Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 491, 2020 г.

О. Л. Виноградов

О СКОРОСТИ СТРЕМЛЕНИЯ К НУЛЮ МАСШТАБИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ МЕЙЕРА

§1. Введение

Масштабирующей функцией Мейера называют такую вещественнозначную функцию φ на прямой $\mathbb{R}$, целочисленные сдвиги которой $\varphi(\cdot+n)$, $n\in\mathbb{Z}$, ортонормированы в $L_2(\mathbb{R})$, а преобразование Фурье $\widehat{\varphi}$ четно, при этом $\widehat{\varphi}=0$ вне $[-\pi-\varepsilon,\pi+\varepsilon]$, $\widehat{\varphi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ на $[-\pi+\varepsilon,\pi-\varepsilon]$, где $\varepsilon\in\bigl(0,\frac{\pi}{3}\bigr]$.

Такие функции и порожденные ими системы всплесков были построены Мейером [1]; изложение теории см. в [2, 3].

Возникает естественный вопрос: с какой скоростью может стремиться к нулю функция φ? Выбрав функцию $\widehat{\varphi}$ бесконечно гладкой, можно добиться, чтобы функция φ стремилась к нулю быстрее любой степени. Вместе с тем φ, как и любая ненулевая функция с финитным преобразованием Фурье, не может стремиться к нулю экспоненциально. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Теорема А. *Пусть функция* $\omega\colon [0,+\infty)\to[0,+\infty)$ *возрастает. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *Для любого (или, что равносильно, для некоторого) $a>0$ существует ненулевая функция γ, равная нулю вне $[-a,a]$ и такая, что $|\widehat{\gamma}(x)|\leqslant e^{-\omega(|x|)}$ при всех $x\in\mathbb{R}$.*
2. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\omega(x)}{x^2}\,dx<+\infty$.

Известно несколько доказательств теоремы А, иногда с немного различными формулировками [4; 5, глава V; 6, 7]. В [6] и [7] также приведены дополнительные ссылки; книга [7] специально посвящена этому кругу вопросов.

Ключевые слова: масштабирующая функция Мейера, преобразование Фурье.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 18-11-00055).

Таким образом, если интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x^2}\,dx$ расходится, то функция Мейера $\varphi = \widehat{\gamma}$ не может стремиться к нулю с той же скоростью, что и $e^{-\omega(|x|)}$, или быстрее.

Функция $\varphi = \widehat{\gamma}$ в теореме A не обязана обладать свойствами масштабирующей функции Мейера. В настоящей работе доказывается, что если $\frac{\omega(x)}{x}$ убывает, то сходимость указанного интеграла не только необходима, но и достаточна для существования масштабирующей функции Мейера с оценкой из пункта 1. Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть* $\omega\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, *функция* $\frac{\omega(x)}{x}$ *убывает. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *Для любого* (*или, что равносильно, для некоторого*) $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{3}]$ *существуют* $x_0 > 0$ *и масштабирующая функция Мейера* φ, *такая что* $\widehat{\varphi} = 0$ *вне* $[-\pi-\varepsilon, \pi+\varepsilon]$ *и* $|\varphi(x)| \leqslant e^{-\omega(|x|)}$ *при всех* $|x| > x_0$.

2. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x^2}\,dx < +\infty$.

Доказательство теоремы 1 опирается на некоторые факты о связи скорости роста норм производных периодической функции и скорости стремления к нулю ее коэффициентов Фурье, представляющие самостоятельный интерес.

В дальнейшем $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ – множества комплексных, вещественных, целых, натуральных чисел соответственно; C – пространство 2π-периодических непрерывных функций с равномерной нормой $\|\cdot\|$, $C^{(r)}$ – множество r раз непрерывно дифференцируемых функций из C; $c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt$ – коэффициенты Фурье функции f. Преобразование Фурье и свертка на оси определяются равенствами

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-iyt}\,dt, \qquad f*g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,dt.$$

При такой нормировке $\widehat{f*g} = \sqrt{2\pi}\widehat{f}\widehat{g}$. Если не указано противное, возрастание и убывание функции понимаются в нестрогом смысле. Через A и A_j обозначаются положительные постоянные, которые могут не совпадать в различных ситуациях.

