

Л. С. Маергойз

**НЕОДНОЛИСТНЫЕ ИНДИКАТОРНАЯ И  
СОПРЯЖЕННАЯ ДИАГРАММЫ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ  
ПОРЯДКА  $\rho \neq 1$ . ПРИЛОЖЕНИЕ К РЕШЕНИЮ  
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

Светлой памяти профессора  
Николая Николаевича Тарханова

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известная теорема По́йа о связи между индикаторной и сопряженной диаграммами целой функции экспоненциального типа (см. [1], лекция 9 в [2]) имеет широкий круг обобщений и приложений в различных областях теоретической математики и в ряде областей прикладной математики. В большинстве случаев эти исследования связаны с изучением свойств *однозначных* аналитических функций одной и многих переменных и опираются на теорию роста целых функций (одномерные и многомерные аналоги теоремы По́йа). При этом, как правило, в качестве индикаторной и сопряженной диаграмм рассматривались некоторые множества, расположенные в  $\mathbb{C}^n$ ,  $n \geq 1$ . Обзор таких результатов вместе с подробным изложением новейших из них имеется в [3].

Объектом исследования данного обзора являются *многозначные* ряды Пу́изе, порожденные степенной функцией  $z = w^{1/\rho}$ , где  $\rho > 0$ ,  $\rho \neq 1$ . Представлены методы их аналитического продолжения, базирующиеся на теории роста целых функций одной переменной порядка  $\rho$  и нормального типа, а также демонстрируются некоторые их приложения. Классические результаты Бореля [4] и По́йа ([1], лекция 9 в [2]) для однозначных степенных рядов и рядов Лорана перенесены на случай многозначных рядов Пу́изе.

---

*Ключевые слова:* целая функция, порядок, индикатор, ряд Пу́изе, многозначная функция, неоднолистные вогнутая, индикаторная и сопряженная диаграммы, риманова поверхность, аналитическое продолжение, решение алгебраических уравнений.

В разделе 1 упомянутые результаты Бореля и Пойа представлены в эквивалентной форме, удобной для дальнейшего изложения (см. [3], гл. 1, §10 и гл. 3, §3). В разделе 2 дано значимое развитие результата Бореля как следствие теоремы Пойа. В разделе 3 изложены главные результаты работы, которые являются аналогами для многозначных функций утверждений разделов 1 и 2. Они опираются на конструкцию Бернштейна индикаторной диаграммы целой функции  $f$  порядка  $\rho \neq 1$  и нормального типа [5]. Кроме того, здесь разработано понятие неоднolistной сопряженной диаграммы функции  $f$ . При этом использовалась модификация понятия *инфимальной конволюции* выпуклых функций в  $\mathbb{C}$ , см. [6]. В качестве следствия этих результатов дано описание области аналитического продолжения “правильного” ряда Пюизе – его неоднolistный “многоугольник Бореля”. В отличие от случая целой функции экспоненциального типа, и диаграммы, и многоугольник Бореля являются *римановыми поверхностями* при  $\rho \neq 1$ . Раздел 4 посвящен приложениям результатов раздела 3. Здесь излагаются аналитические свойства простейших многозначных функций, а именно, обращений рациональных функций. Это позволяет найти новый подход к решению алгебраических уравнений.

Статья представляет собой расширенный вариант доклада автора на одной из конференций по комплексному анализу и его приложениям [7] (см. также [8]). Основные результаты (включая их доказательства) были рассмотрены в [9] и [10].

## 1. КЛАССИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ БОРЕЛЯ–ПОЙА ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ РЯДОВ ТЕЙЛОРА–ЛОРАНА

**1.1. Результаты Бореля.** Э. Борель ассоциировал с каждым сходящимся в окрестности 0 в  $\mathbb{C}$  степенным рядом

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \tag{1}$$

целую функцию

$$f_B(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{z^k}{k!} \tag{2}$$

порядка  $\rho = 1$  и нормального типа (преобразование Бореля ряда  $g$ ). Как известно, ее индикатор определяется формулой

$$h_{f_B}(\theta) = \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \ln |f(re^{i\theta})|, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

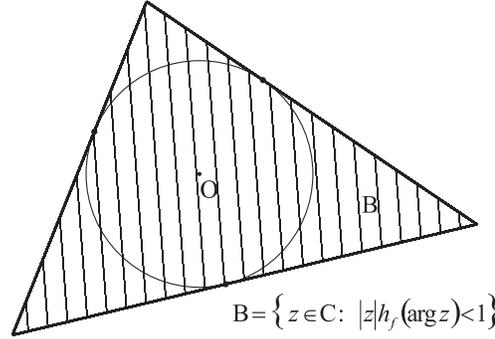


Рис. 1. Многоугольник Бореля степенного ряда  $g$  ( $f := f_B$ ).

**Теорема А.** В упомянутых обозначениях семейство преобразований

$$g_\theta(z) = \int_0^{\infty(\arg t = \theta)} f_B(tz)e^{-t} dt, \quad (3)$$

функции  $f_B$ , где  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ , определяет аналитическое продолжение ряда  $g$  в множество

$$M = \bigcup_{|\theta| < \pi/2} B_\theta.$$

Здесь  $B_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |z|h_{f_B}^+(\theta + \arg z) < \cos \theta\}$ , где  $h_{f_B}^+$  — неотрицательная срезка индикатора  $h_{f_B}$ , т.е.  $h_{f_B}^+(\cdot) = \max\{h_{f_B}(\cdot), 0\}$ . Кроме того, верны следующие геометрические утверждения:

1) множество  $B := B_0$  — внутренность пересечения всех полуплоскостей, содержащих круг сходимости  $K$  ряда  $g$  и таких, что их граничные линии являются касательными к окружности  $\partial K$ , проходящими через особые точки функции  $g$ ;

2) множество  $M$  совпадает с  $\cup K_z | z \in B$ , где  $K_z$  — круг в  $\mathbb{C}$  с диаметром  $[0, z]$ .

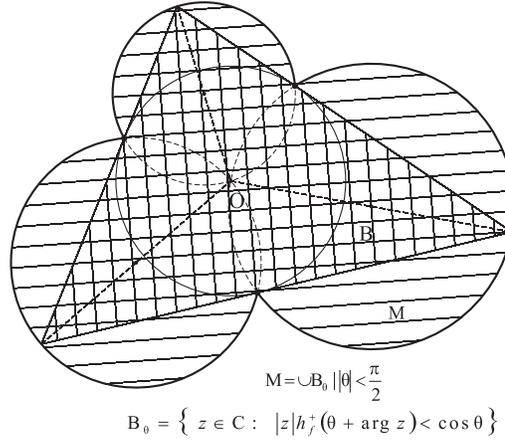


Рис. 2. Обобщенный многоугольник Бореля степенного ряда  $g$  ( $f := f_B$ ).

Множество  $B$  называется *многоугольником Бореля* ряда  $g$  (рис. 1), а множество  $M$  – его *обобщенным многоугольником Бореля* (см. рис. 2).

**1.2. Теорема По́йа.** По́йа [2] предложил другой подход. Он ассоциировал со сходящимся в окрестности  $\infty$  рядом Лорана

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{p^{k+1}}, \quad F(\infty) = 0 \quad (4)$$

целую функцию экспоненциального типа

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{z^k}{k!} \quad (5)$$

в форме ряда (2). По́йа ввел понятие *индикаторной диаграммы*  $P_h$  функции  $f$  с индикатором  $h$ : это выпуклый компакт в  $\mathbb{C}$ , для которого  $h$  является опорной функцией, т.е.,

$$h(\theta) = \sup\{\operatorname{Re} z e^{-i\theta} : z \in P_h\}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

и

$$P_h = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z e^{-i\theta} \leq h(\theta) \forall \theta \in \mathbb{R}\}.$$

*Сопряженной диаграммой Поля* функции  $f$  назовем наименьший выпуклый компакт  $K_F$  в  $\mathbb{C}$ , во внешность которого  $\mathbb{C} \setminus K_F$  ряд  $F$  (4) допускает аналитическое продолжение. Эта формулировка имеется в [3], введение, теорема  $A_1$ . Она годится и для ряда Лорана вида (4), область определения  $D$  полной аналитической функции, порождаемой любыми его аналитическими продолжениями, является не обязательно однолистной, т.е. расположенной в комплексной плоскости. Но  $D$  может быть и не однолистной областью – *римановой поверхностью*, например, в случае, когда ряд Лорана представляет *однолистную* ветвь обращения рациональной функции, отличной от дробно-линейной.

Опираясь на эти понятия, Поля доказал следующую теорему.

