{n-4}}(M)} (\vec{n}(M_1),\, \vec{v})\, d_2(M_1)\, dm_2(M_1).$$

Тогда, так как $d_2(M_1) \leqslant 2^n$ для n, рассмотренных выше, то

$$|d'_{2\vec{v}}(M)| \leqslant \frac{C}{2^{3n-12}} \cdot 2^{2n-8} \cdot 2^n \leqslant C,$$

значит, $|\mathrm{grad}\, d_2(M)| \leqslant C$. Положим, наконец,

$$d_0(M) = \frac{1}{m_3 B_{2^{n-4}}(M)} \int\limits_{B_{2^{n-4}}(M)} d_2(M_1)\, dm_3(M_1)$$
$$\text{при } 2^{n-0,5} < d(M) \leqslant 2^{n+0,5}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\frac{1}{2} d(M) \leqslant d_0(M) \leqslant d(M). \tag{8}$$

Покажем, что выполняются также оценки

$$|\mathrm{grad}\, d_0(M)| \leqslant C, \quad |d''_{0\vec{u}\vec{v}}(M)| \leqslant \frac{C}{d(M)}. \tag{9}$$

Как и выше, нам интересны точки M, отделённые от S_n. Пусть $\vec{u}$, $\vec{v}$ – единичные векторы. По лемме 1

$$d'_{0\vec{u}}(M) = \frac{1}{m_3 B_{2^{n-4}}(M)} \int\limits_{B_{2^{n-4}}(M)} d'_{2\vec{u}}(M_1)\, dm_3(M_1),$$

откуда сразу следует первая оценка. Далее, по лемме 2

$$d'_{0\vec{u}\vec{v}}(M) = \frac{1}{m_3 B_{2^{n-4}}(M)} \int\limits_{S_{2^{n-4}}(M)} (\vec{n}(M_1),\, \vec{v})\, d'_{2\vec{u}}(M_1)\, dm_2(M_1).$$

Поскольку $d(M) \asymp 2^n$, отсюда следует вторая оценка.

Положим $r^*(M) = \dfrac{1}{8}d_0(M)$, $B^*(M) = B_{r^*(M)}(M)$. Определим функции

$$g_2(M) = \frac{1}{m_3 B^*(M)} \int\limits_{B^*(M)} g_1(M_1)\,dm_3(M_1),$$
$$f_0(M) = \frac{1}{m_3 B^*(M)} \int\limits_{B^*(M)} g_2(M_1)\,dm_3(M_1).$$

Применяя оценки (6)–(8), получим, что для $M_1 \in B^*(M)$ выполнены соотношения

$$|g_1(M)-g_1(M_1)| \leqslant |g_1(M)-g(M)| + |g(M)-g(M_1)| + |g(M_1)-g_1(M_1)| \leqslant C\omega(d(M)),$$

поскольку $d(M_1) \asymp d(M)$. Значит, как в (7), получим

$$|g_2(M)-g_1(M)| \leqslant C\omega(d(M)),$$

откуда

$$|g_2(M)-g(M)| \leqslant |g_2(M)-g_1(M)| + |g_1(M)-g(M)| \leqslant C\omega(d(M)). \quad (10)$$

Аналогично можно установить, что

$$|f_0(M)-g_1(M)| \leqslant C\omega(d(M)). \quad (11)$$

Пусть $\vec{u}$ – единичный вектор. Тогда по лемме 2

$$\begin{aligned} g'_{2\vec{u}}(M) &= (g_2(N)-g(M))'_{\vec{u}}|_{N=M} \\ &= \left(\frac{1}{m_3 B^*(M)} \int\limits_{B^*(M)} (g_1(M_1)-g(M))\,dm_3(M_1)\right)'_{\vec{u}} \\ &= \frac{-(m_3 B^*(M))'_{\vec{u}}}{(m_3 B^*(M))^2} \int\limits_{B^*(M)} (g_1(M_1)-g(M))\,dm_3(M_1) \\ &+ \frac{1}{m_3 B^*(M)} \int\limits_{S^*(M)} ((\vec{n}(M_1),\,\vec{u}) + (r^*(M))'_{\vec{u}})\,(g_1(M_1)-g(M))\,dm_2(M_1). \end{aligned}$$

Из (6), (7) и (8) следует, что $|g_1(M_1) - g(M)| \leqslant C\omega(d(M))$ для $M_1 \in B^*(M)$. Применяя это и (9) к полученной формуле, получим оценку