§2. Леммы об интегралах

Лемма 1. *Пусть функция* $\tau\colon [0,+\infty)\to[0,+\infty)$ *убывает и суммируема.*

1. *Если* $u,v\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *и* $|u(x)|,|v(x)|\leqslant\tau(|x|)$ *при всех* $x\in\mathbb{R}$, *то*

$$|u*v(x)|\leqslant\left(\int\limits_{\mathbb{R}}(|u|+|v|)\right)\tau\left(\frac{|x|}{2}\right)$$

при всех $x\in\mathbb{R}$.

2. *Если* $u\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $c_k\in\mathbb{C}$, $|u(x)|\leqslant\tau(|x|)$, $|c_k|\leqslant\tau(|k|)$ *при всех* $x\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}$, *и если* $w(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}c_k u(x-k)$, *то*

$$|w(x)|\leqslant\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|+\sup_{t\in\mathbb{R}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|u(t-k)|\right)\tau\left(\frac{|x|}{2}\right)$$

при всех $x\in\mathbb{R}$.

Доказательство. Для определенности проведем оценку при $x\geqslant 0$. Имеем

$$\begin{aligned}|u*v(x)|&\leqslant\left|\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-\frac{x}{2},\frac{x}{2}]}u(x-t)v(t)\,dt\right|+\left|\int\limits_{-x/2}^{x/2}u(x-t)v(t)\,dt\right|\\&\leqslant\tau\left(\frac{x}{2}\right)\int\limits_{\mathbb{R}}|u|+\tau\left(\frac{x}{2}\right)\int\limits_{\mathbb{R}}|v|.\end{aligned}$$

Второе утверждение доказывается аналогично. □

Лемма 2. *Пусть* $\lambda\colon[1,+\infty)\to[0,+\infty)$, $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\lambda(x)}{x^2}\,dx<+\infty$, *функция* $\frac{\lambda(x)}{x}$ *убывает,* $\lambda_1(x)=\sup\limits_{1\leqslant t\leqslant x}\lambda(t)$. *Тогда* $\lambda_1\geqslant\lambda$, λ_1 *возрастает,* $\frac{\lambda_1(x)}{x}$ *убывает и* $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\lambda_1(x)}{x^2}\,dx<+\infty$.

Доказательство. Неравенство $\lambda_1 \geqslant \lambda$ и возрастание функции λ_1 очевидны. Докажем убывание функции $\frac{\lambda_1(x)}{x}$. Пусть $1 \leqslant x_1 < x_2$. Имеем

$$\frac{1}{x_2} \sup_{1 \leqslant t \leqslant x_1} \lambda(t) \leqslant \frac{1}{x_1} \sup_{1 \leqslant t \leqslant x_1} \lambda(t),$$

$$\frac{1}{x_2} \sup_{x_1 \leqslant t \leqslant x_2} \lambda(t) \leqslant \sup_{x_1 \leqslant t \leqslant x_2} \frac{\lambda(t)}{t} = \frac{\lambda(x_1)}{x_1} \leqslant \frac{1}{x_1} \sup_{1 \leqslant t \leqslant x_1} \lambda(t),$$

откуда и следует требуемое убывание.

Докажем сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\lambda_1(x)}{x^2}\,dx$. Обозначим

$$E_1 = \{x : \lambda_1(x) > \lambda(x)\}, \qquad E_2 = \{x : \lambda_1(x) = \lambda(x)\}.$$

Достаточно проверить конечность интеграла по E_1. Заметим, что функция λ_1 непрерывна (она не может иметь ни отрицательных, ни положительных скачков). Не умаляя общности, можно считать, что λ непрерывна слева. В противном случае ее можно исправить в точках разрыва, при этом функция λ_1 не изменится.

Проверим, что множество E_2 замкнуто. Пусть $x_n \in E_2$, $x_n \to x_0$; докажем, что $\lambda_1(x_0) = \lambda(x_0)$. Если $x_n < x_0$, то равенство очевидно ввиду непрерывности функций λ и λ_1 слева. Если $x_n > x_0$, то $\lambda(x_0) \leqslant \lambda_1(x_0) = \lambda(x_0+) \leqslant \lambda(x_0)$, поскольку λ не может иметь положительных скачков.