**Теорема В<sub>1</sub>.** ([1]; [2], лекция 9; [3], гл. 1, §10). *В принятых обозначениях индикаторная и сопряженная диаграммы функции  $f$  удовлетворяют соотношению  $K_F = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in P_h\}$ , а для их опорных функций справедливо равенство  $h(\theta) = k(-\theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .*

Для каждой из диаграмм функции  $f$  существует эквивалентный геометрический образ. *Индикаторной диаграммой Бернштейна  $I_h$*  функции  $f$  назовем открытое вогнутое подмножество расширенной комплексной плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$ , определяемое формулой<sup>1</sup>

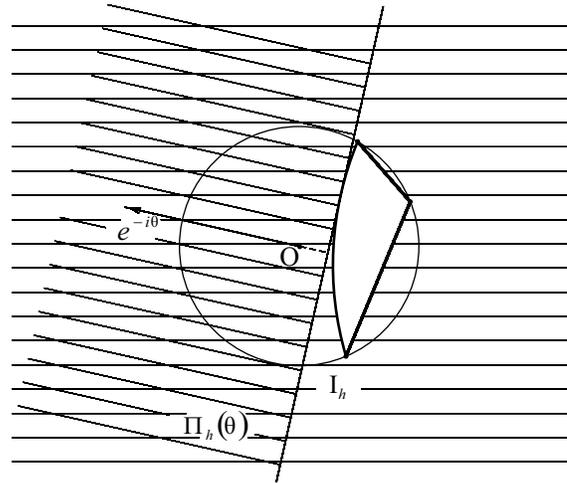
$$I_h = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} \Pi_h(\theta), \quad (6)$$

где  $\Pi_h(\theta) = \{\infty\} \cup \{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} pe^{i\theta} > h(\theta)\}$ . Индикаторные диаграммы Поля и Бернштейна взаимно однозначно определяют друг друга:

$$I_h = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in \mathbb{C} \setminus P_h\}; \quad P_h = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in \overline{\mathbb{C}} \setminus I_h\}.$$

*Сопряженной диаграммой Бернштейна* функции  $f$  назовем множество  $I_F := \mathbb{C} \setminus K_F$ , где  $K_F$  – сопряженная диаграмма Поля. Поэтому справедлива следующая эквивалентная версия теоремы В<sub>1</sub>, формулировка которой приводится в виде, удобном для дальнейшего изложения.

<sup>1</sup>Вогнутое подмножество сферы Римана  $\overline{\mathbb{C}}$  – это объединение некоторых полуплоскостей в  $\overline{\mathbb{C}}$ . Множество  $I_h$  – простейший вариант конструкции Бернштейна [5], когда порядок функции  $f$  равен 1 (см. 3.1).



$$\Pi_h(\theta) = \{ p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p e^{i\theta} > h_f(\theta) \}$$

$$\mathbf{I}_h = \cup \Pi_h(\theta) | \theta \in \mathbb{R}$$

Рис. 3. Индикаторная диаграмма Бернштейна  $\mathbf{I}_h$  целой функции  $f$ .

**Теорема В<sub>2</sub>.** В упомянутых обозначениях семейство преобразований Лапласа

$$F_\theta(p) = \int_0^{\infty(\operatorname{Arg} z = \theta)} f(z) e^{-pz} dz, \quad p \in \Pi_h(\theta), \quad \theta \in (-\pi, \pi] \tag{7}$$

целой функции  $f$  (5) определяет аналитическое продолжение  $\mathcal{F}$  ряда  $F$  (4) в индикаторную диаграмму Бернштейна  $\mathbf{I}_h$  функции  $f$  (см. (6)). Кроме того,  $\mathbf{I}_h = I_F$ , где  $I_F$  – сопряженная диаграмма Бернштейна  $f$ . Это означает, что граничная прямая  $\partial\Pi_h(\theta)$  любой полуплоскости  $\Pi_h(\theta)$  содержит особую точку функции  $\mathcal{F}$  для каждого  $\theta \in (-\pi, \pi]$ .

Итак, по теореме В<sub>2</sub>, индикаторная и сопряженная диаграммы Бернштейна целой функции  $f$  совпадают.

## 2. Однолиственный многоугольник Бореля степенного ряда

Теорема Пойа порождает другой подход к суммированию степенного ряда (1), позволяющий улучшить результаты Бореля (теорема А). Вернемся снова к проблеме суммирования степенного ряда

$$L(q) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k q^{k+1}, \quad L(0) = 0, \quad (8)$$

сходящегося в окрестности нуля в  $\mathbb{C}$ .<sup>2</sup> Ряд  $F(p) := L(1/p)$  имеет вид ряда (4). Целую функцию  $f$  (5) порядка 1 и нормального типа, ассоциированную с рядом  $L$ , назовем *преобразованием Пойа ряда  $L$* . Из теоремы Пойа (см. теорему В<sub>2</sub>) выводим следующее утверждение.

**Следствие 1** ([9], теорема 4; [10], следствие 2). *В обозначениях теоремы В<sub>2</sub> семейство преобразований  $\{L_\theta(q) = F_\theta(1/q), \theta \in (-\pi, \pi)\}$  целой функции  $f$  (5) определяет аналитическое продолжение степенного ряда  $L$  (8) в множество  $\mathbf{K}_h = \bigcup \mathbf{K}_h(\theta) | \theta \in \mathbb{R}$ ,<sup>3</sup> где  $\mathbf{K}_h(\theta) = \{q \in \overline{\mathbb{C}} : 1/q \in \Pi_h(\theta)\}$ , причем граничная кривая*

$$\partial \mathbf{K}_h(\theta) = \{q \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} q \exp\{-i\theta\} = |q|^2 h(\theta)\}$$

*множества  $\mathbf{K}_h(\theta)$  содержит особую точку для каждого  $\theta \in (-\pi, \pi]$ .*

Здесь множество  $\mathbf{K}_h(\theta) \setminus \{0\}$

- а) открытый круг с диаметром  $(0, e^{i\theta}/a_\theta)$ , если  $a_\theta := h(\theta) > 0$ ;
- б) открытая полуплоскость, если  $a_\theta = 0$ ;
- с) внешность в  $S := \overline{\mathbb{C}}$  замкнутого круга с диаметром  $[0, e^{i\theta}/a_\theta]$ , если  $a_\theta < 0$  (см. рис. 4, полагая  $\rho = 1$ ).

Круговое множество  $\mathbf{K}_h$  назовем *однолистным многоугольником Бореля* степенного ряда  $L$  (8).

Изучим связь между областями суммирования степенного ряда (8) методами Бореля и Пойа. Для этого понадобится следующее хорошо известное утверждение.

**Лемма.** *Пусть  $f$  целая функция порядка  $\rho \in (0, \infty)$  и нормального типа, а  $h_f$  – индикатор функции  $f$ . Тогда  $\rho$  – порядок ее производной*

<sup>2</sup>Условие  $L(0) = 0$  не ограничивает общности дальнейших рассуждений.

<sup>3</sup>Заметим, что  $\mathbf{K}_h(\theta - \pi) = \mathbf{K}_h(\theta + \pi)$  для любого  $\theta \in \mathbb{R}$ .

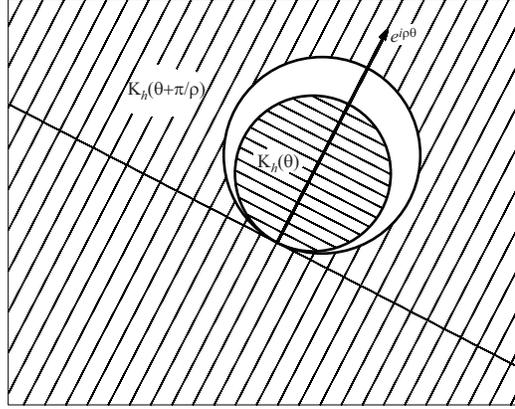


Рис. 4. Круговые множества  $\mathbf{K}_h(\theta)$ ,  $h(\theta) > 0$  и  $\mathbf{K}_h(\theta + \pi/\rho)$ ,  $h(\theta + \pi/\rho) < 0$ .