$$|g'_{2\vec{u}}(M)| \leqslant \frac{C\omega(d(M))}{d(M)},$$

а значит и

$$|\operatorname{grad} g_2(M)| \leqslant \frac{C\omega(d(M))}{d(M)}. \tag{12}$$

Аналогично, используя (10) вместо (7), получим оценку

$$|\operatorname{grad} f_0(M)| \leqslant \frac{C\omega(d(M))}{d(M)}.$$

Пусть $\vec{v}$ – ещё один произвольный единичный вектор. По лемме 2

$$\begin{aligned}
&f''_{0\vec{u}\vec{v}}(M) = (f_0(N) - g(M))''_{\vec{u}\vec{v}}|_{N=M}\\
&= \left(\frac{1}{m_3B^*(M)}\right)''_{\vec{u}\vec{v}} \int\limits_{B^*(M)} (g_2(M_1) - g(M))\, dm_3(M_1)\\
&- \frac{(m_3B^*(M))'_{\vec{u}}}{(m_3B^*(M))^2} \int\limits_{S^*(M)} ((\vec{n}(M_1),\, \vec{v}) + (r^*(M))'_{\vec{v}})\, (g_2(M_1) - g(M))\, dm_2(M_1)\\
&- \frac{(m_3B^*(M))'_{\vec{v}}}{(m_3B^*(M))^2} \int\limits_{S^*(M)} ((\vec{n}(M_1),\, \vec{u}) + (r^*(M))'_{\vec{u}})\, (g_2(M_1) - g(M))\, dm_2(M_1)\\
&+ \frac{1}{m_3B^*(M)} \left(\int\limits_{S^*(M)} ((\vec{n}(M_1), \vec{u}) + (r^*(M))'_{\vec{u}})(g_2(M_1) - g(M))dm_2(M_1)\right)'_{\vec{v}}.
\end{aligned} \tag{13}$$

А по лемме 3

$$\begin{aligned}
&\left(\int\limits_{S^*(M)} ((\vec{n}(M_1),\, \vec{u}) + (r^*(M))'_{\vec{u}})\, (g_2(M_1) - g(M))\, dm_2(M_1)\right)'_{\vec{v}}\\
&= \int\limits_{S^*(M)} (r^*(M))''_{\vec{u}\vec{v}}\, (g_2(M_1) - g(M))\, dm_2(M_1)\\
&+ 2 \int\limits_{S^*(M)} \frac{(r^*(M))'_{\vec{u}}(r^*(M))'_{\vec{v}}}{r^*(M)}\, (g_2(M_1) - g(M))\, dm_2(M_1)\\
&+ \int\limits_{S^*(M)} (r^*(M))'_{\vec{u}}\, (g_2(M_1))'_{\vec{v}}\, dm_2(M_1)
\end{aligned}$$

$$+ 2 \int\limits_{S^*(M)} \frac{(\vec{n}(M_1),\, \vec{u})(r^*(M))'_{\vec{v}}}{r^*(M)} \,(g_2(M_1) - g(M))\, dm_2(M_1)$$
$$+ \int\limits_{S^*(M)} ((\vec{n}(M_1),\, \vec{u}) + (r^*(M))'_{\vec{u}})\,(r^*(M))'_{\vec{v}}\,(g_2(M_1))'_{\vec{n}(M_1)}\, dm_2(M_1). \qquad (14)$$

Подставляя (14) в (13) и применяя оценки (9) и (10), получим

$$|f''_{0\vec{u}\vec{v}}(M)| \leqslant \frac{C\omega(d(M))}{d^2(M)},$$

а значит и

$$|\Delta f_0(M)| \leqslant \frac{C\omega(d(M))}{d^2(M)}.$$

Оценки (2) и (4) мы получили. Условие (3) выполняется, потому что функции g, g_1 и g_2 обнуляются вне некоторого шара. Непрерывность функции f_0 на всём $\mathbb{R}^3$ и её совпадение с f на K получается из (11) и того, что g_1 обладает этими свойствами. $\square$

3. Гёльдеровость функции, имеющей псевдогармоническое расширение

Теорема 2. *Пусть L – кривая, обладающая свойством соизмеримости дуги и хорды, $K \subset L$ – компакт, $f\colon K \to \mathbb{R}$ – функция. Если f имеет псевдогармоническое расширение в смысле теоремы* 1, *то $f \in H^\omega(K)$.*

Доказательство. Пусть Ω_n^* означает то же, что и в доказательстве теоремы 1. Граница множества Ω_n^* состоит из m_n подмножеств сфер радиуса 2^{-n+1}. Общая площадь этих сфер равна

$$4\pi m_n 2^{-2n+2} \leqslant 4\pi\widetilde{C} \cdot 2^n \cdot 2^{-2n+2} \leqslant C \cdot 2^{-n}.$$

Зафиксируем точку $M_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus K$ и подберём такое n, что $M_0 \notin \Omega_{n+k}^*$ при всех $k \geqslant 0$. Пусть f_0 – псевдогармоническое расширение функции f, а R_0 выбрано так, что $f_0 = 0$ вне $B_{R_0}(O)$, $K \subset B_{R_0}(O)$ и $M_0 \in B_{R_0}(O)$. Обозначим через T_n компоненту связности множества $B_{R_0}(O) \setminus \Omega_n^*$, содержащую точку M_0. Применим известную формулу (см. [7, с. 598])

$$f_0(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial T_n} (f_0(M))'_{\vec{n}(M)} \frac{1}{\rho_{M_0}(M)}\, dm_2(M)$$
$$- \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial T_n} f_0(M) \left(\frac{1}{\rho_{M_0}(M)}\right)'_{\vec{n}(M)} dm_2(M) - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{T_n} \frac{\Delta f_0(M)}{\rho_{M_0}(M)}\, dm_3(M), \tag{15}$$

где $\rho_{M_0}(M) = |MM_0|$, $\vec{n}(M)$ – единичная внешняя нормаль к поверхности ∂T_n в точке M.