Из замкнутости множества E_2 и включения $1 \in E_2$ следует, что E_1 открыто и, следовательно, представляется в виде не более чем счетного объединения дизъюнктных интервалов (a_n, b_n), один из которых может оказаться бесконечным. Рассмотрим сначала конечные интервалы (a_n, b_n). Так как $a_n, b_n \in E_2$, имеем $\lambda_1(a_n) = \lambda(a_n)$, $\lambda_1(b_n) = \lambda(b_n)$. Докажем от противного, что функция λ_1 постоянна на каждом отрезке $[a_n, b_n]$. Пусть $\lambda_1(b_n) > \lambda_1(a_n)$. Ввиду непрерывности и возрастания функции λ_1 найдется такая точка $c \in (a_n, b_n)$, что $\lambda_1(t) < \lambda_1(c)$ при всех $t \in [1, c)$. По определению функции λ_1 найдется последовательность точек $t_j \in [1, c]$, такая что $\lambda(t_j) \to \lambda_1(c)$. Перейдя к подпоследовательности по принципу выбора Больцано–Вейерштрасса, можно считать, что $t_j \to t_0 \in [1, c]$. Тогда $\lambda_1(c) = \lambda(t_0)$ или $\lambda_1(c) = \lambda(t_0+)$. Но оба равенства невозможны, поскольку

$$\lambda(t_0+) \leqslant \lambda(t_0) < \lambda_1(t_0) \leqslant \lambda_1(c), \quad \text{если} \quad t_0 \in (a_n, c],$$

$$\lambda(t_0+) \leqslant \lambda(t_0) \leqslant \lambda_1(t_0) < \lambda_1(c), \quad \text{если} \quad t_0 \in [1, a_n].$$

То же рассуждение показывает, что если $b_n = +\infty$, то функция λ_1 постоянна на $[a_n, +\infty)$.

Следовательно,

$$\int\limits_{E_1} \frac{\lambda_1(x)}{x^2}\,dx = \sum_n \int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{\lambda_1(x)}{x^2}\,dx = \sum_n \lambda_1(a_n)\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n}\right)$$
$$= \sum_n \left(\frac{\lambda(a_n)}{a_n} - \frac{\lambda(b_n)}{b_n}\right) = \sum_n \int_{a_n}^{b_n} d\left(-\frac{\lambda(x)}{x}\right)$$
$$\leqslant \int\limits_1^{+\infty} d\left(-\frac{\lambda(x)}{x}\right) = \lambda(1) < +\infty. \qquad \square$$

Следствие 1. *Пусть* $\omega\colon [1, +\infty) \to [0, +\infty)$, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x^2}\,dx < +\infty$, *функция* $\frac{\omega(x)}{x}$ *убывает,* $\omega_1(x) = \sqrt{x}\sup\limits_{z\leqslant x} \frac{\omega(z)}{\sqrt{z}}$. *Тогда* $\omega_1 \geqslant \omega$, *функция* $\frac{\omega_1(x)}{\sqrt{x}}$ *возрастает, функция* $\frac{\omega_1(x)}{x}$ *убывает,* $\int_1^{+\infty} \frac{\omega_1(x)}{x^2}\,dx < +\infty$.

Для доказательства следствия надо применить лемму 2 к функции $\lambda(x) = \frac{\omega(x^2)}{x}$.

Хорошо известно следующее утверждение; см., например, его вариант для рядов в [8, п. 375]. Пусть $f\colon [1, +\infty) \to (0, +\infty)$, $\int\limits_1^{+\infty} f < +\infty$. Тогда существует такая функция $f_1\colon [1, +\infty) \to (0, +\infty)$, что $f(x) = o(f_1(x))$ при $x \to +\infty$ и по-прежнему $\int\limits_1^{+\infty} f_1 < +\infty$. В качестве f_1 можно взять, например,

$$f_1(x) = f(x)\left(\int\limits_x^{+\infty} f\right)^{-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1). \tag{1}$$

Если функция f убывает, то функция f_1, заданная формулой (1), не обязана убывать (например, она заведомо строго возрастает на промежутках постоянства функции f). Следующая лемма утверждает существование убывающей функции f_1 с указанными свойствами.

Лемма 3. 1. *Пусть функция* $f\colon [1,+\infty)\to(0,+\infty)$ *убывает,* $\int\limits_1^{+\infty} f<+\infty$. *Тогда существует такая убывающая функция* $f_1\colon [1,+\infty)\to(0,+\infty)$, *что* $f(x)=o(f_1(x))$ *при* $x\to+\infty$ *и* $\int\limits_1^{+\infty} f_1<+\infty$.

2. *Утверждение* 1 *остается верным, если заменить интегралы на* $\int\limits_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,dx$ *и* $\int\limits_1^{+\infty}\frac{f_1(x)}{x}\,dx$.