$f'$ , и для индикаторов  $h_f$ ,  $h_{f'}$  соответственно функций  $f$ ,  $f'$  верно соотношение:

$$h_{f'} \leq h_f; \quad h_{f'}^+ = h_f^+, \quad h^+ = \max\{0, h\}.$$

**Предложение 1.** *Обобщенный многоугольник Бореля  $M$  степенного ряда  $L$  (8) – подмножество его однолистного многоугольника Бореля  $\mathbf{K}_h$ , т.е.  $M \subset \mathbf{K}_h$ . Здесь  $h$  – индикатор преобразования Поля этого ряда, т.е. ассоциированной с ним целой функции  $f$  (5).<sup>4</sup>*

◀ Представим ряд  $L$  в форме ряда (1), когда показатели степени  $z$  совпадают с номерами коэффициентов ряда. Полагаем в (8)

$$c_k = b_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots; \quad L(q) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} q^{k+1}. \quad (9)$$

Тогда в обозначениях формулы (2) преобразование Бореля ряда  $L$  и его производная имеют, соответственно, вид

$$f_B(z) := \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!}; \quad f'_B(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

<sup>4</sup>Доказательство этого факта отсутствует в [9–10].

Из формул (9) и (5) находим  $f'_B = f$ . Поэтому из леммы заключаем

$$h_f \leq h_{f_B}; \quad h_f^+ = h_{f_B}^+, \quad (10)$$

где  $h_f$  и  $h_{f_B}$  – индикаторы, соответственно, функций  $f$  и  $f_B$ , а  $h_f^+, h_{f_B}^+$  – неотрицательные срезки этих индикаторов (в обозначениях теоремы А). Теперь желаемое утверждение вытекает из теоремы А и следствия 1. ►

Итак, если в упомянутых обозначениях индикатор  $h_f$  принимает и отрицательные значения, тогда однолиственный многоугольник Бореля  $\mathbf{K}_h$  степенного ряда  $L$  (8) – большая область в  $\mathbb{C}$  по сравнению с его обобщенным многоугольником Бореля  $M$ , т.е.  $M \subset \mathbf{K}_h$ ,  $M \neq \mathbf{K}_h$ .

**Пример 1** ([9], пример). Рассмотрим степенной ряд

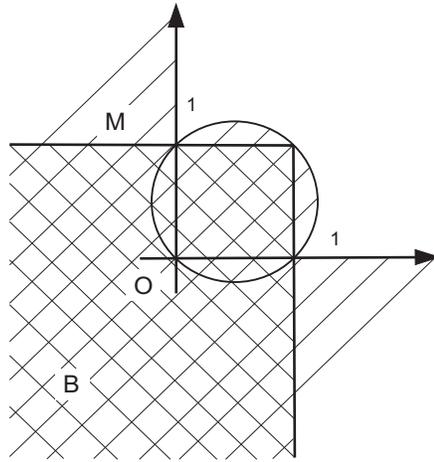


Рис. 5. Обобщенный многоугольник Бореля  $M$  ряда  $L$

$$L(q) = \sum_{k=0}^{\infty} [1 + (-i)^k] q^{k+1} = \frac{q}{1-q} + \frac{q}{1+iq},$$

сходящийся при  $|q| < 1$ . У него две особые точки  $q_1 = 1$ ,  $q_2 = i$ . Целая функция  $f$ , ассоциированная с  $L$  (преобразование Поля ряда  $L$ ), имеет вид  $f(z) = e^z + e^{-iz}$ . Ее порядок равен 1, а ее индикатор  $h_f(\theta)$  равен

$\max\{\cos \theta, \sin \theta\}$  для любого  $\theta \in \mathbb{R}$ . Из следствия 1 находим однолистный многоугольник Бореля  $\mathbf{K}_h$  ряда  $L$ :  $\mathbf{K}_h = B \cup \mathbf{K}_h(\pi/4) \cup \mathbf{K}_h(-3\pi/4)$ , где  $B$  – многоугольник Бореля для  $L$  (см. 1.1). Поскольку  $h_f(-3\pi/4) = -h_f(\pi/4) = -1/\sqrt{2}$ , ряд  $L$  аналитически продолжается во внешность дуги окружности с центром в точке  $(1+i)/2$ , соединяющей особые точки  $q_1 = 1$ ,  $q_2 = i$  и проходящей через точку  $1+i$  (однолистный многоугольник Бореля  $L$ ).

С другой стороны, преобразование Бореля ряда  $L$  имеет вид (см. (2))  $f_B(z) = e^z + ie^{-iz} - 1 - i$ . Вычисляя индикатор целой функции  $f_B$ , получаем:

$$h_{f_B}(\theta) = \max\{\cos \theta, \sin \theta, 0\}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Сравнивая индикаторы целых функций  $f$  и  $f_B$ , выводим в обозначениях формулы (10):  $h_{f_B} = h_f^+$ . Теперь, опираясь на теорему А, находим обобщенный многоугольник Бореля  $M$  ряда  $L$ :  $M = (\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_+) \cup S$ . Здесь  $\mathbb{C}_+ = \{x + iy \in \mathbb{C} : x \geq 0; y \geq 0\}$ ;  $S = \{q \in \mathbb{C} : |q - (1+i)/2| < 1/\sqrt{2}\}$  (см. Рис. 5).<sup>5</sup> Итак,  $M \subset \mathbf{K}_h$ ,  $M \neq \mathbf{K}_h$ .

### 3. НЕОДНОЛИСТНЫЕ ВАРИАНТЫ ТЕОРЕМ ПОЙА–БЕРНШТЕЙНА И БОРЕЛЯ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ПОРЯДКА $\rho > 1/2$ , $\rho \neq 1$

**3.1.  $\rho$ -листная индикаторная диаграмма целой функции порядка  $\rho > 0$ ,  $\rho \neq 1$  и нормального типа.** Рассмотрим сходящийся в окрестности бесконечности ряд Пуизе, который порождается степенной функцией  $z = p^{1/\rho}$ ,  $\rho > 0$ ,  $\rho \neq 1$ :

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{p^{(k+1)/\rho}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\exp\{(k+1)(\ln r + i\varphi)/\rho\}}, \quad (11)$$

где  $r = |p| > R$ ,  $\varphi = \text{Arg } p \in \mathbb{R}$ ;  $R > 0$  – его радиус расходимости. Это означает, что областью определения функции  $F$  является подмножество  $(R, \infty) \times \mathbb{R}$  римановой поверхности логарифма. Если  $p^{1/\rho} = |p|^{1/\rho} e^{i\varphi/\rho}$ ,  $\arg p = \varphi \in (-\pi, \pi]$  при  $\rho \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  – главное значение корня степени  $\rho$  из  $p$ , тогда ряд (11) выглядит так:

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{[\varepsilon p^{1/\rho}]^{k+1}}, \quad p \in \mathbb{C}, |p| > R, \quad F(\infty) = 0, \quad (11^*)$$

где  $\varepsilon$  – произвольный корень степени  $\rho$  из 1, причем  $F$  –  $\rho$ -значная функция в общем случае.

<sup>5</sup>Ср. пример в [3], гл. 3, §3.

Ассоциируем с каждым рядом вида (11) целую функцию

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k z^k}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (12)$$

порядка  $\rho \neq 1$  и нормального типа с индикатором  $h = h_f$ .<sup>6</sup> В качестве геометрического образа ее индикатора  $h$  Бернштейн [5] использовал многолистную поверхность  $E_h$ , образованную движением полуплоскости (ср. (6))

$$\Pi_h(\theta) = \{(p, \theta) : \operatorname{Re} p e^{i\rho\theta} > h(\theta), p \in \mathbb{C}\}, \quad (13)$$

где  $\theta \in \mathbb{R}$  – параметр движения. Индикатор  $h$  принадлежит классу  $\mathfrak{F}_\rho$  конечных  $2\pi$ -периодических тригонометрически  $\rho$ -выпуклых функций (см. лекция 8 в [2]).

Заметим, что в обозначениях формулы (11)  $F(r, \varphi) = F(r, \varphi + 2\pi\rho)$  для любых  $r > R$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Если  $h$  – неотрицательная функция, то  $E_h$  – область на римановой поверхности логарифма  $L$ , на которой действует автоморфизм  $\mathcal{A}: E_h \rightarrow E_h$ ,  $\mathcal{A}(r, \varphi) = \mathcal{A}(r, \varphi + 2\pi\rho)$ . При отображении  $z = p^{\pm 1/\rho}$  поверхность  $E_h$  переходит в область в  $\mathbb{C}$  (которой  $E_h$  вполне определяется), а объект исследования, ряд Пюизе, – в ряд Лорана или Тейлора. Суммирование этих рядов осуществляется многими известными методами (см., например, теоремы А, В<sub>1</sub>, В<sub>2</sub>, следствие 1, [3], гл. 3). С целью исключить этот случай рассмотрим ряды Пюизе вида (11) при произвольном  $\rho > 1/2$ . Только тогда функция  $h \in \mathfrak{F}_\rho$  может принимать и положительные, и отрицательные значения (см., например, свойство 1.9.9 в [3]).