Поскольку f_0 и $f'_{0\vec{n}(M)}$ равны нулю на $\partial B_{R_0}(O)$, первые два интеграла в (15) берутся по поверхности, содержащейся в $\partial\Omega_n^*$, а значит её площадь не превосходит $C \cdot 2^{-n}$. Точка M_0 не принадлежит замкнутому множеству Ω_n^*, так что величина $\rho_{M_0}(M)$ отделена от нуля, причём для рассматриваемых n одним и тем же числом. Напомним также, что для $M \in \partial\Omega_n^*$ имеется оценка $d(M) \asymp 2^{-n}$. Учитывая эти соображения и используя условие (2), получим

$$\left| \int\limits_{\partial T_n} (f_0(M))'_{\vec{n}(M)} \frac{1}{\rho_{M_0}(M)}\, dm_2(M) \right| \leqslant C \cdot 2^{-n} \cdot \sup_{M \in \partial\Omega_n^*} \frac{\omega(d(M))}{d(M)} \leqslant C\omega(2^{-n}),$$

что стремится к нулю с ростом n. Далее, оценив модуль производной по направлению модулем градиента и использовав ограниченность функции f_0 (она непрерывна и равна 0 вне некоторого шара), получим

$$\left| \int\limits_{\partial T_n} f_0(M) \left(\frac{1}{\rho_{M_0}(M)}\right)'_{\vec{n}(M)} dm_2(M) \right| \leqslant \int\limits_{\partial T_n} |f_0(M)| \frac{1}{\rho^2_{M_0}(M)} dm_2(M)$$
$$\leqslant C \cdot 2^{-n},$$

что также стремится к нулю с ростом n. Таким образом, переходя к пределу по n в (15), получаем

$$f_0(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{B_{R_0}(O)} \frac{\Delta f_0(M)}{\rho_{M_0}(M)}\, dm_3(M). \tag{16}$$

В конце доказательства теоремы мы покажем непрерывность интеграла из правой части в (16). Сейчас будем считать это известным.

Тогда непрерывность обеих частей формулы (16) позволяет брать точки из K. Возьмём M_1, $M_2 \in K$, $M_1 \neq M_2$ и напишем

$$\begin{aligned}
&f(M_1) - f(M_2)\\
&= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{B_{R_0}(O)} \frac{\Delta f_0(M)}{\rho_{M_2}(M)}\, dm_3(M) - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{B_{R_0}(O)} \frac{\Delta f_0(M)}{\rho_{M_1}(M)}\, dm_3(M)\\
&= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{B_{2|M_1M_2|}(M_1)} \frac{\Delta f_0(M)}{\rho_{M_2}(M)}\, dm_3(M) - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{B_{2|M_1M_2|}(M_1)} \frac{\Delta f_0(M)}{\rho_{M_1}(M)}\, dm_3(M)\\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{B_{R_0}(O)\setminus B_{2|M_1M_2|}(M_1)} \left(\frac{1}{\rho_{M_2}(M)} - \frac{1}{\rho_{M_1}(M)}\right) \Delta f_0(M)\, dm_3(M)\\
&= I_1 - I_2 + I_3.
\end{aligned} \tag{17}$$

Обозначим $A' = A \cap B_{R_0}(O)$. Применяя (3) и (4), получим

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leqslant \int\limits_{B_{3|M_1M_2|}(M_2)} \frac{|\Delta f_0(M)|}{\rho_{M_2}(M)}\, dm_3(M)\\
&\leqslant C \int\limits_{B'_{3|M_1M_2|}(M_2)} \frac{\omega(d(M))}{d^2(M)\rho_{M_2}(M)}\, dm_3(M)\\
&\leqslant C \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{B'_{3\cdot 2^{-n}|M_1M_2|}(M_2)\setminus B'_{3\cdot 2^{-n-1}|M_1M_2|}(M_2)} \frac{\omega(d(M))}{d^2(M)\rho_{M_2}(M)}\, dm_3(M)\\
&\leqslant C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{|M_1M_2|} \int\limits_{B'_{3\cdot 2^{-n}|M_1M_2|}(M_2)} \frac{\omega(d(M))}{d^2(M)}\, dm_3(M).
\end{aligned} \tag{18}$$

Введём в рассмотрение ещё одно множество $\Omega_0 = B_{R_0}(O) \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Omega_k$. Обозначим $\sigma_{kn} = B'_{3\cdot 2^{-n}|M_1M_2|}(M_2) \cap \Omega_k$. Тогда последний интеграл из