Доказательство. 1. Не умаляя общности, будем считать, что f непрерывно дифференцируема. Иначе продолжим f формулой $f(x)=f(1)$ при $x<1$ и положим

$$g_1(x)=\int\limits_{x-1}^{x} f,\quad g_2(x)=\int\limits_{x-1}^{x} g_1.$$

Легко видеть, что g_1 и g_2 удовлетворяют условиям леммы и, кроме того, g_1 непрерывна, g_2 непрерывно дифференцируема и $g_2\geqslant g_1\geqslant f$. Поэтому достаточно доказать лемму для функции g_2, то есть можно считать f непрерывно дифференцируемой.

Кроме того, будем считать, что $f(1)=1$ и что $f(x)\geqslant\frac{a}{x^2}$ при некотором $a\in(0,1]$; иначе надо рассмотреть функцию $\frac{1}{f(1)+1}\bigl(f(x)+\frac{1}{x^2}\bigr)$. Из сходимости интеграла и убывания функции f следует, что $f(x)\leqslant\frac{A}{x}$ при некотором $A\geqslant 1$.

Положим

$$f_1(x)=f(x)\left(\int\limits_{\varphi(f(x))}^{+\infty} f\right)^{-1/2},$$

где $\varphi\colon (0,1]\to[1,+\infty)$, $\varphi(y)\to+\infty$ при $y\to 0+$, функция φ убывает и дифференцируема. Соотношение $f(x)=o(f_1(x))$ очевидно. Функцию φ выберем так, чтобы обеспечить убывание функции f_1 и сходимость интеграла от f_1.

Возьмем производную:

$$\left(\int\limits_{\varphi(f(x))}^{+\infty} f\right)^{3/2} f_1'(x)=f'(x)\left(\int\limits_{\varphi(f(x))}^{+\infty} f+\frac{1}{2}f(x)\varphi'(f(x))f(\varphi(f(x)))\right).$$

Поскольку $f'(x) \leqslant 0$, остается добиться неотрицательности суммы в скобках. Взяв $\varphi(y) = 1 - \frac{2a}{A} \ln y$, получим

$$\int_{\varphi(f(x))}^{+\infty} f + \frac{1}{2} f(x) \varphi'(f(x)) f(\varphi(f(x))) = \int_{z}^{+\infty} f - \frac{a}{A} f(z),$$

где $z = \varphi(f(x))$. Тогда

$$\frac{a}{A} f(z) \leqslant \frac{a}{z} = a \int_{z}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leqslant \int_{z}^{+\infty} f(t)\, dt,$$

и убывание функции f_1 доказано.

При достаточно больших x будет

$$\varphi(f(x)) = 1 - \frac{2a}{A} \ln f(x) \leqslant 1 - \frac{2a}{A} \ln \frac{a}{x^2} < x,$$

а интеграл от $f(x) \left(\int_{x}^{+\infty} f \right)^{-1/2}$ сходится. Поэтому сходится и интеграл от f_1.

2. Доказательство аналогично, укажем лишь на отличающиеся детали. Можно считать, что $f(0) = 1$, $\frac{a}{x} \leqslant f(x) \leqslant 1$ при некотором $a \in (0, 1]$. Положим

$$f_1(x) = f(x) \left(\int_{\varphi(f(x))}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt \right)^{-1/2}.$$

Тогда

$$\left(\int_{\varphi(f(x))}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt \right)^{3/2} f_1'(x) = f'(x) \left(\int_{\varphi(f(x))}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt + \frac{1}{2} f(x) \varphi'(f(x)) \frac{f(\varphi(f(x)))}{\varphi(f(x))} \right).$$

Взяв $\varphi(y) = 1 - 2a \ln y$, получим

$$\int\limits_{\varphi(f(x))}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt + f(x)\varphi'(f(x))\frac{f(\varphi(f(x)))}{\varphi(f(x))} = \int\limits_{z}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt - a\frac{f(z)}{z}.$$

Тогда

$$a\frac{f(z)}{z} \leqslant \frac{a}{z} = a\int\limits_{z}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leqslant \int\limits_{z}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt,$$

откуда вытекает убывание функции f_1. $\square$

§3. Рост норм производных и коэффициенты Фурье

В этом параграфе исследуется следующий вопрос. Пусть $f \in C^{(\infty)}$, функция F голоморфна в области, содержащей множество значений функции f. Что можно сказать о скорости стремления к нулю коэффициентов Фурье функции $F \circ f$, если $|c_k(f)| \leqslant A_1 e^{-A_2\omega(|k|)}$, где ω — функция типа тех, что участвуют в теореме 1?

