Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 491, 2020 г.

Л. Н. Ихсанов

ТОЧНАЯ ОЦЕНКА ПРИБЛИЖЕНИЯ АБСТРАКТНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ТИПА КАНТОРОВИЧА ЧЕРЕЗ ВТОРОЙ МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Введение

Пусть $B[0,\,1]$ – пространство вещественнозначных, ограниченных, измеримых функций, снабжённое sup-нормой.

Вторым модулем непрерывности функции f из $B[0,\,1]$ с шагом h называется величина

$$\omega_2(f,\,h) = \sup_{|t|\leqslant h,\, x\pm t\in[0,\,1]} |f(x-t) - 2f(x) + f(x+t)|.$$

Обращаем внимание, что функции считаются определёнными в каждой точке.

Важную роль будут играть функции

$$e_0(t) = 1, \quad e_1(t) = t, \quad p_{n,\,j}(t) = C_n^j t^j (1-t)^{n-j}.$$

В серии статьей, собранных в книге [1], Р. Палтаня доказал следующую теорему об оценке равномерного приближения операторами Бернштейна.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f \in B[0,\,1]$ и оператор B_n определён формулой*

$$B_n(f)(x) = \sum_{j=0}^{n} p_{n,\,j}(x) f\left(\frac{j}{n}\right).$$

Тогда

$$\|B_n(f) - f\| \leqslant \omega_2\left(f,\, \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

причём это неравенство является точным для каждого n.

В работе [2] было установлено следующее обобщение теоремы 1.

Ключевые слова: операторы типа Канторовича, второй модуль непрерывности.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 18-11-00055).

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 60$, $f \in B[0,\,1]$ и оператор B_n определён формулой*

$$B_n(f)(x) = \sum_{j=0}^{n} p_{n,\,j}(x) F_j(f),$$

где F_j – такие функционалы над $B[0,\,1]$, что $F_j(e_0) = 1$, $F_j(e_1) = \frac{j}{n}$,

$$F_j(f) = \sum_{k=1}^{m_j} c_k \left(f\left(\frac{j}{n} - t_k\right) + f\left(\frac{j}{n} + t_k\right)\right) + \int\limits_0^{r_j} \varphi_j(t) \left(f\left(\frac{j}{n} - t\right) + f\left(\frac{j}{n} + t\right)\right) dt,$$

где

$$m_j \in \mathbb{N},\ c_1, \ldots, c_{m_j} \geqslant 0,\ t_1,\ \ldots,\ t_{m_j},$$
$$r_j \in \left[0,\ \frac{1}{3n}\right], \varphi_j \in L[0,\,1],\ \varphi_j \geqslant 0.$$

Тогда[1]

$$\|B_n(f) - f\| \leqslant \omega_2 \left(f,\ \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{17}{6} \max_{0 \leqslant j \leqslant n} r_j \right),$$

причём это неравенство является точным для каждого n.

Наша цель заключается в том, чтобы получить обобщение этой теоремы, не требующее явного выражения функционалов F_j, применимое для любого $n \in \mathbb{N}$. Прежде чем сформулировать основной результат этой работы, дадим несколько определений.

Под $\operatorname{supp} F$ – носителем функционала F – мы понимаем наименьшее по включению замкнутое множество со свойством

$$\operatorname{supp} F \cap \operatorname{supp} f = \emptyset \Rightarrow F(f) = 0 \quad \forall f \in B[0,\,1].$$

Через $r(F)$ обозначим наименьшее число r, такое что

$$\operatorname{supp}(F) \subset [F(e_1) - r,\ F(e_1) + r].$$

---

[1]В [2] заявлен шаг $h + \max_{0 \leqslant j \leqslant n} r_j$, но это опечатка, по доказательству основной теоремы получается, что шаг должен быть $h + \frac{7}{3} \max_{0 \leqslant j \leqslant n} r_j$, однако, к сожалению, и это ошибочно. Дело в том, что в утверждении леммы 4 в той работе участвует второй модуль с шагом $h + h_1$, однако по доказательству становится понятно, что его надо заменить на $\omega_2(f,\, h + \frac{3}{2} h_1)$, что увеличивает шаг в доказательстве основной теоремы.

Считая функции равными нулю вне промежутка $[0,\,1]$, определим операторы $T_\sigma,\,S_\sigma : B[0,\,1] \to B[0,\,1]$,

$$T_\sigma(f)(x) = f(x+\sigma), \quad S_\sigma(f)(x) = f(2\sigma - x).$$

Операторы T_σ и S_σ осуществляют сдвиг и симметрию значений функции f соответственно.

Через $\mathcal{F}$ будем обозначать множество линейных непрерывных положительных функционалов над $B[0,\,1]$ со свойствами

$$F(e_0) = 1, \tag{1}$$

$$r(F) \leqslant F(e_1) \leqslant 1 - r(F), \tag{2}$$

$$F(f) = F(S_{F(e_1)}(f)). \tag{3}$$

В этих условиях при

$$\sigma \in [r(F) - F(e_1), 1 - F(e_1) - r(F)] \quad \text{и} \quad f \in B[0,\,1],$$

имеет место соотношение

$$S_{F(e_1)}T_\sigma(f)(t) = S_{F(e_1)+\frac{\sigma}{2}}(f)(t) \quad \forall t \in \operatorname{supp} F,$$

откуда следует полезное свойство элементов множества $\mathcal{F}$: для любой функции $f \in B[0,\,1]$ справедливо равенство

$$F(T_\sigma(f)) = F(S_{F(e_1)+\frac{\sigma}{2}}(f)) \quad \forall \sigma \in [r(F) - F(e_1),\, 1 - F(e_1) - r(F)]. \tag{4}$$

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f \in B[0,\,1]$ и оператор B_n задан формулой*

$$B_n(f)(x) = \sum_{j=0}^{n} p_{n,\,j}(x) F_j(f),$$

где $F_j \in \mathcal{F}$, $F_j(e_1) = \frac{j}{n}$, а кроме того, если $n > 10$, то

$$R = \max_{j=0,\dots,n} r(F_j) < \min\left\{\frac{1}{n},\, \frac{1}{4\sqrt{n}}\right\}.$$

Тогда

$$\|B_n(f) - f\| \leqslant \omega_2\left(f,\, \frac{1}{\sqrt{n}} + h_n\right),$$

где

$$h_n = \begin{cases} 0, & n < 5, \\ \frac{n-2\sqrt{n}}{2n}, & 5 \leqslant n \leqslant 10, \\ \frac{2}{n} + \frac{3}{2}R, & 11 \leqslant n < 60, \\ \frac{5}{2}R, & n \geqslant 60. \end{cases}$$

причём это неравенство точно для каждого n.

Напоминаем, что использование для приближения конструкции $\sum\limits_{j=0}^{n} p_{n,\,j}F_j$, где F_j – положительные операторы, было предложено Канторовичем [3]. Историю вопроса можно посмотреть в [4].

Также отметим, что порядок шага $\frac{1}{\sqrt{n}}$ является оптимальным при оценке приближения линейными положительными операторами через второй модуль непрерывности. Подробности об этом также можно найти в [4].

Леммы

Лемма 1. *Пусть* $M > 0$, $f \in B[0,\,1]$,

$$F = \sum_{i \in \mathcal{I}} \gamma_i F_i,$$

где $\mathcal{I}$ *– конечный набор индексов,* $\gamma_i > 0$, F_i *– линейные функционалы над* $B[0,\,1]$, *причём* $F_i(e_0) = 1$, $y_i = F_i(e_1)$, *а точка* x, *определённая равенством*

$$F(e_1 - xe_0) = 0,$$

принадлежит отрезку $(0,\,1)$.

Пусть найдётся множество $Z \subset (0,\,1)$, *а для каждого* $z \in Z$ *непересекающиеся непустые наборы индексов* $I(z)$, $J(z) \subset \mathcal{I}$, *такие что*

$$y_i < z \leqslant y_j \quad \forall i \in I(z),\, \forall j \in J(z), \tag{5}$$

и выполнены следующие условия:

1) $x \in Z$, *причём* $I(x) \cup J(x) = \mathcal{I}$,

2) *для любого* $z \in Z$ *выполнено*

$$\sum_{i \in I(z)} \gamma_i (z - y_i) + \sum_{j \in J(z)} \gamma_j (z - y_j) \geqslant 0, \tag{6}$$

3) *для любого* $z \in Z$ *и для любого* $i \in I(z)$ *выполнено хотя бы одно из двух: или*

$$\left|\frac{y_j - z}{y_j - y_i} F_i(f) + \frac{z - y_i}{y_j - y_i} F_j(f) - f(z)\right| \leqslant M, \quad \forall j \in J(z), \tag{7}$$

или найдётся такая точка $z_i \in Z$*, что* $I(z_i)$*,* $J(z_i) \subset J(z)$ *и*

$$\left|\frac{y_j - z}{y_j - y_i} F_i(f) + \frac{z - y_i}{y_j - y_i} F_j(f) - f(z)\right| \leqslant M, \quad \forall j \in J(z) \setminus J(z_i), \tag{8}$$

$$\left|\frac{z - z_i}{z - y_i} F_i(f) + \frac{z_i - y_i}{z - y_i} f(z) - f(z_i)\right| \leqslant \frac{z_i - z}{z - y_i} M. \tag{9}$$