Присоединим логарифмическую точку ветвления

$$\lambda_\infty = \{(\infty, \theta), \theta \in \mathbb{R}\}$$

к поверхности

$$E_h = \bigcup \Pi_h(\theta) | \theta \in \mathbb{R},$$

т.е. рассмотрим множество  $\mathbf{E}_h := E_h \cup \{\lambda_\infty\}$ . Определим проекцию

$$\varphi_h : \mathbf{E}_h \rightarrow S; \quad \varphi_h(p, \theta) = p, \quad (p, \theta) \in \Pi_h(\theta), \quad p \in \mathbb{C}, \quad \theta \in \mathbb{R}; \quad \varphi_h(\lambda_\infty) = \infty.$$

Здесь  $S$  – сфера Римана.

Пару  $(\varphi_h, \mathbf{E}_h)$  назовем (бесконечнолистным) *вогнутым многообразием*, ассоциированным с функцией  $h \in \mathfrak{F}_\rho$ .<sup>7</sup>

<sup>6</sup>Тип функции  $f$  равен  $R$  (см. лекция 1 в [2]).

<sup>7</sup>В дальнейшем для простоты изложения иногда ограничимся символом  $\mathbf{E}_h$ .

Так как  $h - 2\pi$ -периодическая функция, то на  $\mathbf{E}_h$  действует следующий автоморфизм:

$$B : \mathbf{E}_h \rightarrow \mathbf{E}_h; B(p, \theta) = (pe^{-i2\pi\rho}, \theta + 2\pi), \theta \in \mathbb{R}; B(\lambda_\infty) = \lambda_\infty.$$

Геометрически это означает, что отображение  $B$  взаимно однозначно отображает полуплоскость  $\Pi_h(\theta)$  на полуплоскость  $\Pi_h(\theta + 2\pi)$  для любого  $\theta \in \mathbb{R}$  (см. (13)). Отображение  $B$  порождает циклическую группу автоморфизмов  $G_E$ , действующую на  $\mathbf{E}_h$ .

**Теорема 1** ([10], теорема 1). Пусть  $\rho > 1/2$ ,  $\rho \neq 1$ ;  $h \in \mathfrak{F}_\rho$ ,  $R = \max\{h(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$ . Полагаем в упомянутых обозначениях  $\mathbf{I}_h := \mathbf{E}_h/G_E$  – фактор-пространство (так называемое пространство орбит группы  $G_E$ ). Тогда  $\mathbf{I}_h$  со стандартной комплексной структурой на  $\mathbf{I}_h \setminus \{\lambda_\infty\}$  – риманова поверхность. Кроме того, топологической моделью множества  $\mathbf{I}_h$  в окрестности  $\lambda_\infty$  является угол

$$L_R = \{(r, \varphi) \in L : r > R; \theta_0 \leq \varphi \leq \theta_0 + 2\pi\rho\} \forall \theta_0 \in \mathbb{R}$$

на римановой поверхности логарифма раствора  $2\pi\rho$  со стандартно склеенными сторонами, представляющий часть римановой поверхности степенной функции  $z = p^{1/\rho}$ .

**Определение 1** ([3], определение 4.2.12). Предположим, что  $\rho > 1/2$ ,  $\rho \neq 1$ ,  $h \in \mathfrak{F}_\rho$ . В обозначениях теоремы 1 множество  $\mathbf{I}_h$  назовем  $\rho$ -листной в окрестности  $\lambda_\infty$  вогнутой диаграммой, ассоциированной с  $h$ . В частности, если  $h$  – кусочно тригонометрическая функция, то ассоциированное с ней множество  $\mathbf{I}_h$  назовем  $\rho$ -листной в окрестности  $\lambda_\infty$  вогнутым многоугольником. Если  $h$  – индикатор целой функции  $f$  порядка  $\rho \neq 1$  и нормального типа, тогда множество  $\mathbf{I}_h$  назовем  $\rho$ -листной в окрестности  $\lambda_\infty$  индикаторной диаграммой  $f$  (ср. с определением индикаторной диаграммы Бернштейна в 1.2).

**Замечание 1.** Простейшим примером (бесконечнолистного) вогнутого многообразия является многообразие  $\mathbf{E}_R$ , ассоциированное с функцией  $h_R(\theta) \equiv R$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ , где  $R > 0$ . Если  $R$  – радиус расходимости ряда  $F$  (11), то множество  $\mathbf{E}_R \setminus \{\lambda_\infty\}$  можно рассматривать как его область сходимости. Но, как отмечено выше,  $F(r, \varphi) = F(r, \varphi + 2\pi\rho)$  для любых  $r > R$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Поэтому можно считать, что ряд  $F$  задан на множестве  $\mathbf{I}_R \setminus \{\lambda_\infty\}$ , где  $\mathbf{I}_R$  –  $\rho$ -листная в окрестности  $\lambda_\infty$  вогнутая диаграмма, ассоциированная с  $h_R$ : угол  $L_R$  (см. теорему 1) является топологической моделью для  $\mathbf{I}_R$ . Если  $R = \max\{h(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$ , где  $h \in \mathfrak{F}_\rho$ , то

$\mathbf{I}_R \subset \mathbf{I}_h$ . Здесь  $\mathbf{I}_h$  –  $\rho$ -листная в окрестности  $\lambda_\infty$  вогнутая диаграмма, ассоциированная с  $h$ .

**Замечание 2.** При  $\rho \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  в упомянутых обозначениях получаем:  $\varphi_h[B(p, \theta + 2k\pi)] = p$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ , для любого  $k \in \mathbb{Z}$ . Поэтому диаграмма  $\mathbf{I}_h$  в определении 1 допускает представление

$$\mathbf{I}_h = \{\lambda_\infty\} \cup \bigcup U(e^{i\theta}) | \theta \in \mathbb{R},$$

где  $U_h(e^{i\theta}) = \{(p, e^{i\theta}) : p \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} p \{e^{i\theta}\}^\rho > h(\theta)\}$  ( $h$  –  $2\pi$ -периодическая функция). Определим проекцию

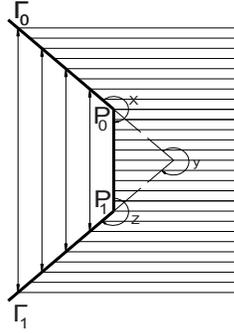


Рис. 6.  $\rho$ -листный вогнутый многоугольник, ассоциированный с  $h$ .

$$\tilde{\varphi}_h : \mathbf{I}_h \rightarrow S; \quad \tilde{\varphi}_h[(p, e^{i\theta})] = p, \quad (p, e^{i\theta}) \in U_h(e^{i\theta}); \quad \tilde{\varphi}_h(\lambda_\infty) = \infty.$$

Тогда (см. (13))  $\tilde{\varphi}_h : U_h(e^{i\theta}) \rightarrow \Pi_h(\theta)$  – конформный гомеоморфизм при любом  $\theta \in (-\pi, \pi]$ .

По аналогии со случаем кусочно-тригонометрической функции (см. [3], определение 4.2.7) при  $\rho \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  *вогнутой диаграммой, ассоциированной с  $h \in \mathfrak{F}_\rho$* , назовем и пару  $(\tilde{\varphi}_h, \mathbf{I}_h)$ . Существует многочлен Лорана  $\alpha_h$  степени  $\rho$  такой, что пара  $(\tilde{\varphi}_h, \mathbf{I}_h)$  допускает гомеоморфное и послонное вложение в накрытие  $\Phi_\alpha : \mathfrak{R}(\alpha_h^{-1}) \rightarrow S$ , где  $\mathfrak{R}(\alpha_h^{-1})$  – риманова поверхность обращения многочлена  $\alpha_h$  (см. [3], теорема 4.3.3).

**Пример 2** ([3], пример 4.2.12', D). Приведем пример вогнутого многоугольника. Пусть  $h$  – кусочно-тригонометрическая функция:

$$h(\theta) = \cos \rho(\theta + \pi - 2\pi j), \quad \theta \in [2\pi(j-1), 2\pi j], \quad j \in \mathbb{Z},$$

где  $\rho \in (1/2, 1)$ . Согласно предложению 4.1.1 в [3],  $h \in \mathfrak{F}_\rho$ . Топологическая модель  $\rho$ -листного в окрестности  $\lambda_\infty$  вогнутого многоугольника  $\mathbf{I}_h$ , ассоциированного с  $h$ , изображена на рис. 6. Здесь  $y = 2\pi\rho$ ;  $x + z = \pi(1 + 2\rho)$ ;  $P_0 = e^{i\pi\rho}$ ;  $P_1 = e^{i\pi\rho}$ . Лучи  $\Gamma_0, \Gamma_1$  с вершинами в точках  $P_0, P_1$ , соответственно, отождествляются в точках, равноудаленных от 0 в  $\mathbb{C}$ .