(18) перепишется так:

$$\int\limits_{B'_{3\cdot 2^{-n}|M_1M_2|}(M_2)} \frac{\omega(d(M))}{d^2(M)}\,dm_3(M)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\sigma_{kn}} \frac{\omega(d(M))}{d^2(M)}\,dm_3(M) = \sum_{k=k(n)}^{\infty} \int\limits_{\sigma_{kn}} \frac{\omega(d(M))}{d^2(M)}\,dm_3(M), \qquad (19)$$

где $k(n)$ обозначает наименьшее k, для которого $\sigma_{kn} \neq \varnothing$. Неравенство (5) и определение множества Ω_0 дают оценку

$$d(M) \asymp 2^{-k}, \quad M \in \sigma_{kn}, \qquad (20)$$

а из определения величины $k(n)$ и неравенства (5) следует, что

$$2^{-k(n)} \asymp 2^{-n} \cdot |M_1M_2|. \qquad (21)$$

Вспомним, что K – подмножество кривой L, дуга которой соизмерима с хордой. Пусть X – первая точка пересечения кривой L с $\overline{B}_{3\cdot 2^{-n}|M_1M_2|}(M_2)$, а Y – последняя. Тогда длина дуги XY не превосходит $C_0 \cdot 6 \cdot 2^{-n}|M_1M_2|$, а значит на этой дуге не больше, чем $C \cdot 2^{-n}|M_1M_2| \cdot 2^k$ точек M_{ik}. Поскольку множество Ω_k состоит из подмножеств шаров с центрами M_{ik} радиуса 2^{-k+1}, отсюда следует, что

$$m_3\sigma_{kn} \leqslant C \cdot 2^{-n}|M_1M_2| \cdot 2^k \cdot 2^{-3k+3} = C \cdot 2^{-n-2k}|M_1M_2|. \qquad (22)$$

Применяя оценки (20) и (22), получим

$$\sum_{k=k(n)}^{\infty} \int\limits_{\sigma_{kn}} \frac{\omega(d(M))}{d^2(M)}\,dm_3(M) \leqslant C \sum_{k=k(n)}^{\infty} 2^{2k} \cdot \omega(2^{-k}) m_3\sigma_{kn}$$
$$\leqslant C \sum_{k=k(n)}^{\infty} 2^{2k} \cdot \omega(2^{-k}) \cdot 2^{-n-2k}|M_1M_2|$$
$$= C \cdot 2^{-n}|M_1M_2| \sum_{k=k(n)}^{\infty} \omega(2^{-k}). \qquad (23)$$

Воспользуемся первым из условий (1) и монотонностью функции ω:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\omega(2^{-k}x)=2\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{2^{-k}x}^{2^{-k+1}x}\frac{\omega(2^{-k}x)}{2^{-k+1}x}\,dt$$

$$\leqslant 2\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{2^{-k}x}^{2^{-k+1}x}\frac{\omega(t)}{t}\,dt=2\int\limits_{0}^{2x}\frac{\omega(t)}{t}\,dt\leqslant C\omega(2x)\leqslant C\omega(x). \tag{24}$$

Поэтому, учитывая формулу (21), имеем

$$\sum_{k=k(n)}^{\infty}\omega(2^{-k})\leqslant C\omega(2^{-k(n)})\leqslant C\omega(2^{-n}|M_1M_2|). \tag{25}$$

Формулы (19), (23) и (25) дают нам оценку

$$\int\limits_{B'_{3\cdot 2^{-n}|M_1M_2|}(M_2)}\frac{\omega(d(M))}{d^2(M)}\,dm_3(M)\leqslant C\cdot 2^{-n}|M_1M_2|\cdot\omega(2^{-n}|M_1M_2|). \tag{26}$$

Остаётся подставить (26) в (18) и применить формулу (24):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{|M_1M_2|}\int\limits_{B'_{3\cdot 2^{-n}|M_1M_2|}(M_2)}\frac{\omega(d(M))}{d^2(M)}\,dm_3(M)$$

$$\leqslant C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{|M_1M_2|}\cdot 2^{-n}|M_1M_2|\cdot\omega(2^{-n}|M_1M_2|)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\omega(2^{-n}|M_1M_2|)\leqslant C\omega(|M_1M_2|).$$

Мы доказали, что $|I_1|\leqslant\omega(|M_1M_2|)$. Неравенство $|I_2|\leqslant\omega(|M_1M_2|)$ устанавливается аналогично. Теперь оценим интеграл I_3. Для $M\notin B_{2|M_1M_2|}(M_1)$ верна оценка

$$\left|\frac{1}{\rho_{M_2}(M)}-\frac{1}{\rho_{M_1}(M)}\right|\leqslant C\frac{|M_1M_2|}{\rho^2_{M_1}(M)},$$

так как для таких M выполнено неравенство

$$\rho_{M_2}(M)\geqslant\rho_{M_1}(M)-|M_1M_2|\geqslant\frac{1}{2}\rho_{M_1}(M).$$