Тогда

$$|F(f) - F(e_0) f(x)| \leqslant F(e_0) M.$$

Доказательство. Пусть

$$\gamma = \sum_{i \in I(x)} \gamma_i (x - y_i) = \sum_{j \in J(x)} \gamma_j (y_j - x).$$

Последнее равенство следует из определения точки x и условия **1)**:

$$\begin{aligned} 0 = F(e_1 - x e_0) &= \sum_{i \in \mathcal{I}} \gamma_i (y_i - x) \\ &= \sum_{i \in I(x)} \gamma_i (y_i - x) - \sum_{i \in J(x)} \gamma_j (x - y_j). \end{aligned}$$

Мы будем пользоваться следующими тождествами, справедливость которых читатель установит без труда:

$$\sum_{i \in I(x)} \sum_{j \in J(x)} \frac{\gamma_i \gamma_j (y_j - y_i)}{\gamma} = \sum_{i \in I(x) \cup J(x)} \gamma_i = F(e_0), \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &F(f) - F(e_0) f(x) \\ &= \sum_{i \in I(x)} \sum_{j \in J(x)} \frac{\gamma_i \gamma_j (y_j - y_i)}{\gamma} \left(\frac{y_j - x}{y_j - y_i} F_i(f) + \frac{x - y_i}{y_j - y_i} F_j(f) - f(x) \right). \end{aligned} \tag{11}$$

Если для точки x и для каждого $i \in I(x)$ выполнено условие (7), то справедливость леммы следует из (10) и (11):

$$
\begin{aligned}
&|F(f) - f(x)F(e_0)| \\
&\leqslant \sum_{i\in I(x)} \sum_{j\in J(x)} \frac{\gamma_i\gamma_j(y_j - y_i)}{\gamma} \left| \frac{y_j - x}{y_j - y_i} F_i(f) + \frac{x - y_i}{y_j - y_i} F_j(f) - f(x) \right| \\
&\leqslant \left(\sum_{i\in I(x)} \sum_{j\in J(x)} \frac{\gamma_i\gamma_j(y_j - y_i)}{\gamma} \right) M = F(e_0)M.
\end{aligned}
$$

Перейдём к общему случаю.

Доказательство проведём индукцией по $m = |J(x)|$, где через $|\cdot|$ мы обозначаем мощность множества. Если $m = 1$ и $i \in I(x)$, то требования к точке z_i не могут выполниться, а значит, выполняется условие (7). В этом случае лемма уже доказана.

Пусть утверждение верно при $|J(x)| < m$, проверим, что оно верно при $|J(x)| = m$. Для этого достаточно показать, что для всех $i \in I(x)$ верно неравенство

$$
\begin{aligned}
&\left| \sum_{j\in J(x)} \frac{\gamma_i\gamma_j(y_j - y_i)}{\gamma} \left(\frac{y_j - x}{y_j - y_i} F_i(f) + \frac{x - y_i}{y_j - y_i} F_j(f) - f(x) \right) \right| \\
&\qquad\qquad\qquad \leqslant \left(\sum_{j\in J(x)} \frac{\gamma_i\gamma_j(y_j - y_i)}{\gamma} \right) M, \qquad (12)
\end{aligned}
$$

так как в этом случае получим

$$
\begin{aligned}
&|F(f) - f(x)F(e_0)| \\
&\leqslant \sum_{i\in I(x)} \left| \sum_{j\in J(x)} \frac{\gamma_i\gamma_j(y_j - y_i)}{\gamma} \left(\frac{y_j - x}{y_j - y_i} F_i(f) + \frac{x - y_i}{y_j - y_i} F_j(f) - f(x) \right) \right| \\
&\leqslant \left(\sum_{i\in I(x)} \sum_{j\in J(x)} \frac{\gamma_i\gamma_j(y_j - y_i)}{\gamma} \right) M = F(e_0)M.
\end{aligned}
$$

Пусть для некоторого $i \in I(x)$ не выполняется условие (7) для $z = x$ и x_i – точка со свойствами (8) и (9), причём $I(x_i)$, $J(x_i) \subset J(x)$.

Обозначим

$$\mu_i = \frac{\sum\limits_{j\in J(x_i)} \gamma_j(y_j - x_i)}{\sum\limits_{j\in I(x_i)} \gamma_j(x_i - y_j)},$$

$$H_i = \mu_i \sum_{j\in I(x_i)} \gamma_j F_j + \sum_{j\in J(x_i)} \gamma_j F_j,$$

$$P_i(t) = \frac{x-t}{x-y_i} F_i(f) + \frac{t-y_i}{x-y_i} f(x).$$

Сперва покажем, что

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j\in J(x)} \frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-y_i)}{\gamma}\left(\frac{y_j-x}{y_j-y_i}F_i(f)+\frac{x-y_i}{y_j-y_i}F_j(f)-f(x)\right)\right|\\ \leqslant \frac{\gamma_i}{\gamma}\left(\sum_{j\in J(x)\setminus J(x_i)}\gamma_j(y_j-y_i)-\mu_i\sum_{j\in I(x_i)}\gamma_j(y_j-y_i)+(x_i-x)\,H_i(e_0)\right)M\\ +\frac{\gamma_i(x-y_i)}{\gamma}|H_i(f)-f(x_i)H_i(e_0)|. \quad (13)\end{aligned}$$

Обращаем внимание, что в силу условия (5) и поскольку $I(x_i)$, $J(x_i) \neq \varnothing$, величина μ_i корректно определена и неотрицательна. Более того, из (6) следует, что $\mu_i \leqslant 1$.

Также отметим, что в силу свойств функционалов F_j верно равенство

$$F_j(f-P_i) = \frac{y_j-y_i}{x-y_i}\left(\frac{y_j-x}{y_j-y_i}F_i(f)+\frac{x-y_i}{y_j-y_i}F_j(f)-f(x)\right),$$

откуда с учётом условия (8) для $j \in J(x)\setminus J(x_i)$ получаем

$$|F_j(f-P_i)| \leqslant \frac{y_j-y_i}{x-y_i}M.$$

Имеем

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j\in J(x)} \frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-y_i)}{\gamma}\Big(\frac{y_j-x}{y_j-y_i}F_i(f)+\frac{x-y_i}{y_j-y_i}F_j(f)-f(x)\Big)\Big| \\
&\qquad\qquad = \Big|\sum_{j\in J(x)}\frac{\gamma_i\gamma_j(x-y_i)}{\gamma}F_j(f-P_i)\Big| \\
&\qquad\qquad \leqslant \sum_{j\in J(x)\setminus(J(x_i)\cup I(x_i))}\frac{\gamma_i\gamma_j(x-y_i)}{\gamma}\big|F_j(f-P_i)\big| \\
&\quad + (1-\mu_i)\sum_{j\in I(x_i)}\frac{\gamma_i\gamma_j(x-y_i)}{\gamma}\big|F_j(f-P_i)\big| + \frac{\gamma_i(x-y_i)}{\gamma}\big|H_i(f-P_i)\big| \\
&\leqslant \sum_{j\in J(x)\setminus(J(x_i)\cup I(x_i))}\frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-y_i)}{\gamma}M + (1-\mu_i)\sum_{j\in I(x_i)}\frac{\gamma_i\gamma_j(y_j-y_i)}{\gamma}M \\
&+\frac{\gamma_i(x-y_i)}{\gamma}\Big(\big|f(x_i)-P_i(x_i)\big|H_i(e_0)+\big|H_i(f-P_i)-(f(x_i)-P_i(x_i))H_i(e_0)\big|\Big) \\
&\qquad\qquad \leqslant \frac{\gamma_i}{\gamma}\Big(\sum_{j\in J(x)\setminus J(x_i)}\gamma_j(y_j-y_i)M - \mu_i\sum_{j\in I(x_i)}\gamma_j(y_j-y_i)M \\
&\qquad\qquad\qquad + (x-y_i)\big|f(x_i)-P_i(x_i)\big|H_i(e_0)\Big) \\
&\quad + \frac{\gamma_i(x-y_i)}{\gamma}\Big(\big|H_i(f)-f(x_i)H_i(e_0)\big| + \big|H_i(P_i)-P_i(x_i)H_i(e_0)\big|\Big) \\
&\qquad\qquad \leqslant \frac{\gamma_i}{\gamma}\Big(\sum_{j\in J(x)\setminus J(x_i)}\gamma_j(y_j-y_i) \\
&\quad - \mu_i\sum_{j\in I(x_i)}\gamma_j(y_j-y_i) + (x-y_i)\Big(\frac{x_i-y_i}{x-y_i}-1\Big)H_i(e_0)\Big)M \\
&\quad + \frac{\gamma_i(x-y_i)}{\gamma}\Big(\big|H_i(f)-f(x_i)H_i(e_0)\big| + \big|H_i(P_i)-P_i(x_i)H_i(e_0)\big|\Big),
\end{aligned}
$$

где в последнем неравенстве мы воспользовались тем, что точка x_i удовлетворяет соотношению (9). Для доказательства формулы (13) осталось заметить, что

$$H_i(e_1-x_ie_0)=0, \tag{14}$$

откуда следует, что $H_i(P)-P(x_i)H_i(e_0)=0$ для любого полинома P степени не выше первой.