**3.2. Неоднолистная сопряженная диаграмма целой функции порядка  $\rho > 1/2$ ,  $\rho \neq 1$  и нормального типа.** Нам потребуется понятие объединения вогнутых диаграмм (см. определение 1). Проиллюстрируем это понятие на примере двух диаграмм.

Пусть  $\mathbf{I}_h, \mathbf{I}_l$  – вогнутые диаграммы, ассоциированные, соответственно, с функциями  $\{h, l\} \subset \mathfrak{F}_\rho$ . Пусть  $r \in \mathfrak{F}_\rho$  – наибольшая функция, удовлетворяющая неравенству

$$r(\theta) \leq \min\{h(\theta), l(\theta)\}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

В [10] установлены условия существования функции  $r$  с помощью модификации понятия *инфимальной конволюции* выпуклых функций в  $\mathbb{R}^n$ , см. [6], гл. 1, § 5. *Объединением вогнутых диаграмм*  $\mathbf{I}_h$  и  $\mathbf{I}_l$  назовем вогнутую диаграмму  $\mathbf{I}_r$ , ассоциированную с  $r$ , т.е.  $\mathbf{I}_h \cup \mathbf{I}_l := \mathbf{I}_r$  (см. [10], определение 5).

Такое определение этого понятия дано по аналогии со случаем  $\rho = 1$ . Тогда, в обозначениях формулы (6),  $\mathbf{I}_h, \mathbf{I}_l$  и  $I := \mathbf{I}_h \cup \mathbf{I}_l$  – открытые вогнутые подмножества в  $S = \overline{\mathbb{C}}$  (см. 1.2). Допустим  $I \neq S$ . Заметим, что  $\infty \in \mathbf{I}_h \cap \mathbf{I}_l$ . Поэтому  $K_h = \mathbb{C} \setminus \mathbf{I}_h$ ,  $K_l = \mathbb{C} \setminus \mathbf{I}_l$  и  $K = \mathbb{C} \setminus I$  – выпуклые компакты в  $\mathbb{C}$ , причем  $K = K_h \cap K_l$ . Тогда “опорная” функция  $r(\theta) := \sup\{\operatorname{Re} p e^{i\theta} : p \in K\}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ , компакта  $K$  – искомая функция, так как  $r \in \mathfrak{F}_1$  и  $\mathbf{I}_r = I$  (см. следствие 16.4.1 в [6]).

Пусть  $\mathcal{I}(F)$  – класс вогнутых диаграмм,  $\rho$ -листных в окрестности  $\lambda_\infty$ , со свойством: ряд Пуанкаре функции  $F$  (11) аналитически продолжается в каждую диаграмму этого множества. Заметим, что в обозначениях замечания 1 к определению 1 диаграмма  $\mathbf{I}_R$  принадлежит классу  $\mathcal{I}(F)$ , т.е.  $\mathcal{I}(F) \neq \emptyset$ . Определим ряд для  $F$  в точке ветвления  $\lambda_\infty$  по непрерывности:  $F(\lambda_\infty) = 0$ .

**Определение 2** ([10], определение 6). *Сопряженной диаграммой целой функции  $f$  (12) порядка  $\rho > 1/2$ ,  $\rho \neq 1$ , и нормального типа, ассоциированной с рядом функции  $F$  (11), называется наибольшая вогнутая диаграмма  $\mathbf{I}_F \in \mathcal{I}(F)$  – объединение всех элементов множества  $\mathcal{I}(F)$ .*

**3.3. Основная теорема.** Справедлив следующий аналог теоремы Поля (см. 1.2, теорема В<sub>2</sub>).

**Теорема 2** ([10], теорема 3). Пусть  $h = h_f$  – индикатор целой функции  $f$  (12) порядка  $\rho > 1/2$ ,  $\rho \neq 1$ , и нормального типа, ассоциированной с рядом Пуанкаре для  $F$  (11). Тогда ее  $\rho$ -листная в окрестности  $\lambda_\infty$  индикаторная и сопряженная диаграммы совпадают, т. е.  $\mathbf{I}_h = I_F$  (см. определения 1, 2). Кроме того, семейство преобразований Лапласа

$$F_\theta(p) = \rho \int_0^{\infty(\text{Arg } z=\theta)} f(z) e^{-pz^\rho} dz, \quad (p, \theta) \in \Pi_h(\theta), \quad |z|=t, \quad t>0, \quad z^\rho = t^\rho e^{i\rho\theta}, \quad (14)$$

функции  $f$ , параметризованное по параметру  $\theta \in (-\pi, \pi]$ , определяет аналитическое продолжение  $\mathcal{F}$  ряда  $F$  в  $\mathbf{I}_h$  (см. (13)).

#### 3.4. $\rho$ -листный многоугольник Бореля ряда Пуанкаре–Тейлора.

Результаты раздела 2 для степенных рядов обобщим на случай многозначных рядов Пуанкаре.

Пусть  $\rho \neq 1$ ,  $\rho > 1/2$ . Рассмотрим сходящийся в окрестности точки  $|q| = 0$  “правильный” ряд Пуанкаре (ср. (11))

$$L(q) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k q^{(k+1)/\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \exp\{(k+1)(\ln t + i\psi)/\rho\}, \quad (15)$$

где  $t = |q| < T$ ,  $\psi = \text{Arg } q \in \mathbb{R}$ , а  $T < \infty$  – его радиус сходимости. Как и в случае ряда (11), ассоциируем с каждым рядом вида (15) целую функцию  $f$  (12) порядка  $\rho$  и нормального типа. По аналогии со случаем степенного ряда, геометрическую конструкцию “неоднолистного многоугольника Бореля” этого ряда найдем, опираясь на конструкцию  $\rho$ -листной в окрестности  $\lambda_\infty$  индикаторной диаграммы функции  $f$  (см. раздел 2 и определение 1).

В обозначениях формул (11) и (15), при отображении

$$p = (r, \varphi) = 1/q = (1/t, -\psi), \quad t < T = R^{-1}, \quad \psi \in \mathbb{R}, \quad (16)$$

ряд Пуанкаре (11) преобразуется в “правильный” ряд Пуанкаре (15)

$$L(q) \equiv F(1/q), \quad q = (t, \psi) \in (0, T) \times \mathbb{R}.$$

Пусть  $h \in \mathfrak{F}_\rho$ . При отображении  $\mathcal{K}$  вида (16), полуплоскость  $\Pi_h(\theta)$  (13) трансформируется в круговое множество

$$K_h(\theta) = \{(q, \theta) : q \in S; 1/q \in \Pi_h(\theta)\}, \quad (17)$$

для любого  $\theta \in \mathbb{R}$  (см. раздел 2, рис. 4). Заметим, что  $0 \in \partial K_h(\theta)$  при всех  $\theta \in \mathbb{R}$ . Если  $\theta \in \mathbb{R}$  – параметр движения, тогда многолистная поверхность  $K_h$  образуется при вращении множества  $K_h(\theta)$  вокруг точки  $0 \in \mathbb{C}$ .

По аналогии с рассуждениями в **3.1**, определим “круговое многообразие”

$$\mathbf{K}_h = \{\Theta_0\} \cup K_h, \quad K_h = \bigcup K_h(\theta) | \theta \in \mathbb{R},$$

где  $\Theta_0$  – логарифмическая точка ветвления. Далее доопределим упомянутое отображение  $\mathcal{K}$  (см. (16)–(17)) условием

$$\mathcal{K}(\lambda_\infty) = \Theta_0, \quad \mathcal{K}^{-1}(\Theta_0) = \lambda_\infty.$$

Но

$$\mathcal{K} : \mathbf{E}_h \rightarrow \mathbf{K}_h \quad (18)$$

– взаимно-однозначное отображение. Оно индуцирует топологию и комплексную структуру в  $\mathbf{K}_h$  из  $\mathbf{E}_h$ . Тогда  $\Theta_0$  – точка ветвления в множестве  $\mathbf{K}_h$  по отношению к проекции (см. (17) и **3.1**)

$$\psi_h : \mathbf{K}_h \rightarrow S, \quad \psi_h(q, \theta) = q; \quad \psi_h(\Theta_0) = 0.$$

Пару  $(\psi_h, \mathbf{K}_h)$  назовем *круговым многообразием*, ассоциированным с  $h \in \mathfrak{F}_\rho$ .

Циклическая группа автоморфизмов  $G_E$ , действующая на  $\mathbf{E}_h$  (см. **3.1**), индуцирует подобную группу  $G_K$ , действующую на  $\mathbf{K}_h$ . Для структуры ее пространства орбит  $\Omega_h := \mathbf{K}_h/G_K$  справедливо утверждение, аналогичное теореме 1.