Используя это обстоятельство и (4), получим

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leqslant C \int\limits_{B_{R_0}(O)\setminus B_{2|M_1M_2|}(M_1)} \frac{|M_1M_2|}{\rho^2_{M_1}(M)} \cdot \frac{\omega(d(M))}{d^2(M)}\, dm_3(M) \\
&= C \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{B'_{2^{n+1}|M_1M_2|}(M_1)\setminus B'_{2^n|M_1M_2|}(M_1)} \frac{|M_1M_2|}{\rho^2_{M_1}(M)} \frac{\omega(d(M))}{d^2(M)}\, dm_3(M) \\
&\leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|M_1M_2|}{2^{2n}|M_1M_2|^2} \int\limits_{B'_{2^n|M_1M_2|}(M_1)} \frac{\omega(d(M))}{d^2(M)}\, dm_3(M) \\
&= \frac{C}{|M_1M_2|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} C_n. \qquad (27)
\end{aligned}$$

Отметим, что доказав оценку (26), мы фактически доказали, что

$$\int\limits_{B'_R(M_1)} \frac{\omega(d(M))}{d^2(M)}\, dm_3(M) \leqslant CR\omega(R), \quad M_1 \in K. \qquad (28)$$

Поэтому

$$C_n \leqslant C \cdot 2^n |M_1M_2| \cdot \omega(2^n|M_1M_2|). \qquad (29)$$

Воспользуемся теперь вторым из неравенств (1):

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega(x \cdot 2^n)}{2^n} &= 4x \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{2^n x}^{2^{n+1}x} \frac{\omega(2^n x)}{2^{2n+2}x^2}\, dt \\
&\leqslant 4x \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{2^n x}^{2^{n+1}x} \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt = 2 \cdot 2x \int\limits_{2x}^{\infty} \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt \\
&\leqslant C\omega(2x) \leqslant C\omega(x). \qquad (30)
\end{aligned}$$

Объединяя (27), (29) и (30), получаем

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leqslant \frac{C}{|M_1M_2|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \cdot 2^n|M_1M_2| \cdot \omega(2^n|M_1M_2|) \\
&= C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega(2^n|M_1M_2|)}{2^n} \leqslant C\omega(|M_1M_2|).
\end{aligned}$$

Итак, мы доказали, что $|I_1|$, $|I_2|$, $|I_3| \leqslant C\omega(|M_1M_2|)$. Вместе с (17) это означает, что $|f(M_1) - f(M_2)| \leqslant C\omega(|M_1M_2|)$, то есть $f \in H^\omega(K)$.

Нам осталось проверить непрерывность функции

$$g(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{B_{R_0}(O)} \frac{\Delta f_0(M)}{\rho_{M_0}(M)} dm_3(M)$$

на $\mathbb{R}^3$. Она определена и непрерывна на $\mathbb{R}^3 \setminus K$, потому что на этом множестве она совпадает с f_0. Из рассуждений (18)–(26) следует, что функция g корректно определена на K. Беря $M_1 \in K$ и $M_2 \notin K$, мы можем написать равенство, аналогичное формуле (17). В доказательстве неравенств $|I_2|$, $|I_3| \leqslant C\omega(|M_1M_2|)$ никак не использовалось, что $M_2 \in K$, поэтому эти неравенства верны и сейчас. Сделав сферическую замену, получим

$$\int\limits_{B_R(M_2)} \frac{dm_3(M)}{\rho_{M_2}(M)} = CR^2.$$

Используя это обстоятельство, а также неравенства (4) и (28), оценим величину I_1:

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leqslant \int\limits_{B_{2|M_1M_2|}(M_1)} \frac{|\Delta f_0(M)|}{\rho_{M_2}(M)}\, dm_3(M) \\
&= \int\limits_{B_{\frac{1}{2}d(M_2)}(M_2)} \frac{|\Delta f_0(M)|}{\rho_{M_2}(M)}\, dm_3(M) + \int\limits_{B_{2|M_1M_2|}(M_1)\setminus B_{\frac{1}{2}d(M_2)}} \frac{|\Delta f_0(M)|}{\rho_{M_2}(M)}\, dm_3(M) \\
&\leqslant \frac{C\omega(d(M_2))}{d^2(M_2)} \int\limits_{B_{\frac{1}{2}(M_2)}(M_2)} \frac{dm_3(M)}{\rho_{M_2}(M)} + \int\limits_{B_{2|M_1M_2|}(M_1)} \frac{2|\Delta f_0(M)|}{d(M_2)}\, dm_3(M) \\
&\leqslant C\omega(d(M_2)) + \frac{2}{d(M_2)} \int\limits_{B_{2|M_1M_2|}(M_1)} \frac{\omega(d(M))}{d^2(M)}\, dm_3(M) \\
&\leqslant C\omega(d(M_2)) + C\frac{|M_1M_2|}{d(M_2)} \cdot \omega(|M_1M_2|) \leqslant C\omega(d(M_2))
\end{aligned}$$

при $d(M_2) \asymp |M_1M_2|$.