Теперь проверим, что функционалы H_i удовлетворяют требованиям леммы при том же M, $\mathcal{I} = I(x_i) \cup J(x_i)$ и тех же функционалах F_j. Как видно из (14), роль точки x для оператора H_i играет точка x_i. Рассмотрим множество

$$Z_i = \{x_i\} \cup \{z \in Z \,|\, I(z),\, J(z) \subset J(x_i)\} \subset Z.$$

В качестве индексных множеств для $z \in Z_i$ сохраним $I(z)$ и $J(z)$. Ясно, что при этом выполнено условие **1)**. Путь $z \in Z_i$. Проверка условий **2)** и **3)** проводится элементарно в силу сохранения множеств $I(z)$ и $J(z)$ и коэффициентов γ_j при $j \in J(x_i)$. Отдельно поясним, что в случае $z = x_i$ условие (6) имеет вид

$$\mu_i \sum_{j\in I(x_i)} \gamma_j(x_i - y_j) + \sum_{j\in J(x_i)} \gamma_j(x_i - y_j) = H_i(xe_0 - e_1) = 0.$$

Таким образом, поскольку

$$|J(x_i)| < |J(x_i)| + |I(x_i)| \leqslant |J(x)| = m,$$

с учётом индукционного предположения формулу (13) можно переписать так:

$$\left| \sum_{j\in J(x)} \frac{\gamma_i\gamma_j(y_j - y_i)}{\gamma} \left(\frac{y_j - x}{y_j - y_i} F_i(f) + \frac{x - y_i}{y_j - y_i} F_j(f) - f(x) \right) \right|$$
$$\leqslant \frac{\gamma_i}{\gamma} \left(\sum_{j\in J(x)\setminus J(x_i)} \gamma_j(y_j - y_i) - \mu_i \sum_{j\in I(x_i)} \gamma_j(y_j - y_i) + (x_i - y_i)H_i(e_0) \right) M.$$

Для доказательства неравенства (12) осталось заметить, что

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in J(x)\setminus J(x_i)} \gamma_j(y_j - y_i) - \mu_i \sum_{j\in I(x_i)} \gamma_j(y_j - y_i) + (x_i - y_i)H_i(e_0) \\
&\qquad = \sum_{j\in J(x)\setminus J(x_i)} \gamma_j(y_j - y_i) - \mu_i \sum_{j\in I(x_i)} \gamma_j(y_j - y_i) \\
&\qquad\quad + \mu_i \sum_{j\in I(x_i)} \gamma_j(x_i - y_i) + \sum_{j\in J(x_i)} \gamma_j(x_i - y_i) \\
&= \sum_{j\in J(x)\setminus J(x_i)} \gamma_j(y_j - y_i) + \mu_i \sum_{j\in I(x_i)} \gamma_j(x_i - y_j) + \sum_{j\in J(x_i)} \gamma_j(x_i - y_i) \\
&= \sum_{j\in J(x)\setminus J(x_i)} \gamma_j(y_j - y_i) + \sum_{j\in J(x_i)} \gamma_j(y_j - x_i) + \sum_{j\in J(x_i)} \gamma_j(x_i - y_i)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j\in J(x)\setminus J(x_i)} \gamma_j(y_j - y_i) + \sum_{j\in J(x_i)} \gamma_j(y_j - y_i) = \sum_{j\in J(x)} \gamma_j(y_j - y_i),$$

и сослаться на (10). □

В доказательствах лемм 2 и 3 мы будем пользоваться хорошо известным фактом, что если $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, $x \in [a, b]$, $f \in B[0, 1]$, то

$$\left|\frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) - f(x)\right| \leqslant \omega_2\left(f, \frac{b-a}{2}\right), \tag{15}$$

и простым соображением, касающимся произвольного линейного положительного функционала F:

$$|F(f)| \leqslant F\left(\sup_{x\in\operatorname{supp} F} |f(x)|\right) = \sup_{x\in\operatorname{supp} F} |f(x)| F(e_0),$$

которое при $F \in \mathcal{F}$ даёт

$$|F(f)| \leqslant \sup_{x\in\operatorname{supp} F} |f(x)|. \tag{16}$$

Лемма 2. *Пусть $f \in B[0, 1]$, $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, $x \in [a, b]$, $F_a, F_b \in \mathcal{F}$, причём $F_a(e_1) = a$, $F_b(e_1) = b$. Тогда*

$$\left|\frac{b-x}{b-a}F_a(f) + \frac{x-a}{b-a}F_b(f) - f(x)\right| \leqslant \omega_2(f, h),$$

где

$$h = \max\left\{\frac{b-a}{2} + \frac{r(F_a)+r(F_b)}{2}, r(F_a), r(F_b)\right\}.$$

Доказательство. Обозначим

$$g(t) = \frac{b-t}{b-a}F_a(f) + \frac{t-a}{b-a}F_b(f) - f(t).$$

Поскольку

$$g(x) = \frac{b-x}{b-a}F_a(f) + \frac{x-a}{b-a}F_b(f) - f(x), \quad \omega_2(g, h) = \omega_2(f, h),$$

достаточно доказать, что для всех $x \in [a, b]$ верна оценка

$$|g(x)| \leqslant \omega_2(g, h).$$

Более того, поскольку мы можем при необходимости рассматривать вместо g функцию $-g$, ограничимся доказательством неравенства

$$g(x) \leqslant \omega_2(g, h)$$

для $x \in [a,\, b]$, для которых $g(x) > 0$.

Поскольку F_a и F_b – положительные функционалы и $F_a(g){=}F_b(g){=}0$, существуют точки $a^* \in \operatorname{supp} F_a$, $b^* \in \operatorname{supp} F_b$, такие что

$$g(a^*),\ g(b^*) \leqslant 0.$$

Если $x \in [a^*,\, b^*]$, то по (15)

$$g(x) - \frac{b^* - x}{b^* - a^*}\, g(a^*) - \frac{x - a^*}{b^* - a^*}\, g(b^*) \leqslant \omega_2\left(g,\, \frac{b^* - a^*}{2}\right),$$

откуда

$$\begin{aligned} g(x) &\leqslant \omega_2\left(g,\, \frac{b^* - a^*}{2}\right) + \frac{b^* - x}{b^* - a^*}\, g(a^*) + \frac{x - a^*}{b^* - a^*}\, g(b^*) \\ &\leqslant \omega_2\left(g,\, \frac{b^* - a^*}{2}\right) \leqslant \omega_2(g,\, h). \end{aligned}$$

Иначе верно хотя бы одно: или $x \in [a,\, a^*)$, или $x \in (b^*,\, b]$. Исследование обоих случаев проводится абсолютно одинаково, поэтому мы ограничимся первым.

Итак, имеем

$$F_a(g) = 0, \quad F_a(e_1) = a, \quad x \in [a,\, a^*) \subset [a,\, a + r(F_a)), \quad g(a^*) \leqslant 0,$$

покажем, что $g(x) \leqslant \omega_2(g,\, r(F_a)) \leqslant \omega_2(g,\, h)$.

Пусть $x = a$. Поскольку, с учётом формулы (3),

$$F_a(g) = F_a(S_a(g)) = \frac{F_a(g) + F_a(S_a(g))}{2},$$

ввиду (16) получаем

$$\begin{aligned} g(a) &= g(a) - F_a(g) = F_a(g(a)e_0) - F_a(g) \\ &= F(g(a)e_0) - \frac{F_a(g) + F_a(S_a(g))}{2} = \frac{1}{2} F(-g + 2g(a)e_0 - S_a(g)) \\ &\leqslant \frac{1}{2} \sup_{t \in \operatorname{supp} F} |-g(t) + 2g(a) - g(2a - t)| \leqslant \frac{1}{2}\omega_2(g,\, r(F_a)). \end{aligned} \tag{17}$$

Если $x \neq a$, предположим, что $g(x) - \omega_2(g,\, r(F_a)) > 0$. Пусть $s \in (x,\, a + r(F_a)]$, а $t \in [a - r(F_a),\, s)$. Согласно формуле (15)

$$\frac{s - x}{s - t} g(t) + \frac{x - t}{s - t} g(s) - g(x) \geqslant -\omega_2(g,\, r(F_a)),$$

из чего следует оценка

$$g(t) \geqslant \frac{s-t}{s-x}(g(x)-\omega_2(g,\, r(F_a))) - \frac{x-t}{s-x}g(s). \tag{18}$$

Сопоставляя (17) и (18) при $t = a$, получаем

$$\frac{1}{2}\omega_2(g,\, r(F_a)) \geqslant \frac{s-a}{s-x}(g(x)-\omega_2(g,\, r(F_a))) - \frac{x-a}{s-x}g(s),$$