**Определение 3.** *Множество  $\Omega_h$  назовем  $\rho$ -листной в окрестности  $\Theta_0$  кругообразной диаграммой, ассоциированной с функцией  $h \in \mathfrak{F}_\rho$ . Если  $h$  – индикатор целой функции  $f$  порядка  $\rho \neq 1$  и нормального типа, тогда множество  $\Omega_h$  назовем круговым вариантом ее  $\rho$ -листной в окрестности  $\Theta_0$  индикаторной диаграммы.*

*Объединение кругообразных диаграмм определяется по аналогии со случаем вогнутых диаграмм (см. **3.2**).*

**Предложение 2.** *Пусть  $\rho > 1/2, \rho \neq 1, h \in \mathfrak{F}_\rho$ , а  $\mathbf{I}_h, \Omega_h$  – вогнутая и круговая диаграммы, ассоциированные с  $h$ , соответственно. Фактор-отображение  $\hat{\mathcal{K}} : \mathbf{I}_h \setminus \{\lambda_\infty\} \rightarrow \Omega_h \setminus \{\Theta_0\}$  для отображения  $\mathcal{K}$  (18) – конформный гомеоморфизм<sup>8</sup>.*

<sup>8</sup>См., например, предложение А.1.9 в [3]

Перейдем к рассмотрению метода суммирования ряда  $L$  (15) по аналогии со случаем степенного ряда (см. следствие 1). Определим  $L$  в точке ветвления по непрерывности  $L(\Theta_0) = 0$ . Пусть  $\mathcal{O}(L)$  – класс круговых диаграмм,  $\rho$ -листных в окрестности  $\Theta_0$  и обладающих свойством: ряд  $L$  аналитически продолжается в каждую из диаграмм этого множества.

**Определение 4** ([10], определение 7). *Круговую диаграмму (см. определение 3)  $\Omega_L \in \mathcal{O}(L)$  назовем  $\rho$ -лиственным многоугольником Бореля ряда  $L$  (15), если  $\Omega_L$  – наибольший элемент класса  $\mathcal{O}(L)$ , т.е. объединение всех элементов этого класса.*

Из теоремы 2 и предложения 2 выводим следующий многолиственный вариант следствия 1.

**Следствие 2** ([10], следствие 2). *Пусть  $h$  – индикатор целой функции  $f$  (12) порядка  $\rho > 1/2$ ,  $\rho \neq 1$ , и нормального типа, ассоциированной с рядом  $L$  (15). Тогда в обозначениях определений 3, 4 круговой вариант  $\Omega_h$   $\rho$ -листной в окрестности  $\Theta_0$  индикаторной диаграммы функции  $f$  совпадает с  $\rho$ -лиственным многоугольником Бореля  $\Omega_L$  ряда  $L$ . Кроме того, семейство преобразований Лапласа (см. (14), (17))*

$$L_\theta(q) := F_\theta(1/q), \quad (q, \theta) \in K_h(\theta), \quad \theta \in (-\pi, \pi]$$

*определяет аналитическое продолжение ряда  $L$  в  $\Omega_h$ .*

#### 4. ПРИЛОЖЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ РАЗДЕЛА 3

**4.1. Локальные обращения рациональных функций.** Простейшим примером многозначной функции является обращение рациональной функции, отличной от дробно-линейной функции. Напомним несколько фактов о структуре римановой поверхности  $\mathfrak{R}(r^{-1})$  обращения  $r^{-1}$  рациональной функции  $r$  (см., например, [11], гл. 1).

Как известно,  $\mathfrak{R}(r^{-1}) = H \cup K$ , где  $H, K$  – множества так называемых регулярных и особых функциональных элементов, соответственно. Пусть  $D = \{z \in \mathbb{C} : r'(z) = 0\}$ , где  $r'$  – производная от  $r$ . Тогда  $H = \{(p, f_z) : p \in \mathbb{C}; z \in \mathbb{C} \setminus D; r(z) = p\}$ . Здесь  $f_z$  – росток в точке  $p$  голоморфной функции  $f_z$ , заданной в круговой окрестности  $V_z$  этой точки и удовлетворяющей соотношению

$$f_z(p) = z; \quad r \circ f_z(q) = q; \quad f'_z(q) \neq 0, \quad q \in V_z,$$

причем  $f_z$  – единственная голоморфная функция, определяющая локальное обращение функции  $r$ .

Пусть множество

$$K = \{(p, f_z) : z \in r^{-1}(\infty) \cup D, p = r(z)\}$$

– совокупность особых элементов множества  $\mathfrak{R}(r^{-1})$ . Предположим, что  $r$  имеет полюс кратности  $\rho$  в точке  $\zeta \in \mathbb{C}$ . Тогда второй элемент  $f_\zeta$  пары  $(\infty, f_\zeta) \in K$  – росток в точке  $0 \in \mathbb{C}$  голоморфной функции  $z = f_\zeta(t)$ , заданной в круговой окрестности  $S_\zeta$  начала координат. Кроме того,

$$f_\zeta(0) = \zeta; \quad p = r \circ f_\zeta(t) = t^{-\rho}; \quad f_\zeta(t) = \zeta + \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1}, \quad t \in S_\zeta, \quad (19)$$

где  $c_0 \neq 0$ , т.е.  $f'_\zeta(0) \neq 0$ . Поэтому в окрестности точки  $p = \infty$  при  $p^{-1/\rho} \in S_\zeta$  справедливо следующее равенство:

$$z = F_\zeta(p) := f_\zeta(p^{-1/\rho}), \quad F_\zeta(\infty) = \zeta,$$

где  $F_\zeta$  – ряд Пуанкаре вида (11),<sup>9</sup> представляющий локальное  $\rho$ -значное обращение отображения  $r$  в окрестности точки  $(\zeta, \infty)$ . Т. е. униформизация множества  $\{(z, p) \in S \times S : r(z) - p = 0\}$  в окрестности точки  $(\zeta, \infty)$  имеет вид:  $z = f_\zeta(t)$ ,  $p = t^{-\rho}$ , где  $t \in S_\zeta$ . Здесь  $S = \overline{\mathbb{C}}$  – сфера Римана.

Допустим, что  $r$  имеет полюс кратности  $n$  в точке  $\infty \in S$ . Вторым элементом  $f_\infty$  пары  $(\infty, f_\infty) \in K$  – росток в нуле мероморфной функции  $f_\infty(t)$ , голоморфной в некоторой выколотой круговой окрестности нуля и имеющей полюс кратности 1 в 0. Дадим описание конструкции ростка  $f_\infty$ .

Рассмотрим рациональную функцию  $p = g(u) := r(1/u)$ ,  $u \in S$ . Очевидно,  $g$  имеет полюс кратности  $n$  в точке  $0 \in \mathbb{C}$ . Пусть  $(\infty, g_0) \in \mathfrak{R}(g^{-1})$ , где  $\mathfrak{R}(g^{-1})$  – риманова поверхность обращения  $g^{-1}$  рациональной функции  $g$ , а  $g_0$  – росток в нуле голоморфной функции  $g_0(t)$ , определенной в окрестности нуля и такой что  $g_0(0) = 0$ ,  $g'_0(0) \neq 0$ . Аналогичными рассуждениями (см. (19)) заключаем о существовании круговой окрестности  $S_\infty$  точки 0 со свойствами:

$$p = r \circ f_\infty(t) \equiv t^{-n}, \quad t \in S_\infty; \quad f_\infty(t) = [g_0(t)]^{-1}, \quad t \in S_\infty,$$

<sup>9</sup>При  $\rho = 1$  это ряд Лорана.

причем из свойств функции  $g_0$  находим:  $\lim_{t \rightarrow 0} t f_\infty(t) \neq 0$ . Тогда функция

$$z = F_\infty(p) := f_\infty(p^{-1/n}), \quad F_\infty(\infty) = \infty$$

– локальное  $n$ -значное обращение функции  $r$  в окрестности точки  $(\infty, \infty)$ .

Пусть в упомянутых обозначениях  $(v, f_u) \in K$ , где  $u \in D$ ;  $v = r(u)$ . Полагаем, что  $\nu > 1$  – кратность отображения  $r : S \rightarrow S$  в точке  $u$ . Формула  $z = f_u(t)$ ,  $p = v + t^\nu$ ,  $t \in S_u$ , представляет возможный способ локальной униформизации множества  $\{(z, p) \in S \times S : r(z) - p = 0\}$  в окрестности точки  $(u, v)$ . Здесь  $f_u(t)$  – голоморфная функция, заданная в некоторой круговой окрестности  $S_u$  точки  $0 \in \mathbb{C}$  и обладающая теми же свойствами, что и  $f_\zeta(t)$  (см. (19)). Функция

$$z = F_u(p) := f_u[(p - v)^{1/\nu}] = u + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (p - v)^{(k+1)/\nu} \quad (20)$$

– ряд Пуанкаре вида (15), локальное  $\nu$ -значное обращение функции  $r$  в окрестности точки  $(u, v)$ .