Возьмём теперь такую точку $M_1' \in K$, что $d(M_2) = |M_1'M_2|$. Тогда по доказанному выше находим:

$$\begin{aligned}&|g(M_2) - g(M_1)| \leqslant |g(M_2) - g(M_1')| + |g(M_1') - g(M_1)| \\ &\leqslant C\omega(d(M_2)) + C\omega(|M_1M_1'|),\end{aligned}$$

что стремится к нулю при $M_2 \to M_1$. Значит, функция g непрерывна на K. $\square$

4. Основная теорема

Теорема 3. *Пусть $L \subset \mathbb{R}^3$ – кривая, обладающая свойством соизмеримости дуги и хорды, ω – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию* (1), *$K \subset L$ – компакт, $f\colon K \to \mathbb{R}$. Для того, чтобы функция f лежала в классе $H^\omega(K)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\delta > 0$ существовала такая гармоническая в $\Omega_\delta(K)$ функция v_δ, что*: $|f(M) - v_\delta(M)| \leqslant C_1\omega(\delta)$ *для всех $M \in K$, а также $|v_\delta(M_1) - v_\delta(M_2)| \leqslant C_2\omega(\delta)$ при $|M_1M_2| \asymp \delta$, M_1, $M_2 \in K$.*

Последнее свойство функции v_δ назовём «гёльдеровостью».

Доказательство. Достаточность: возьмём $M_1, M_2 \in K$, подберём для $\delta = |M_1M_2|$ функцию v_δ и напишем, используя скорость приближения и «гёльдеровость»:

$$\begin{aligned}&|f(M_1) - f(M_2)| \leqslant |f(M_1) - v_\delta(M_1)| \\ &\quad + |v_\delta(M_1) - v_\delta(M_2)| + |v_\delta(M_2) - f(M_2)| \leqslant C\omega(|M_1M_2|).\end{aligned}$$

Теперь докажем необходимость. Начнём с небольшого геометрического наблюдения. Пусть M_{kn}, Ω_n^* означают то же, что и в доказательстве теоремы 1. Возьмём $C_1 \geqslant 1$ и зафиксируем k. Пусть X – первая точка пересечения кривой L с шаром $\overline{B}_{C_12^{-n}}(M_{kn})$, а Y – последняя. Тогда длина дуги XY не больше $2C_0C_1 \cdot 2^{-n}$, значит, на этой дуге (и тем более внутри шара) не больше $2C_0C_1 + 1$ точек M_{kn}. Значит,

$$m_3(B_{C_12^{-n}}(M_{kn}) \cap \Omega_n^*) \leqslant (2C_0C_1 + 1)\frac{4}{3}\pi \cdot 2^{-3n+3}.$$

В то же время

$$m_3(B_{C_12^{-n}}(M_{kn})) = \frac{4}{3}\pi C_1^3 \cdot 2^{-3n}.$$

Поскольку многочлен третьей степени растёт быстрее многочлена первой степени, мы можем выбрать C_1 так, что

$$m_3(B_{C_1 2^{-n}}(M_{kn})) \geqslant 2m_3(B_{C_1 2^{-n}}(M_{kn}) \cap \Omega_n^*),$$

при этом C_1 зависит лишь от C_0.

Определим множества β_{kn} для $0 \leqslant k \leqslant m_n$:

$$\beta_{0n} = B_{2^{-n+1}}(M_{0n}),$$
$$\beta_{kn} = B_{2^{-n+1}}(M_{kn}) \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} B_{2^{-n+1}}(M_{in}) \quad \text{при} \quad k = 1, \ldots, m_n.$$

Нетрудно понять, что множества β_{kn} попарно не пересекаются (n фиксировано) и в объединении дают множество, отличающееся от Ω_n^* на множество меры нуль. Пусть константа C_1 из геометрического наблюдения выбрана. Очевидно,

$$m_3(B_{C_1 2^{-n}}(M_{kn}) \setminus \Omega_n^*) \geqslant \frac{1}{2} m_3(B_{C_1 2^{-n}}(O)).$$

Пусть f_0 – псевдогармоническое расширение функции f, а число R_0, помимо прочего, выбрано так, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n^* \subset B_{R_0}(O)$. Неравенство (28) даёт нам

$$\int\limits_{B_{2^{-n+1}}(M_{kn})} \frac{\omega(d(M))}{d^2(M)}\, dm_3(M) \leqslant C 2^{-n} \omega(2^{-n}).$$

Тогда тем более

$$\int\limits_{\beta_{kn}} \frac{\omega(d(M))}{d^2(M)}\, dm_3(M) \leqslant C 2^{-n} \omega(2^{-n}).$$

Из этого неравенства получаем, применяя (4), что

$$\int\limits_{\beta_{kn}} \Delta f_0(M)\, dm_3(M) = C_{kn} 2^{-n} \omega(2^{-n}), \tag{31}$$

где $|C_{kn}| \leqslant C$ для всех k и n. Обозначим $\chi_{kn} = \chi_{B_{C_1 2^{-n}}(M_{kn}) \setminus \Omega_n^*}$ и положим

$$\varphi_{kn}(M) = \gamma_{kn} \chi_{kn}(M) \cdot 2^{2n} \omega(2^{-n}),$$

где числа γ_{kn} подобраны так, что

$$\int\limits_{\beta_{kn}} \Delta f_0(M)\, dm_3(M) + \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi_{kn}(M)\, dm_3(M) = 0. \tag{32}$$