откуда

$$g(s) \geqslant \frac{s-a}{x-a}(g(x)-\omega_2(g,\, r(F_a))) - \frac{s-x}{2(x-a)}\omega_2(g,\, r(F_a)),$$

что эквивалентно соотношению

$$\begin{aligned} g(s) - (g(x)-\omega_2(g,\, r(F_a))) \\ \geqslant \frac{s-x}{x-a}(g(x)-\omega_2(g,\, r(F_a))) - \frac{s-x}{2(x-a)}\omega_2(g,\, r(F_a)), \end{aligned}$$

а значит

$$\inf_{s\in(x,\, a+r(F_a)]} \frac{g(s)-(g(x)-\omega_2(g,\, r(F_a)))}{s-x} > -\infty,$$

из чего в свою очередь следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся

$$s^* \in (x,\, a+r(F_a)],$$

такой что для всех $s \in (x,\, a+r(F_a)]$ имеем

$$\frac{g(s)-(g(x)-\omega_2(g,\, r(F_a)))}{s-x} > \frac{g(s^*)-(g(x)-\omega_2(g,\, r(F_a)))}{s^*-x} - \varepsilon,$$

откуда

$$g(s) \geqslant \frac{s^*-s}{s^*-x}(g(x)-\omega_2(g,\, r(F_a))) - \frac{x-s}{s^*-x}g(s^*) - (s-x)\varepsilon, \tag{19}$$

что эквивалентно соотношению

$$-g(s^*) \geqslant \frac{s^*-s}{s-x}(g(x)-\omega_2(g,\, r(F_a))) - (s^*-x)\varepsilon - \frac{s^*-x}{s-x}g(s).$$

Пользуясь неравенствами $g(a^*) \leqslant 0$, $x < a^*$, при $s = a^*$, из последнего неравенства получаем оценку

$$-g(s^*) \geqslant \frac{s^*-a^*}{a^*-x}\,(g(x)-\omega_2(g,\, r(F_a))) - (s^*-x)\varepsilon. \tag{20}$$

Наконец, сопоставляя (18) и (19) при $s = s^*$, получаем

$$g(\tau) \geqslant \frac{s^*-\tau}{s^*-x}(g(x)-\omega_2(g,\, r(F_a))) - \frac{x-\tau}{s^*-x}g(s^*) - \varepsilon(\tau-x)\mathbb{1}_{(x,\, a+r(F_a)]}(\tau)$$

для всех $\tau \in [a - r(F_a),\, a + r(F_a)]$. В силу положительности функционала F_a отсюда следует, что

$$F_a(g) \geqslant \frac{s^* - a}{s^* - x}(g(x) - \omega_2(g,\, r(F_a))) - \frac{x - a}{s^* - x} g(s^*) - \varepsilon F_a\big((\tau - x)\mathbb{1}_{(x,\, a + r(F_a)]}\big),$$

а с учётом оценки (20) это даёт нам неравенство

$$F_a(g) \geqslant \frac{a^* - a}{a^* - x}(g(x) - \omega_2(g,\, r(F_a))) - \varepsilon\big((x - a) + F_a\big((\tau - x)\mathbb{1}_{(x,\, a + r(F_a)]}\big)\big),$$

которое противоречит условию $F_a(g) = 0$ при достаточно малом ε. $\square$

Лемма 3. *Пусть* $f \in B[0,\, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $F \in \mathcal{F}$, $a = F(e_1)$, *причём*

$$a + 2h + r(F) \leqslant 1,$$

и

$$b \in \left[a + \frac{2r(F)}{2^{n+1} - 3},\, a + \frac{2h}{2^n}\right].$$

Тогда найдётся точка

$$x^* \in [a + 2^n(b - a) - r(F),\, a + 2^n(b - a) + r(F)]\,,$$

такая что

$$\left| f(x^*) - \frac{b - x^*}{b - a} F(f) - \frac{x^* - a}{b - a} f(b) \right| \leqslant \frac{x^* - b}{b - a} \omega_2(f,\, \max\{h,\, b - a + r(F)\}). \tag{21}$$

Доказательство. Обозначим $\max\{h,\, b - a + r(F)\}$ через $\widetilde{h}$. Достаточно доказать лемму для функции

$$g(x) = f(x) - \frac{x - a}{b - a} f(b) - \frac{b - x}{b - a} F(f).$$

Поскольку

$$F(g) = g(b) = 0, \quad \omega_2(g,\, \cdot) = \omega_2(f,\, \cdot),$$

в этом случае неравенство (21) принимает вид

$$|g(x^*)| \leqslant \frac{x^* - b}{b - a}\, \omega_2(g,\, \widetilde{h}).$$

Для начала покажем, что

$$|F(T_{2^n(b-a)}(g))| \leqslant (2^n - 1)\omega_2(g,\, \widetilde{h}). \tag{22}$$

Для этого докажем неравенства

$$|F(T_{2(b-a)}(g))| \leqslant \omega_2(g,\, \widetilde{h}) \tag{23}$$

и
$$|F(T_{2t}(g))| \leqslant \omega_2(g,\, \widetilde{h}) + 2|F(T_t(g))| \quad \forall t \in [0,\, h]\,, \tag{24}$$
из которых легко следует оценка (22).

Для доказательства неравенства (23) воспользуемся тем, что по формуле (4)
$$F(T_{2b-2a}(g)) = F(S_{F(e_1)+(b-a)}(g)) = F(S_b(g)).$$

Далее, в условиях леммы
$$0 \leqslant a - r(F) \leqslant 2b - a - r(F), \quad 2b - a + r(F) \leqslant a + 2h + r(F) \leqslant 1,$$
а значит
$$S_b(g)(x) = g(2b - x) \quad \forall x \in \operatorname{supp} F,$$
откуда, с учётом формулы (16), имеем
$$\begin{aligned}
|F(T_{2b-2a}(g))| &= |F(g) - 2g(b) + F(T_{2b-2a}(g))| \\
&= |F(g) - 2g(b) + F(S_b(g))| \\
&= |F(g) + F(-2g(b)e_0) + F(S_b(g))| \\
&= |F(g - 2g(b)e_0 + S_b(g))| \\
&\leqslant \sup_{x \in \operatorname{supp}(F)} |g(x) - 2g(b) + S_b(g)(x)| \\
&= \sup_{x \in \operatorname{supp}(F)} |g(x) - 2g(b) + g(2b - x)| \leqslant \omega_2(g,\, \widetilde{h}).
\end{aligned}$$
Теперь докажем неравенство (24). В условиях леммы $2h+a+r(F) \leqslant 1$, поэтому
$$T_{2t}(g) = g(x + 2t) \quad \forall x \in \operatorname{supp} F,$$
следовательно
$$\begin{aligned}
|F(T_{2t}(g)) - 2F(T_t(g))| &= |F(g) - 2F(T_t(g)) + F(T_{2t}(g))| \\
&= |F(g - 2T_t(g) + T_{2t}(g))| \\
&\leqslant \sup_{x \in \operatorname{supp}(F)} |g(x) - 2T_t(g)(x) + T_{2t}(g)(x)| \\
&= \sup_{x \in \operatorname{supp}(F)} |g(x) - 2g(x + t) + g(x + 2t)| \\
&\leqslant \omega_2(g,\, h) \leqslant \omega_2(g,\, \widetilde{h}).
\end{aligned}$$

Покажем, что существует такая точка $x^* \in \operatorname{supp}(F \circ T_{2^n(b-a)})$, что
$$|g(x^*)| \leqslant \frac{x^* - a}{b - a}\omega_2(g,\, \widetilde{h}).$$

Пусть это не так. Рассмотрим несколько случаев. Пусть

$$g(x) > \frac{x-b}{b-a}\omega_2(g, \widetilde{h}) \tag{25}$$

при всех $x \in \operatorname{supp}(F \circ T_{2^n(b-a)})$. Рассмотрим функционал $\widetilde{F} = F \circ T_{2^n(b-a)}$. Этот функционал линейный и положительный, а поскольку

$$a + r(F) + 2^n(b-a) \leqslant 1,$$

имеем

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}(e_0) &= F(T_{2^n(b-a)}(e_0)) = F(e_0) = 1, \\
\widetilde{F}(e_1) &= F(T_{2^n(b-a)}(e_1)) = F(e_1 + (T_{2^n(b-a)}(e_1) - e_1)) \\
&= F(e_1) + 2^n(b-a)F(e_0) = a + 2^n(b-a).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&\widetilde{F}(g) > \widetilde{F}\left(\left(\frac{x-a}{b-a} - 1\right)\omega_2(g, \widetilde{h})\right) \\
&= \left(\frac{\widetilde{F}(e_1) - a\widetilde{F}(e_0)}{b-a} - \widetilde{F}(e_0)\right)\omega_2(g, \widetilde{h}) = (2^n - 1)\,\omega_2(g, \widetilde{h}),
\end{aligned}$$

что приводит к противоречию с (22).