Теперь представим риманову поверхность  $\mathfrak{R}(r^{-1})$  обращения  $r^{-1}$  рациональной функции  $r$  в следующей форме, удобной для дальнейшего изложения:

$$\mathfrak{R}(r^{-1}) = \{(p, F_z) : z \in S; p = r(z)\}; \quad F_z := f_z, z \in \mathbb{C} \setminus D, \quad (21)$$

где второй элемент  $F_z$  пары  $(p, F_z)$  – локальное однозначное или многозначное обращение функции  $r$  в окрестности точки  $(z, p) \in S \times S$ ,  $p = r(z)$ . Для простоты изложения для любой пары  $(p, F_z)$  сохраним название “функциональный элемент”. Определим оператор обращения

$$\gamma_r : S \rightarrow \mathfrak{R}(r^{-1}), \quad \gamma_r(z) = (r(z), F_z), z \in S$$

и проекцию

$$\varphi_r : \mathfrak{R}(r^{-1}) \rightarrow S; \quad \varphi_r[(r(z), F_z)] = r(z), z \in S.$$

Эти отображения связаны между собой формулой  $\varphi_r \circ \gamma_r = r$ .

**4.2. Аналитические свойства обращений рациональных функций.** Изучим свойства областей аналитического продолжения рядов Пуанкаре вида (11) и (15), где  $\rho \in \mathbb{N}$ , представляющих локальные обращения рациональных функций, неоднозначные в общем случае (см. (21)). Характерная черта римановых поверхностей их обращений – наличие на каждой из них конечного числа точек ветвления. Этот факт, теорема 2 и следствие 2 приводят к следующему утверждению.

**Теорема 3** ([10], теорема 4). Пусть  $p = r(z)$  рациональная функция (отличная от степенной и дробно-линейной) с полюсом  $z = 0$  кратности  $\rho \in \mathbb{N}$ . Введем обозначение  $\lambda_r := (\infty, F_0)$  – функциональный элемент римановой поверхности  $\mathfrak{R}(r^{-1})$  обращения  $r$  (см (21)). Пусть  $F(p) := F_0(p)$  – ряд Пюизе вида (11), представляющий локальное  $\rho$ -значное обращение функции  $r$  в окрестности точки  $p = \infty$ . Пусть  $h$  – индикатор целой функции  $f$  (12) порядка  $\rho$  и нормального типа, ассоциированной с рядом  $F$ .

1. Сопряженная диаграмма  $I_F$  функции  $f$  совпадает с  $\rho$ -листным в окрестности  $\lambda_\infty$  вогнутым многоугольником  $\mathbf{I}_h$ , ассоциированным с  $h$  (см. определения 1, 2).

2. В обозначениях теоремы 2, аналитическое продолжение  $\mathcal{F}$  ряда  $F$  осуществляет конформное гомеоморфное вложение множества  $\mathbf{I}_h \setminus \{\lambda_\infty\}$  в  $\mathbb{C}$ , причем  $r \circ \mathcal{F} = \tilde{\varphi}_h$ , где  $\tilde{\varphi}_h : \mathbf{I}_h \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  – проекция (см. замечание 2 к определению 1). Кроме того, отображение  $\mathcal{F}$  непрерывно продолжается вплоть до границы множества  $\mathbf{I}_h$ , переводя вершины многоугольника  $\mathbf{I}_h$  в точки разветвления накрытия  $r : S \rightarrow S$ . С подобными свойствами существует отображение  $\mathcal{G} : \mathbf{I}_h \rightarrow \mathfrak{R}(r^{-1})$ ,  $\mathcal{G}(\lambda_\infty) = \lambda_r$ .

Аналогичные утверждения справедливы, если задан функциональный элемент  $(v, F_u) \in \mathfrak{R}(r^{-1})$ ,  $r(u) = v$ , где в обозначениях формулы (20)  $L(q) := F_u(q + v) - u$  – ряд Пюизе вида (15).

**Пример 3** [10]. Для иллюстрации теоремы 3 найдем конструктивные формулы функциональных элементов римановой поверхности  $\mathfrak{R}(\alpha^{-1})$  обращения  $\alpha^{-1}$  многочлена Лорана с комплексными коэффициентами

$$p = \alpha(z) := z^\rho + a_1 z^{\rho-1} + \dots + a_n z^{\rho-n}, \quad a_n \neq 0, \quad \{\rho, n\} \subset \mathbb{N}, \quad (22)$$

где  $a_n \neq 0$ ,  $n \geq \rho$ .

1. Рассмотрим возможный способ локальной униформизации множества  $\{(z, p) \in S \times S : \alpha(z) - p = 0\}$  в окрестности точки  $(\infty, \infty)$ . Переходя к координатам  $z = 1/u$ ,  $p = 1/t^\rho$  и выбирая ветвь функции  $v^{1/\rho}$  со свойством  $1^{1/\rho} = 1$ , находим из (22):

$$t = G(u) := [\alpha(1/u)]^{-1/\rho} = u/[Q_n(u)]^{1/\rho}, \quad Q_n(u) = 1 + \sum_{j=1}^n a_j u^j.$$

Из формулы Лагранжа, учитывая условие  $G'(0) = 1$ , получим разложение в ряд Тейлора в окрестности  $t = 0$  обращения  $G^{-1}$  функции  $G$ :

$$u = G^{-1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1}, \quad c_k = \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^k}{d\zeta^k} \left\{ [\chi(\zeta)]^{k+1} \right\}_{|\zeta=0},$$

где  $\chi(\zeta) := \zeta/G(\zeta) = [Q_n(\zeta)]^{1/\rho}$ . Опираясь на формулу Бруно для производных сложной функции [12], вычислим значения коэффициентов  $\{c_k\}$ , называемых *полиномами Белла*:

$$c_0 = 1; \quad c_k = \frac{\Upsilon_k}{k+1}, \quad \Upsilon_k = \sum_{(m,s) \in \Xi_k} \frac{\prod_{l=0}^{m-1} [(k+1)/\rho - l]}{s_1! \cdots s_n!} a_1^{s_1} \cdots a_n^{s_n}, \quad (23)$$

для любого  $k \in \mathbb{N}$ , где

$$\Xi_k = \{(m, s) : m \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq \min\{k, n\}; s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{Z}_+^n,$$

$$\sum_{j=1}^n s_j = m, \sum_{j=1}^n j s_j = k\}; \quad \mathbb{Z}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}; \quad 0^0 = 1.$$

Тогда  $u = F_0(p) := G^{-1}(p^{-1/\rho})$  – ряд Пуизе вида (11), представляющий локальное  $\rho$ -значное обращение рациональной функции  $r(u) := \alpha(1/u)$ ,  $u \in S$ , в окрестности точки  $p = \infty$ . Кроме того,  $(\infty, F_0) \in \mathfrak{R}(r^{-1})$  (см. 4.1).

Допустим, что у ряда  $u = F_0(p)$  радиус расходимости  $R$  строго положителен. Ассоциируем с рядом  $F_0$  следующую целую функцию порядка  $\rho$  и нормального типа (см. (12), (23)):

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k, \quad d_0 = \frac{c_0}{\Gamma(1/\rho)}, \quad d_k = \frac{c_k}{\Gamma[(k+1)/\rho]} = \frac{\Upsilon_k}{\rho \Gamma\left(\frac{k+1}{\rho} + 1\right)}$$

для каждого  $k \in \mathbb{N}$ . Пусть  $h$  ее индикатор. По теореме 3, ряд  $F_0$  допускает конформное продолжение  $\mathcal{F}_r$  в  $\mathbf{I}_h$ , непрерывное вплоть до границы  $\partial \mathbf{I}_h$ . Здесь  $\mathbf{I}_h$  –  $\rho$ -листный в окрестности  $\lambda_\infty$  вогнутый многоугольник, ассоциированный с  $h$ . Полагаем  $D_h = [\mathbf{I}_h \cup \partial \mathbf{I}_h]$ . Заметим, что

$$\mathcal{F}_r(\lambda_\infty) = 0; \quad \mathcal{F}_r(m) \neq 0, \quad m \in D_h \setminus \{\lambda_\infty\}.$$

Следовательно, функция  $\mathcal{F}_\alpha(m) := 1/\mathcal{F}_r(m) < \infty$ ,  $m \in D_h \setminus \{\lambda_\infty\}$ , имеет те же аналитические свойства, что и  $\mathcal{F}_r$ . Но эта функция – локальное  $\rho$ -значное обращение функции  $\alpha$  со свойством  $F_\infty(\infty) = \infty$ , и  $(\infty, F_\infty) \in \mathfrak{R}(\alpha^{-1})$  (см. (21)).