Равенство (31) и определение величины C_1 показывают, что $|\gamma_{kn}| \leqslant C$ для всех k и n. Далее, положим $\Phi_n = \sum\limits_{k=0}^{m_n} \varphi_{kn}$. Определим функцию $v_{2^{-n}}$:

$$v_{2^{-n}}(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_n^*} \frac{\Delta f_0(M)}{\rho_{M_0}(M)}\, dm_3(M) + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\Phi_n(M)}{\rho_{M_0}(M)}\, dm_3(M).$$

Напомним, что если $d(M) \leqslant 2^{-n}$, то $M \in \Omega_n^*$. Значит, $\Omega_{2^{-n}}(K) \subset \Omega_n^*$. Так как первый интеграл берётся по множеству, не пересекающемуся с Ω_n^*, а $\operatorname{supp} \Phi_n \cap \Omega_n^* = \varnothing$, то функция $v_{2^{-n}}$ гармонична в $\Omega_{2^{-n}}(K)$ по правилу дифференцирования интеграла, зависящего от параметра (от M_0 зависит только $1/\rho_{M_0}(M)$, а эта функция гармонична).

Пусть $M_0 \in K$. Используя определение функции $v_{2^{-n}}$ и равенство (16), имеем:

$$\begin{aligned}
v_{2^{-n}}(M_0) - f(M_0) &= -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_n^*} \frac{\Delta f_0(M)}{\rho_{M_0}(M)}\, dm_3(M) \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\Phi_n(M)}{\rho_{M_0}(M)}\, dm_3(M) + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta f_0(M)}{\rho_{M_0}(M)}\, dm_3(M) \\
&= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega_n^*} \frac{\Delta f_0(M)}{\rho_{M_0}(M)}\, dm_3(M) + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\Phi_n(M)}{\rho_{M_0}(M)}\, dm_3(M) \\
&= \sum_{k=0}^{m_n} \left(\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\beta_{kn}} \frac{\Delta f_0(M)}{\rho_{M_0}(M)} dm_3(M) + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi_{kn}(M)}{\rho_{M_0}(M)} dm_3(M) \right) = \Sigma_1 + \Sigma_2,
\end{aligned}$$

где Σ_1 – сумма по индексам k, для которых $M_{kn} \in B_{2^{-n+1}}(M_0)$, а Σ_2 – по всем остальным. Множество индексов k слагаемых набора Σ_i обозначим S_i. Используя соизмеримость дуги с хордой так же, как мы это сделали в геометрическом наблюдении в начале доказательства, получим, что в Σ_1 не больше $4C_0 + 1$ слагаемых. Очевидно, $\bigcup\limits_{k \in S_1} \beta_{kn} \subset$

$B_{2^{-n+2}}(M_0)$, значит, рассуждая как в (18)–(26), мы получим

$$\left|\sum_{k\in S_1}\int\limits_{\beta_{kn}}\frac{\Delta f_0(M)}{\rho_{M_0}(M)}\,dm_3(M)\right|\leqslant\int\limits_{B_{2^{-n+2}}(M_0)}\frac{|\Delta f_0(M)|}{\rho_{M_0}(M)}\,dm_3(M)\leqslant C\omega(2^{-n}).\tag{33}$$

Поскольку для $M\notin\Omega_n^*$ и $M_0\in K$ верно $\rho_{M_0}(M)\geqslant 2^{-n}$, имеем

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k\in S_1}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\varphi_{kn}(M)}{\rho_{M_0}(M)}\,dm_3(M)\right|\\&\quad\leqslant\sum_{k\in S_1}\int\limits_{B_{C_1 2^{-n}}(M_{kn})}\frac{|\gamma_{kn}|2^{2n}\cdot\omega(2^{-n})}{2^{-n}}\,dm_3(M)\\&\quad\leqslant(4C_0+1)C\cdot 2^{3n}\cdot 2^{-3n}\cdot\omega(2^{-n})\leqslant C\omega(2^{-n}).\end{aligned}\tag{34}$$

Объединяя (33) и (34), получаем $|\Sigma_1|\leqslant C\omega(2^{-n})$.