Аналогично, исключён вариант, при котором

$$g(x) < -\frac{x-b}{b-a}\omega_2(g, \widetilde{h}) \tag{26}$$

при всех $x \in \operatorname{supp}(F \circ T_{2^n(b-a)})$. Значит, существуют точки x_1, $x_2 \in \operatorname{supp}\widetilde{F}$, для которых не выполняются неравенства (26) и (25), соответственно. Если ни одна из них не подходит на роль x^*, то для x_1 обязано выполниться (25), а для x_2 – (26). Не умаляя общности мы можем считать, что $x_1 < x_2$.

Согласно (15), имеем

$$g(x_1) - \frac{x_1 - b}{x_2 - b}g(x_2) - \frac{x_2 - x_1}{x_2 - b}g(b) \leqslant \omega_2(g, \widetilde{h}),$$

а по условию

$$\begin{aligned}
x_1 - b &\geqslant (2^n - 1)(b-a) - r(F) \\
&= \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2}\big((2^{n+1} - 3)(b-a) - 2r(F)\big) \geqslant \frac{b-a}{2},
\end{aligned}$$

поэтому имеем противоречие

$$\begin{aligned}\omega_2(g, \widetilde{h}) &\geqslant g(x_1) - \frac{x_1 - b}{x_2 - b} g(x_2) - \frac{x_2 - x_1}{x_2 - b} g(b)\\ &= g(x_1) - \frac{x_1 - b}{x_2 - b} g(x_2)\\ &> \Big(\frac{x_1 - b}{b - a} + \frac{(x_1 - b)}{(x_2 - b)} \frac{(x_2 - b)}{(b - a)}\Big) \omega_2(g, \widetilde{h})\\ &= \frac{2(x_1 - b)}{b - a} \omega_2(g, \widetilde{h}) \geqslant \omega_2(g, \widetilde{h}). \qquad \square\end{aligned}$$

Следующая лемма представляет собой собрание утверждений, данных Палтанеей в его книге. В качестве доказательства мы предлагаем ссылки на соответствующие места в [1].

Здесь и далее мы будем пользоваться индексными функциями для $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\tau(t) &= \min\left\{ j \in \mathbb{N}_0 \,\Big|\, \frac{j}{n} > t \right\}, \quad \sigma(t) = \max\left\{ j \in \mathbb{Z} \,\Big|\, \frac{j}{n} < \min\{t, 1\} \right\},\\ \overline{\tau}(t) &= \min\left\{ j \in \mathbb{N}_0 \,\Big|\, \frac{j}{n} \geqslant t \right\}, \quad \overline{\sigma}(t) = \max\left\{ j \in \mathbb{Z} \,\Big|\, \frac{j}{n} \leqslant \min\{t, 1\} \right\}.\end{aligned} \tag{27}$$

Лемма 4. *Пусть $n > 6$, $h = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Для произвольных $x \in (0, 1-h)$ и $z \in (x + \frac{3}{4}h, 1)$ определим*

$$I_n(x) = \begin{cases} \left\{\overline{\tau}\left(x - \frac{h}{2} - \frac{1}{n}\right), \dots, \sigma(x)\right\}, & n < 60,\ x < \frac{3}{4}h + \frac{1}{n}\\ \left\{\overline{\tau}(x-h), \dots, \overline{\sigma}\left(x - \frac{3}{4}h - \frac{1}{n}\right)\right\} & \\ \qquad \cup \left\{\overline{\tau}\left(x - \frac{h}{2} - \frac{1}{n}\right), \dots, \sigma(x)\right\}, & n < 60,\ x \geqslant \frac{3}{4}h + \frac{1}{n},\\ \left\{\overline{\tau}\left(x - \frac{h}{2}\right), \dots, \sigma(x)\right\}, & n \geqslant 60,\end{cases}$$

$$J_n(x) = \{\sigma(x), \dots, n\},$$

$$J_{n,x}(z) = \begin{cases} \{\tau(x), \dots, n\}, & z \in \left(x + \frac{3}{4}h, x + h\right],\\ \{\tau(z-h), \dots, n\}, & z \in \left(x + h, x + \frac{5}{4}h\right],\\ \left\{\tau\left(z - \frac{h}{2}\right), \dots, n\right\}, & z \in \left(x + \frac{5}{4}h, 1\right).\end{cases}$$

Тогда существуют функции $g_{n,0}, g_{n,1}, \dots, g_{n,n} : (0, 1-h) \to (0, 1]$, такие что для всякого $x \in (0, 1-h)$ справедливы соотношения

$$\sum_{i \in I_n(x)} g_{n,i}(x) \left(x - \frac{i}{n}\right) + \sum_{j \in J_n(x)} g_{n,j}(x) \left(x - \frac{j}{n}\right) = 0, \tag{28}$$

$$\sum_{j\in J_{n,\,x}(z)} g_{n,\,j}(x)\left(z-\frac{j}{n}\right)\geqslant 0 \quad \forall z\in\left[x+\frac{3}{4}h,\,1\right), \tag{29}$$

и при этом

$$g_{n,\,j}(x)=p_{n,\,j}(x),\quad j\in\{\tau(x+h),\ldots,\,n\}, \tag{30}$$

и для любого $x\in(h,\,1-h)$

$$g_{n,\,j}(x)+g_{n,\,n-j}(1-x)<p_{n,\,j}(x),\quad j\in\{\overline{\tau}(x-h),\ldots,\,\overline{\sigma}(x+h)\}. \tag{31}$$

Доказательство. Обозначим

$$J_n^{(1)}(x)=\left\{\tau(x),\ldots,\overline{\sigma}\left(x+\frac{h}{2}\right)\right\},\quad J_n^{(2)}(x)=\left\{\tau\left(x+\frac{h}{2}\right),\overline{\sigma}(x+h)\right\},$$

$$J_n^{(3)}(x)=\{\tau(x+h),\,\ldots,\,n\},$$

$$J^*_{n,\,x}(z)=J_{n,\,x}(z)\cap J_n^{(1)}(x),\quad \varphi_{n,\,j}(x,\,t)=p_{n,\,j}(x)\left(t-\frac{j}{n}\right).$$

Покажем, что для существования функций $g_{n,\,0},\,g_{n,\,1},\,\ldots,g_{n,\,n}$ достаточно того, что

$$\frac{3}{2}h\sum_{j\in J_{n,\,x}(z)} p_{n,\,j}(x)+\sum_{j\in J_{n,\,x}(z)}\varphi_{n,\,j}(x,\,x)>0,\quad \forall z\in\left(x+\frac{3}{2}h,\,1\right), \tag{32}$$

и существования функций $\lambda_n^{(1)},\,\lambda_n^{(2)},\,\mu_n:(0,\,1-h)\to(0,\,1)$ со свойствами

$$\sum_{j\in J^*_{n,\,x}(z)}\lambda_n^{(1)}(x)\varphi_{n,\,j}(x,\,z)+\sum_{j\in J^{(2)}_{n,\,x}(z)}\lambda_n^{(2)}(x)\varphi_{n,\,j}(x,\,z)$$
$$+\sum_{j\in J_n^{(3)}(x)}\varphi_{n,\,j}(x,\,z)\geqslant 0\quad \forall z\in\left[x+\frac{3}{4}h,\,x+\frac{3}{2}h\right], \tag{33}$$

$$\sum_{i\in I_n(x)}\mu_n(x)\varphi_{n,\,i}(x,\,x)+\sum_{j\in J_n^{(1)}(x)}\lambda_n^{(1)}(x)\varphi_{n,\,j}(x,\,x)$$
$$+\sum_{j\in J_n^{(2)}(x)}\lambda_n^{(2)}(x)\varphi_{n,\,j}(x,\,x)+\sum_{j\in J_n^{(3)}(x)}\varphi_{n,\,j}(x,\,x)=0, \tag{34}$$

$$\lambda_n^{(1)}(x)+\mu_n(1-x)<1,\quad \lambda_n^{(2)}(x)+\mu_n(1-x)<1\quad \forall x\in(h,\,1-h). \tag{35}$$

Пусть

$$g_{n,\,j}(x) = \begin{cases} \mu_n(x)p_{n,\,j}(x), & j \in \{0, \ldots, \overline{\sigma}(x)\}, \\ \alpha_{n,\,j}(x)p_{n,\,j}(x), & j \in \{\tau(x), \ldots, n\}, \end{cases}$$

где

$$\alpha_{n,\,j}(x) = \begin{cases} \lambda_n^{(1)}(x), & j \in J^{(1)}(x), \\ \lambda_n^{(2)}(x), & j \in J^{(2)}(x), \\ 1, & j \in J^{(3)}(x). \end{cases}$$

Равенство (28) выполняется благодаря равенству (34), а равенство (30) – по построению. Неравенство (29) для $z \in \left[x + \frac{3}{4}h,\, x + \frac{3}{2}h\right]$ следует из (33). Для $z \in \left(x + \frac{3}{2}h,\, 1\right)$ ввиду формулы (32) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J_{n,\,x}(z)} g_{n,\,j}(x)\left(z - \frac{j}{n}\right) &= \sum_{j=\tau\left(z-\frac{h}{2}\right)}^{n} g_{n,\,j}(x)\left(z - \frac{j}{n}\right) \\ &= \sum_{j=\tau\left(z-\frac{h}{2}\right)}^{n} p_{n,\,j}(x)\left(z - \frac{j}{n}\right) \\ &= (z-x)\sum_{j=\tau(z-\frac{h}{2})}^{n} p_{n,\,j}(x) + \sum_{j=\tau(z-\frac{h}{2})}^{n} p_{n,\,j}(x)\left(x - \frac{j}{n}\right) \\ &> \frac{3}{2}h\sum_{j=\tau(z-\frac{h}{2})}^{n} p_{n,\,j}(x) - \sum_{j=\tau(z-\frac{h}{2})}^{n} p_{n,\,j}(x)\left(\frac{j}{n} - x\right) > 0. \end{aligned}$$