#### 4.3. Представление решений алгебраических уравнений.

В 1921 г. Меллин [13] нашел интегральное представление и разложение в кратный степенной ряд решения  $y(x) = y(x_1, \dots, x_{n-1})$  уравнения

$$y^n + x_1 y^{n-1} + \dots + x_{n-1} y - 1 = 0$$

в окрестности начала координат  $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ , удовлетворяющего условию  $y(0) = 1$ . О дальнейшем развитии результатов Меллина см. [14]. Теорема 3 и следствие 2 позволяют найти новый подход к решению алгебраического уравнения, который существенно отличается от известных способов его решения.

Рассмотрим алгебраическое уравнение  $\{z \in \mathbb{C} : \alpha(z) = 0\}$ , где  $\alpha = P_n$  – многочлен степени  $n$  вида (22) при  $\rho = n$ , причем  $P_n(0) = a_n \neq 0$ . Проблема определения этих решений эквивалентна проблеме нахождения многозначной обратной функции  $\alpha_n^{-1}$  для многочлена  $p = \alpha_n(z)$ , где  $\alpha_n(z) := P_n(z) - a_n$ . Предположим, что число различных корней уравнения  $\{z \in \mathbb{C} : P'_n(z) = 0\}$  равно  $k \geq 2$ , где  $P'_n$  – производная функции  $P_n$ . Рассмотрим уравнение  $\alpha_n(z) - p = 0$ .

**Теорема 4** ([10], теорема 5). Пусть в этих обозначениях  $r_n(u) = \alpha_n(1/u)$ ,  $u \in S$ ,  $a(\infty, F_0)$ , где  $F_0(\infty) = 0$ , – функциональный элемент римановой поверхности  $\mathfrak{R}(r_n^{-1})$  обращения  $r_n^{-1}$  многочлена Лорана  $r_n$ . Пусть  $F_0(p)$ ,  $|p| > R$ , – ряд Пюизе вида (11) или (11\*), представляющий локальное  $n$ -значное обращение функции  $r_n$  в окрестности точки  $p = \infty$ . Пусть  $h$  – индикатор целой функции  $f$  порядка  $n$  и нормального типа, ассоциированной с рядом  $F_0$  (см. (12)). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если  $|a_n| > R$ , то  $z = 1/F_0(-a_n)$  – семейство всех решений уравнения  $P_n(z) = 0$ . Здесь в обозначениях примера 3

$$u = F_0(p) = f_0(p^{-1/n}); \quad f_0(t) := G^{-1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1},$$

где  $G^{-1}$  – обращение функции

$$t = G(u) := [r_n(u)]^{-1/n} = u/[Q_{n-1}(u)]^{1/n}, \quad Q_{n-1}(u) = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j u^j$$

в окрестности точки  $t = 0$ . Кроме того, коэффициенты ряда  $F_0$  (ср. (23)) таковы:

$$c_0 = 1; \quad c_k = \sum_{(m,s) \in \Xi_k} \frac{\prod_{l=0}^{m-1} [(k+1)/n - l]}{s_1! \cdots s_{n-1}!(k+1)} a_1^{s_1} \cdots a_{n-1}^{s_{n-1}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

где число  $n$  в  $\Xi_k$  заменяется на  $n - 1$ .

2. Если существует  $\theta \in \mathbb{R}$  со свойством (см. (13)–(14) при  $\rho = n$ )  $-a_n \in \Pi_h(\theta)$ ,<sup>10</sup> то  $z = 1/F_\theta(-a_n)$  – решение уравнения  $P_n(z) = 0$ . Здесь

$$F_\theta(p) = n \int_0^{\infty(\text{Arg } z=\theta)} f(z) e^{-pz^n} dz, \quad p \in \Pi_h(\theta).$$

Подобные утверждения верны, если задан любой фиксированный элемент  $(v, F_u(p)) \in \mathfrak{R}(r_n^{-1})$ ,  $u, v \in \mathbb{C}$  вида (20).

Я весьма признателен М. Л. Содину за полезное обсуждение рукописи этой работы. Считаю своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность Н. Н. Тарханову за ряд ценных замечаний. Автор благодарен также М. Н. Завьялову за техническую помощь в наборе рисунков – графических иллюстраций содержания статьи.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. Pólya, *Untersuchungen über Lücken and Singularitäten von Potenzreihen*. — Math. Zeits **Bd. 29** (1929), 549-640.
2. B. Ya. Levin, *Lectures on Entire Functions*. Translations of Mathematical Monographs, **150**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1996.
3. L. S. Maergoiz, *Asymptotic Characteristics of Entire Functions and Their Applications in Mathematics and Biophysics*, Second edition (revised and enlarged). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 2003.  
Л. С. Маергойз, *Асимптотические характеристики целых функций и их приложения в математике и биофизике*, Новосибирск, Наука, Сиб. Отделение, 1991.
4. E. Borel, *Leçons sur les Séries Divergentes*. Paris: Gaunter-Villars, 1901. The second edition, Paris, 1928.

<sup>10</sup>Возможно, существует не одно такое значение параметра  $\theta$ .

5. V. Bernstein, *Sulle proprietà caratteristiche delle indicatrici di crescita delle trascendenti intere d'ordine finito*. — *Memoire della classe di scien. fis. mat. e natur.* **6** (1936), 131–189.
6. R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.
7. L. S. Maergoiz, *Ways of Analytic Continuation of Many-Valued Function of One Variable. Applications*. — In: International conference "COMPLEX ANALYSIS AND ITS APPLICATIONS" dedicated to the 90th birth anniversary of I.P. Mityuk, (Abstracts), Gelendzhik — Krasnodar, Russia, 2018, 75.
8. L. S. Maergoiz, *Analytic continuation methods for multivalued functions of one variable and their application to the solution of algebraic equations*. — In: *28th St. Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis*, (Abstracts), Euler International Mathematical Institute, 2019, 17.
9. Л. С. Маергойз, *Многолистные варианты теорем Поля–Бернштейна, Бореля для целых функций порядка  $\rho \neq 1$  и их приложения*. — *Доклады РАН* **478**, No. 3 (2018), 266–270.
10. Л. С. Маергойз, *Способы аналитического продолжения многозначных функций одной переменной. Приложение к решению алгебраических уравнений*. — *Труды Инст. матем. и мех. Ур.О РАН* **25**, 1 (2019), 120–135.
11. R. Nevanlinna, *Uniformisierung*, Berlin, 1953.
12. J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1958.
13. H. J. Mellin, *Résolution de l'Équation Algébrique Générale à l'aide de la Fonction Gamma*. — *C. R. Acad. Sci.* **172** (1921), 658–661.
14. Т. М. Садыков, А. К. Цих, *Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных*. М.: Наука, 2014.

Maergoiz L. S. The multivalent indicator and conjugate diagrams of an entire function of order  $\rho \neq 1$ . Application to solution of algebraic equations.

The paper gives a survey of recent advances in the growth theory of entire functions associated with a theorem of G. Pólya describing the relationship between the indicator and conjugate diagrams for entire functions of exponential type. We discuss several methods of analytic continuation of a multivalued function of one variable given on a part of its Riemann surface in the form of a Puiseux series generated by the power function  $z = w^{1/\rho}$ , where  $\rho > 1/2$ ,  $\rho \neq 1$ . We present a multivalent variant of the mentioned theorem of G. Pólya. The description is based on a geometrical construction of V. Bernstein for the multivalent indicator diagram of an entire function of order  $\rho \neq 1$  and of normal type. We extend the method of E. Borel, which allows one to find the region of summability for a “proper” Puiseux series (the multivalent Borel polygon). This result seems to be

new even in the case of power series. The theory applies to description of the domains of analytic continuation for Puiseux series representing the inverse functions for rational ones. As but one consequence we elaborate a new approach to solution of algebraic equations.

Федеральный исследовательский центр  
“Красноярский научный центр Сибирского  
отделения Российской академии наук”  
(ФИЦ КНЦ СО РАН), Академгородок 50,  
660036 Красноярск, Россия  
*E-mail:* [bear.lion@mail.ru](mailto:bear.lion@mail.ru)

Поступило 12 июля 2020 г.