Применяя (32), перепишем слагаемые из Σ_2 следующим образом:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\beta_{kn}}\frac{\Delta f_0(M)}{\rho_{M_0}(M)}\,dm_3(M)+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\varphi_{kn}(M)}{\rho_{M_0}(M)}\,dm_3(M)\\&=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\beta_{kn}}\frac{\Delta f_0(M)}{\rho_{M_0}(M_{kn})}dm_3(M)+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\beta_{kn}}\Delta f_0(M)\left(\frac{1}{\rho_{M_0}(M)}-\frac{1}{\rho_{M_0}(M_{kn})}\right)dm_3(M)\\&+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\varphi_{kn}(M)}{\rho_{M_0}(M_{kn})}dm_3(M)+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\varphi_{kn}(M)\left(\frac{1}{\rho_{M_0}(M)}-\frac{1}{\rho_{M_0}(M_{kn})}\right)dm_3(M)\\&=\frac{1}{4\pi\rho_{M_0}(M_{kn})}\left(\int\limits_{\beta_{kn}}\Delta f_0(M)\,dm_3(M)+\int\limits_{\mathbb{R}^3}\varphi_{kn}(M)\,dm_3(M)\right)+\ldots\\&=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\beta_{kn}}\Delta f_0(M)\left(\frac{1}{\rho_{M_0}(M)}-\frac{1}{\rho_{M_0}(M_{kn})}\right)dm_3(M)\\&\quad+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\varphi_{kn}(M)\left(\frac{1}{\rho_{M_0}(M)}-\frac{1}{\rho_{M_0}(M_{kn})}\right)dm_3(M)=A_k+D_k.\end{aligned}$$

Заметим, что для $k\in S_2$ мы имеем

$$\left|\frac{1}{\rho_{M_0}(M)}-\frac{1}{\rho_{M_0}(M_{kn})}\right|\leqslant\frac{|MM_{kn}|}{\rho_{M_0}(M)\rho_{M_0}(M_{kn})}\leqslant\frac{C2^{-n}}{m^2\cdot 2^{-2n}}=\frac{C}{m^2\cdot 2^{-n}},$$

где $m = m(k)$ – натуральное число, которое растёт по мере удаления от M_0 по кривой L. Применяя последнее неравенство, получим оценки на A_k и D_k:

$$|A_k| \leqslant \int\limits_{\beta_{kn}} \frac{\omega(d(M))\,dm_3(M)}{d^2(M)\cdot 2^{-n}\cdot m^2} \leqslant C\omega(2^{-n})\cdot 2^{-n}\cdot \frac{1}{2^{-n}\cdot m^2} \leqslant \frac{C\omega(2^{-n})}{m^2},$$

$$|D_k| \leqslant \int\limits_{B_{C_1 2^{-n}}(M_{kn})} \omega(2^{-n})\cdot 2^{2n}\cdot \frac{1}{2^{-n}\cdot m^2} \leqslant \frac{C\omega(2^{-n})}{m^2}.$$

Значит,

$$|\Sigma_2| \leqslant \sum_{k\in S_2} (|A_k| + |D_k|) \leqslant C\omega(2^{-n})\cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \leqslant C\omega(2^{-n}).$$

Таким образом,

$$|f(M_0) - v_{2^{-n}}(M_0)| \leqslant C\omega(2^{-n}). \tag{35}$$

Чтобы получить требуемую оценку для произвольного $\delta > 0$, подберём такое n, что $2^{-n-1} < \delta \leqslant 2^{-n}$, положим $v_\delta = v_{2^{-n}}$ и напишем неравенство (35). Оно эквивалентно неравенству $|f(M_0) - v_\delta(M_0)| \leqslant C\omega(\delta)$.

Осталось проверить «гёльдеровость» функции v_δ. Возьмём такие M_1, $M_2 \in K$, что $|M_1M_2| \asymp \delta$. Пользуясь гёльдеровостью функции f и уже доказанной оценкой скорости приближения, получаем

$$\begin{aligned} |v_\delta(M_1) - v_\delta(M_2)| &\leqslant |v_\delta(M_1) - f(M_1)| \\ &+ |f(M_1) - f(M_2)| + |f(M_2) - v_\delta(M_2)| \leqslant C\omega(\delta). \end{aligned}$$

□

Список литературы

1. В. К. Дзядык, *О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию Lip α (0 < α < 1) на конечном отрезке вещественной оси.* — Известия АН СССР, сер. матем., **20**, No. 5 (1956), 623–642.
2. В. В. Андриевский, *Геометрическое строение областей и прямые теоремы конструктивной теории функций.* — Матем. сб., **126**(168), No. 1 (1985), 41–58.
3. Н. А. Широков, *Аппроксимативная энтропия континуумов.* — Докл. АН СССР, **235**, No. 3 (1977), 546–549.
4. N. A. Shirokov, *Constructive descriptions of functional classes by polynomial approximations.* — J. Math. Sci., **105** (2001), 2269–2291.
5. T. A. Alexeeva, N. A. Shirokov, *Constructive description of Hölder-like classes on an arc in* $\mathbb{R}^3$ *by means of harmonic functions.* — J. Approx. Theory, **249** (2020).

6. E. M. Dyn'kin, *The pseudoanalytic extension.* — J. Analyse Mathematique, **60** (1993), 45–70.
7. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики.* Том второй, М., Наука (1974), 656 с.

Pavlov D. A. Constructive description of Hölder classes on compact subsets of $\mathbb{R}^3$.

We give a constructive description of Hölder classes of functions on a compact subset of a chord-arc curve in $\mathbb{R}^3$ in terms of the rate of approximation by harmonic functions.

Российский государственный
педагогический университет
им. А. И. Герцена,
наб. р. Мойки 48,
191186 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: dimapavlow@list.ru

Поступило 04 августа 2020 г.