Наконец, покажем, что (31) следует из (35). Поскольку

$$p_{n,\,j}(x) = p_{n,\,n-j}(1-x),$$

имеем

$$\begin{aligned} &g_{n,\,j}(x) + g_{n,\,n-j}(1-x) \\ &\quad= \begin{cases} \left(\alpha_{n,\,n-j}(1-x) + \mu_n(x)\right)p_{n,\,j}(x), & j \in \{\overline{\tau}(x-h), \ldots, \overline{\sigma}(x)\}, \\ \left(\alpha_{n,\,j}(x) + \mu_n(1-x)\right)p_{n,\,j}(x), & j \in \{\tau(x), \ldots, \overline{\sigma}(x+h)\}, \end{cases} \end{aligned}$$

а поскольку при $j \in \{\tau(x), \ldots, \overline{\sigma}(x+h)\}$ выполняется

$$n - j \in \{\overline{\tau}(1-x-h), \ldots, \sigma(1-x)\},$$

это означает, что $g_{n,\,j}(x)+g_{n,\,n-j}(1-x)$ имеет одно из четырёх значений:

$$\Big(\lambda_n^{(1)}(1-x)+\mu_n(x)\Big)\,p_{n,\,j}(x),\quad \Big(\lambda_n^{(2)}(1-x)+\mu_n(x)\Big)\,p_{n,\,j}(x)$$
$$\Big(\lambda_n^{(1)}(x)+\mu_n(1-x)\Big)\,p_{n,\,j}(x),\quad \Big(\lambda_n^{(2)}(x)+\mu_n(1-x)\Big)\,p_{n,\,j}(x),$$

после чего остаётся сослаться на (35).

Дадим ссылки из [1] на (32), (33), (34), (35). Для случая $n\geqslant 60$ формула (32) следует из комбинации леммы 4.2.2 (стр. 99) и леммы 4.2.5 (стр. 104), а для случая $6<n<60$ из леммы 4.2.7 (стр. 111).

Поскольку величина $\mu_n(x)$ полностью определена соотношением (34), формулу (35) можно рассматривать как условие на $\lambda_n^{(1)}(x)$ и $\lambda_n^{(2)}(x)$. Существование величин $\lambda_n^{(1)}(x)$ и $\lambda_n^{(2)}(x)$ при $n\geqslant 60$ следует из леммы 4.2.6 (стр. 104), подробности также можно найти в доказательстве утверждения 4.2.1 (стр. 108). Заметим, что в указанной лемме $\lambda_n^{(2)}=0$, однако легко видеть, что это значение можно заменить на достаточно малое положительное число.

При $6<n<60$ существование величин $\lambda_n^{(1)}(x)$ и $\lambda_n^{(2)}(x)$ следует из леммы 4.2.7 (стр. 111) и утверждения 4.2.2 (стр. 118). Обращаем внимание, что взамен неравенства (35) в указанной лемме используется более сильное, где вместо величины $\mu_n(x)$, определённой в (34), фигурирует величина

$$\widetilde{\mu}_n(x)=\frac{\sum\limits_{j=\tau(x)}^{\sigma(x+h)}\lambda_n(x)p_{n,\,j}(x)\left(\frac{j}{n}-x\right)+\sum\limits_{j=\tau(x+h)}^{n}p_{n,\,j}(x)\left(\frac{j}{n}-x\right)}{\sum\limits_{j=\tau(x-h)}^{\sigma\left(x-\frac{3}{4}h\right)}p_{n,\,j}(x)\left(x-\frac{j}{n}\right)+\sum\limits_{j=\overline{\tau}\left(x-\frac{h}{2}\right)}^{\sigma(x)}p_{n,\,j}(x)\left(x-\frac{j}{n}\right)}.$$

Значение $\mu_n(x)$ совпадает с $\widetilde{\mu}_n(x)$ при $x-\frac{h}{2}-\frac{1}{n}<0$, а в противном случае может быть получено, если в индексном множестве знаменателя приведённой дроби удалить точку $\sigma\left(x-\frac{3}{4}h\right)$ и добавить $\overline{\tau}\left(x-\frac{h}{2}-\frac{1}{n}\right)$. Поскольку последовательность $p_{n,j}(x)$ возрастает при $j\in\{0,\ldots,\sigma(x)\}$, это означает, что знаменатель при этом увеличится, следовательно

$$\mu_n(x)\leqslant\widetilde{\mu}_n(x).\qquad\square$$

Доказательство теоремы 3

Заметим, что в силу условия (2) получается, что $r(F_0) = r(F_n) = 0$, а значит, по условию (1) для любой функции $\varphi \in B[0, 1]$ имеем

$$F_0(\varphi) = \varphi(0), \quad F_n(\varphi) = \varphi(1).$$

Обозначим $h = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Сперва докажем точность результата. Для этого рассмотрим функцию

$$\varphi_\varepsilon(t) = \mathbb{1}_{[0,\varepsilon]}(t) \cdot \frac{\varepsilon - t}{\varepsilon}.$$

Несложно видеть, что $\omega_2(\varphi_\varepsilon, h + h_n) = 1$. При $\varepsilon < \frac{1}{n} - R$ имеем

$$B_n(\varphi_\varepsilon)(x) = (1-x)^n F_0(\varphi_\varepsilon) = (1-x)^n,$$
$$\|B_n(\varphi_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon\| = \|(1-x)^n - \varphi_\varepsilon(x)\| \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} 1.$$

Перейдём к доказательству неравенства. Оно будет строиться на проверке условий **1)**, **2)**, **3)** леммы 1 для различных функционалов. В качестве константы M будет выступать величина $\omega_2(f, h + h_n)$. При этом мы будем указывать специально индексное множество $\mathcal{I}$, а также коэффициенты γ_i, а в качестве функционалов F_i будут всегда выступать функционалы из условия. При этом $y_i = \frac{i}{n}$. Напоминаем, что при $x = 0, 1$ имеем $B_n(f, x) = f(x)$, так что справедливость теоремы очевидна.

Пусть $n \leqslant 10$ и $x \in (0, 1)$ фиксировано. Проверим условие леммы для функционала $B_n(f, x)$, где $\mathcal{I} = \{0, \ldots, n\}$, $\gamma_i = p_{n,i}(x)$. В качестве множества Z выберем $\{x\}$, и пусть $I(x) = \{0, \ldots, \sigma(x)\}$, $J(x) = \{\overline{\tau}(x), \ldots, n\}$, где индексные функции определены формулами (27).

Обращаем внимание, что, так как $F_i(e_0) = 1$, $F_i(e_1) = \frac{i}{n}$, то

$$B_n(e_1 - xe_0, x) = 0,$$

откуда легко видеть, что условия **1)** и **2)** соблюдены. Для проверки условия **3)** докажем формулу (7). В силу соотношения (2), для любых $i \in I(x)$ и $j \in J(x)$ верны неравенства

$$y_j + r(F_j) - (y_i - r(F_i)) \leqslant 1 \leqslant 2h + 2h_n,$$

значит, по лемме 2,

$$\left|f(x)-\frac{y_j-x}{y_j-y_i}F_i(f)-\frac{x-y_i}{y_j-y_i}F_j(f)\right|$$

$$\leqslant \omega_2\left(f, \max\left\{\frac{y_j-y_i}{2}+\frac{r(F_i)+r(F_j)}{2}, r(F_i), r(F_j)\right\}\right)\leqslant \omega_2\left(f, h+h_n\right).$$

Пусть теперь $n>10$, зафиксируем $x\in(0,\,1)$, и пусть $g_{n,\,j}$ – функции из леммы 4. Рассмотрим

$$F(f)=\sum_{i\in I_n(x)} g_{n,\,i}(x)F_i(f)+\sum_{j\in J_n(x)} g_{n\,j}(x)F_j(f),$$

$$G(f)=\sum_{i\in I_n^*(x)} g_{n,\,n-i}(1-x)F_i(f)+\sum_{j\in J_n^*(x)} g_{n,\,n-j}(1-x)F_j(f),$$

$$H(f)=\begin{cases} B_n(f,\,x)-F(f), & x<h,\\ B_n(f,\,x)-G(f), & x>1-h,\\ B_n(f,\,x)-F(f)-G(f), & x\in[h,\,1-h],\end{cases}$$

где

$$I_n(x)=\begin{cases}\left\{\overline{\tau}\left(x-\frac{h}{2}-\frac{1}{n}\right),\ldots,\,\sigma(x)\right\}, & n<60,\ x<\frac{3}{4}h+\frac{1}{n},\\ \left\{\overline{\tau}(x-h),\,\ldots,\,\overline{\sigma}\left(x-\frac{3}{4}h-\frac{1}{n}\right)\right\} & \\ \qquad\cup\left\{\overline{\tau}\left(x-\frac{h}{2}-\frac{1}{n}\right),\ldots,\sigma(x)\right\}, & n<60,\ x\geqslant\frac{3}{4}h+\frac{1}{n},\\ \left\{\overline{\tau}\left(x-\frac{h}{2}\right),\ldots,\,\sigma(x)\right\}, & n\geqslant 60,\end{cases}$$

$$J_n(x)=\left\{\tau(x),\,\ldots,\,n\right\},$$

$$I_n^*(x)=\{i\,|\,n-i\in I_n(1-x)\},\quad J_n^*(x)=\{j\,|\,n-j\in J_n(1-x)\}.$$

Для доказательства теоремы нам достаточно установить неравенства

$$|F(f)-f(x)F(e_0)|\leqslant F(e_0)\omega_2\left(f,\,h+h_n\right), \tag{36}$$

$$|G(f)-f(x)G(e_0)|\leqslant G(e_0)\omega_2\left(f,\,h+h_n\right), \tag{37}$$

$$|H(f)-f(x)H(e_0)|\leqslant H(e_0)\omega_2\left(f,\,h+h_n\right). \tag{38}$$

Начнём с того, что (37) следует из (36). В самом деле, если (36) верно для любых x и набора $(F_0,\ldots,F_n)$, удовлетворяющего условию теоремы, то достаточно заметить, что

$$G(f,\,x,\,F_0,\,\ldots,F_n)=F\left(S_{\frac{1}{2}}(f),\,1-x,\,\widetilde{F}_0\ \ \ldots,\widetilde{F}_n\right),$$

где

$$\widetilde{F}_i=F_{n-i}\circ T_{-\frac{n-2i}{n}}.$$

Действительно, так как

$$-\frac{n-2i}{n} \in \left[r\left(F_{n-i}\right) - F_{n-i}(e_1),\, 1 - r\left(F_{n-i}\right) - F_{n-i}(e_1)\right],$$

то по (4)

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_i\left(S_{\frac{1}{2}}(f)\right) = F_{n-i}\left(T_{-1+\frac{2i}{n}} S_{\frac{1}{2}}(f)\right) = F_{n-i}\left(S_{\frac{n-i}{n}-\frac{1}{2}+\frac{i}{n}} S_{\frac{1}{2}}(f)\right)\\ = F_{n-i}\left(S_{\frac{1}{2}} S_{\frac{1}{2}}(f)\right) = F_{n-i}(f),\end{aligned}$$

а значит,

$$\begin{aligned}&F\left(S_{\frac{1}{2}}(f),\, 1-x,\, \widetilde{F_0}\ \ldots, \widetilde{F_n}\right)\\ &= \sum_{i\in I_n(1-x)} g_{n,\,i}(1-x)\widetilde{F}_i\left(S_{\frac{1}{2}}(f)\right) + \sum_{j\in J_n(1-x)} g_{n,\,j}(1-x)\widetilde{F_j}\left(S_{\frac{1}{2}}(f)\right)\\ &= \sum_{i\in I_n(1-x)} g_{n,\,i}(1-x)F_{n-i}(f) + \sum_{j\in J_n(1-x)} g_{n,\,j}(1-x)F_{n-j}(f)\\ &= \sum_{n-i\in I_n(1-x)} g_{n,\,n-i}(1-x)F_i(f) + \sum_{n-j\in J_n(1-x)} g_{n,\,n-j}(1-x)F_j(f)\\ &= \sum_{i\in I_n^*(x)} g_{n,\,n-i}(1-x)F_i(f) + \sum_{j\in J_n^*(x)} g_{n,\,n-j}(1-x)F_j(f).\end{aligned}$$

Для доказательства неравенства (38) применим лемму 1 к функционалу H. По построению этот функционал можно представить в виде

$$H = \sum_{i=\overline{\tau}(x-h)}^{\overline{\sigma}(x+h)} \gamma_i F_i,$$

при этом, по условию (31)

$$\gamma_i \geqslant p_{n,\,i}(x) - g_{n,\,i}(x) - g_{n,\,n-i}(1-x) > 0.$$

В самом деле, при $x < 1-h$ по условию (30) для $i \geqslant \tau(x+h)$ коэффициенты F совпадают с коэффициентами B_n, а в разложении функционала G не встречаются слагаемые с такими индексами. При $x > h$ и $i \leqslant \sigma(x-h)$ ситуация аналогична в силу симметрии F и G.

В качестве множества Z снова выберем $\{x\}$, и пусть

$$I(x) = \{\overline{\tau}(x-h), \ldots, \sigma(x)\}, \quad J(x) = \{\overline{\tau}(x), \ldots, \overline{\sigma}(x+h)\}.$$

Обращаем внимание, что
$$F(e_1 - xe_0) = 0 \tag{39}$$
в силу (28), откуда, из-за уже отмеченной связи функционалов F и G, следует, что
$$H(e_1 - xe_0) = B_n(e_1 - xe_0) = 0,$$
значит, условия **1)** и **2)** соблюдены.

Далее, поскольку в силу определения для любых $i \in I(x)$ и $j \in J(x)$ имеем
$$y_j - y_i \leqslant 2h,$$
и по условию $r(F_i)$, $r(F_j) \leqslant \frac{1}{n}$, то по лемме 2
$$\begin{aligned}\left|f(x) - \frac{y_j - x}{y_j - y_i}F_i(f) - \frac{x - y_i}{y_j - y_i}F_j(f)\right| \\ \leqslant \omega_2\left(f,\, \max\left\{\frac{y_j - y_i}{2} + \frac{r(F_i) + r(F_j)}{2},\, r(F_i),\, r(F_j)\right\}\right) \\ \leqslant \omega_2\left(f,\, h + \frac{1}{n}\right) \leqslant \omega_2\left(f,\, h + h_n\right),\end{aligned}$$
а значит, выполняются (7) и **3)**.

Докажем формулу (36). Проверим условия леммы 1 для функционала F, при этом мы можем считать, что $x < 1 - h$. В качестве множества Z возьмём $\{x\} \cup \left[x + \frac{3}{4}h,\, 1\right)$, и пусть
$$J(z) = \{\tau(z), \ldots, n\},$$
$$I(z) = \begin{cases} \left\{\tau(z - \frac{h}{2}), \ldots, \sigma(z)\right\}, & z \in \left(x + \frac{5}{4}h,\, 1\right), \\ \{\max\{\tau(x),\, \tau(z-h)\}, \ldots, \sigma(z)\}, & z \in \left[x + \frac{3}{4}h,\, x + \frac{5}{4}h\right), \\ I_n(x), & z = x. \end{cases}$$
При этом
$$\mathcal{I} = I_n(x) \cup J_n(x),$$
что с учётом формулы (39) обеспечивает выполнение условия **1)**.

Для $z \in \left[x + \frac{3}{4}h,\, 1\right)$ условие **2)** выполняется в силу (29). Для точки x его справедливость следует из (28).

Проверим **3)**. Возьмём $i \in I(z)$. Если $y_i \geqslant 1 - 2h - 2h_n + R$, то для всех $j \in J(z)$ верна оценка
$$y_j + r(F_j) - (y_i - r(F_i)) \leqslant 2h + 2h_n, \tag{40}$$

а поэтому по лемме 2 получаем

$$\left|f(x)-\frac{y_j-x}{y_j-y_i}F_i(f)-\frac{x-y_i}{y_j-y_i}F_j(f)\right|$$
$$\leqslant\omega_2\left(f,\max\left\{\frac{y_j-y_i}{2}+\frac{r(F_i)+r(F_j)}{2},r(F_i),r(F_j)\right\}\right)\leqslant\omega_2\left(f,\,h+h_n\right),$$

что означает выполнение оценки (7) и завершает проверку условия **3)**.

Иначе $y_i<1-2h-2h_n+R$. Покажем, что существует точка $z_i\in Z$, такая что

$$\left|f(z_i)-\frac{z-z_i}{z-y_i}F_i(f)-\frac{z_i-y_i}{z-y_i}f(z)\right|\leqslant\frac{z_i-z}{z-y_i}\omega_2(f,\,h+h_n-R) \qquad (41)$$

со свойством (8), и при этом $I(z_i)$, $J(z_i)\subset J(z)$. Последнее вложение выполняется по построению при $z_i>z$. Для выполнения свойства (8) будет достаточно, если $z_i\leqslant y_i+2h+2h_n-2R$, так как в этом случае для всех $j\in J(z)\setminus J(z_i)$ также выполняется неравенство (40), а условие $I(z_i)\subset J(z)$ означает, что $\tau(z)\leqslant\min I(z_i)$. При $z\neq x$ для этого будет достаточно, если $z_i\geqslant z+\frac{h}{2}$, так как в этом случае $z_i\geqslant x+\frac{5}{4}h$, и поэтому

$$\min I(z_i)=\sigma\left(z_i-\frac{h}{2}\right)\geqslant\tau(z),$$

а при $z=x$ достаточно, если $z_i\geqslant x+\frac{3}{4}h$, так как в этом случае $z_i\in Z$, а условие

$$\min I(z_i)\geqslant\tau(x)$$

выполняется по построению.

Обозначим через Z_i^* множество точек, обладающих свойством (41), и пусть

$$a_i(z)=\begin{cases}z+\frac{h}{2}, & z\neq x,\\ x+\frac{3}{4}h, & z=x.\end{cases}$$

В силу вышесказанного, нам осталось проверить, что

$$Z_i^*\cap[a_i(z),\,y_i+2h+2h_n-2R]\neq\emptyset. \qquad (42)$$

Проверку будем осуществлять при помощи леммы 3, из которой, ввиду неравенств $y_i<1-2h-2h_n+R$ и $\frac{h}{4}\geqslant r(F_i)$, следует, что если $m\in\mathbb{N}$ и $t\in(0,\,1)$ таковы, что

$$t\in\Gamma_i^{(m)}=\left[y_i+\frac{h}{2(2^{m+1}-3)},\,y_i+\frac{2h+2h_n-2R}{2^m}\right],$$

то на интервале

$$\Delta_i^{(m)}(t) = [t + (2^m - 1)(t - y_i) - r(F_i),\, y_i + 2^m(t - y_i) + r(F_i)]$$

найдётся точка t^* со свойством

$$\left| f(t^*) - \frac{t - t^*}{t - y_i} F_i(f) - \frac{t^* - y_i}{t - y_i} f(t) \right| \leqslant \frac{t^* - t}{t - y_i} \omega_2(f,\, h + h_n - R). \tag{43}$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$ – такое число, что $z - y_i \in \left(\frac{h}{2^{k+1}},\, \frac{h}{2^k}\right]$. Тогда

$$z \in \left(y_i + \frac{h}{2^{k+1}},\, y_i + \frac{h}{2^k} \right] \subset \Gamma_i^{(k+1)},$$

значит, на промежутке

$$\begin{aligned} \Delta_i^{(k+1)}(z) &= \left[z + (2^{k+1} - 1)(z - y_i) - r(F_i),\, y_i + 2^{k+1}(z - y_i) + r(F_i) \right] \\ &\subset \left[z + (2^{k+1} - 1)(z - y_i) - r(F_i),\, y_i + 2h + 2h_n - 2R \right] \end{aligned}$$

существует точка t^* со свойством (43) с заменой t на z, что означает $t^* \in Z_i^*$. При этом $t^* \leqslant y_i + 2h + 2h_n - 2R$, а значит если $t^* \geqslant a_i(z)$, то (42) выполнено. Иначе $z + \frac{3}{4}h \geqslant a_i(z) > z + (2^{k+1} - 1)(z - y_i) - r(F_i)$, откуда

$$z < y_i + \frac{\frac{3}{4}h + r(F_i)}{2^{k+1} - 1} \leqslant \frac{h}{4} + \frac{r(F_i)}{3},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} t^* \in \left[z + (2^{k+1} - 1)(z - y_i) - r(F_i),\, a_i(z) \right) &\subset \left[z + \frac{h}{2},\, z + \frac{3}{4}h \right) \\ &\subset \left[y_i + h,\, y_i + h + \frac{R}{3} \right] \subset \Gamma_i^{(1)}, \end{aligned}$$

из чего следует, что на промежутке

$$\begin{aligned} \Delta_i^{(1)}(t^*) &= [t^* + (t^* - y_i) - r(F_i),\, y_i + 2(t^* - y_i) + r(F_i)] \\ &\subset \left[z + \frac{3}{4}h,\, z + 2h + R \right] \subset [a_i(z),\, z + 2h + 2h_n - 2R] \end{aligned}$$

найдётся точка t^{**} со свойством (43) с заменой t на t^*. Покажем, что $t^{**} \in Z_i^*$. В самом деле,

$$\left| f(t^{**}) - \frac{t^* - t^{**}}{t^* - y_i} F_i(f) - \frac{t^{**} - y_i}{t^* - y_i} f(t^*) \right| \leqslant \frac{t^{**} - t^*}{t^* - y_i} \omega_2(f,\, h + h_n - R),$$

при этом точка t^*, как уже отмечалось, обладает свойством

$$\left|f(t^*) - \frac{z-t^*}{z-y_i}F_i(f) - \frac{t^*-y_i}{z-y_i}f(t^*)\right| \leqslant \frac{t^*-z}{z-y_i}\omega_2(f,\, h+h_n-R).$$

Из этих двух неравенств несложно получить требуемое неравенство

$$\left|f(t^{**}) - \frac{z-t^{**}}{z-y_i}F_i(f) - \frac{t^{**}-y_i}{z-y_i}f(z)\right| \leqslant \frac{t^{**}-z}{z-y_i}\omega_2(f,\, h+h_n-R).$$

Если $z-y_i \in \left(\frac{h}{2},\, h\right]$, то рассмотрим несколько вариантов.

Если $z \neq x$, то $a_i(z) = z + \frac{h}{2}$. Поскольку

$$z \in \left(y_i + \frac{h}{2},\, y_i + h\right] \subset \Gamma_i^{(1)},$$

на промежутке

$$\begin{aligned}\Delta_i^{(1)}(z) &= [z + (z-y_i) - r(F_i),\, y_i + 2(z-y_i) + r(F_i)] \\ &\subset \left(z + \frac{h}{2} - r(F_i),\, y_i + 2h + R\right]\end{aligned}$$

найдётся точка t^*, обладающая свойством (43) с заменой t на z. Если $t^* \geqslant z + \frac{h}{2}$, то это влечёт (42), иначе

$$z - y_i < \frac{h}{2} + r(F_i),$$

и

$$t^* \in \left(z + \frac{h}{2} - r(F_i),\, z + \frac{h}{2}\right) \subset (y_i + h - r(F_i),\, y_i + h + r(F_i)) \subset \Gamma_i^{(1)},$$

следовательно, на промежутке

$$\begin{aligned}\Delta_i^{(1)}(t^*) &= [t^* + (t^*-y_i) - r(F_i),\, y_i + 2(t^*-y_i) + r(F_i)] \\ &\subset \left[z + \frac{3}{2}h - 2R,\, y_i + 2h + 3R\right] \subset [a_i(z),\, y_i + 2h + 2h_n - 2R]\end{aligned}$$

найдётся точка t^{**}, обладающая свойством (43) с заменой t на t^*. Доказательство того, что $t^{**} \in Z_i^*$, проводится аналогично рассмотренному выше случаю.

Наконец, если $z = x$, то $a_i(z) = z + \frac{3}{4}h$, $n < 60$. Рассмотрим два случая. Если

$$x \in \left(y_i + \frac{3}{4}h + \frac{1}{n},\, y_i + h\right) \subset \Gamma_i^{(1)},$$

то

$$\Delta_i^{(1)}(x) = [x + (x - y_i) - r(F_i),\, y_i + 2(x - y_i) + r(F_i)]$$
$$\subset \left[x + \frac{3}{4}h,\, y_i + 2h + R\right] \subset [a_i(x),\, y_i + 2h + 2h_n - 2R],$$

что влечёт (42), а если

$$x \in \left(y_i + \frac{h}{2},\, y_i + \frac{h}{2} + \frac{1}{n}\right] \subset \Gamma_i^{(2)},$$

то (42) следует из вложения

$$\Delta_i^{(2)}(x) = [x + 3(x - y_i) - r(F_i),\, y_i + 4(x - y_i) + r(F_i)]$$
$$\subset \left[x + \frac{3}{2}h - R,\, y_i + 2h + \frac{4}{n} + R\right] \subset [a_i(z),\, y_i + 2h + 2h_n - 2R].$$

Таким образом, мы проверили выполнение соотношения (42) во всех случаях, что завершает доказательство теоремы 3.

Список литературы

1. R. Paltanea, *Approximation theory using positive linear operators*, Boston, Birkhauser 2004.
2. Л. Н. Ихсанов, *Оценка приближения операторами типа Канторовича через второй модуль непрерывности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **480** (2019), 122–147.
3. Л. В. Канторович, *О некоторых разложениях по полиномам в форме С. Н. Бернштейна.* — ДАН(А), **22** (1930), 595–600.
4. В. С. Виденский, *Работы Л. В. Канторовича о полиномах Н. С. Бернштейна.* — Вестник СПбГУ, Сер. 1, Вып. 2 (2013), 50–53.

Ikhsanov L. N. Exact estimates of approximation by abstract Kantorovich type operators in terms of the second modulus of continuity.

Approximation of bounded measurable functions on the segment [0, 1] by Kantorovich type operators

$$B_n(f)(x) = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^j (1-x)^{n-j} F_j(f),$$

where F_j are functionals possessing sufficiently small supports and having some symmetry is considered. The error of approximation is estimated in terms of the second modulus of continuity. The result is sharp.

С.- Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28,
Петродворец,
198504 С.-Петербург, Россия
E-mail: lv.ikhs@gmail.com

Поступило 4 августа 2020 г.