Ответ на этот вопрос опирается на три леммы. Две из них связывают скорость роста норм производных функции и скорость стремления к нулю ее коэффициентов Фурье, а третья оценивает рост норм производных композиции $F \circ f$ через рост норм производных функции f. Такая схема рассуждений применялась в [9], где доказано, что если $\alpha > 1$ и $\|f^{(r)}\| \leqslant A^r r^{r\alpha}$, т.е. f принадлежит классу Жевре G_α, то и $F \circ f$ принадлежит тому же классу.

Лемма 4. *Пусть $f \in C$, $\omega\colon [1, +\infty) \to (0, +\infty)$, функция $\frac{\omega(x)}{x^\alpha}$ возрастает при некотором $\alpha > 0$, $|c_k(f)| \leqslant A_1 e^{-A_2\omega(|k|)}$ при всех $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Тогда $\|f^{(r)}\| \leqslant A_3^r \left(\omega^{-1}(r\omega(1))\right)^r$ при всех $r \in \mathbb{N}$, где A_3 зависит лишь от A_1, A_2, ω и α.*

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $\omega(1) = 1$; иначе надо рассмотреть функцию $\frac{\omega}{\omega(1)}$. При всех $r \in \mathbb{N}$ имеем

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (ik)^r c_k(f) e^{ikx},$$

откуда

$$\begin{aligned}\|f^{(r)}\| &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^r |c_k(f)| \leqslant 2A_1 \sum_{k=1}^{\infty} k^r e^{-A_2\omega(k)} \\ &\leqslant 2A_1 e^{-A_2\omega(1)} + 2A_1 \sum_{k=1}^{\infty} 2^r \int\limits_{k-1}^{k} x^r e^{-A_2\omega(x)}\,dx \\ &\leqslant A_4^r \int_1^{+\infty} x^r e^{-A_2\omega(x)}\,dx.\end{aligned}$$

Обозначим $s = \omega^{-1}(r)$, тогда $r = \omega(s)$ и $s \geqslant 1$. Так как функция $\frac{\omega(x)}{x^\alpha}$ возрастает и $\omega(1) = 1$, имеем $\omega(x) \geqslant x^\alpha$, откуда $\omega^{-1}(x^\alpha) \leqslant x$, что равносильно условию $\omega^{-1}(y) \leqslant y^{1/\alpha}$. Поэтому $s \leqslant r^{1/\alpha} \leqslant A_5 2^r$.

Разобьем интеграл на два: от 1 до s и от s до $+\infty$. Ясно, что

$$I_1 = \int\limits_1^s x^r e^{-A_2\omega(x)}\,dx \leqslant \frac{e^{-A_2}}{r+1} s^{r+1} \leqslant A_6^r s^r.$$

Делая замену переменной $x = su$, находим

$$I_2 = \int\limits_s^{+\infty} x^r e^{-A_2\omega(x)}\,dx = s^{r+1} \int\limits_1^{+\infty} u^r e^{-A_2\omega(su)}\,du.$$

По условию леммы при всех $u, s \geqslant 1$ будет $\frac{\omega(su)}{(su)^\alpha} \geqslant \frac{\omega(s)}{s^\alpha}$, то есть $\omega(su) \geqslant u^\alpha r$. Отсюда

$$I_2 \leqslant s^{r+1} \int\limits_1^{+\infty} (ue^{-A_2 u^\alpha})^r\,du \leqslant A_7^r s^r.$$

Складывая оценки для I_1 и I_2, получаем требуемое. □

Лемма 5. *Пусть $g \in C^{(\infty)}$, $\eta\colon [1, +\infty) \to (0, +\infty)$, η строго возрастает к $+\infty$, $\|g^{(r)}\| \leqslant (A_1\eta(r))^r$ при всех $r \in \mathbb{N}$. Тогда $|c_k(g)| \leqslant e \cdot e^{-\eta^{-1}\left(\frac{|k|}{A_1 e}\right)}$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, $|k| > k_0$, где k_0 зависит лишь от A_1 и η.*

Доказательство. При всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $r \in \mathbb{N}$ имеем

$$|c_k(g)| = \left|(ik)^{-r} c_k(g^{(r)})\right| \leqslant |k|^{-r} \|g^{(r)}\|,$$

откуда

$$|c_k(g)| \leqslant \inf_{r\in\mathbb{N}} |k|^{-r}\|g^{(r)}\| \leqslant \inf_{r\in\mathbb{N}} \left(\frac{A_1}{|k|}\eta(r)\right)^r.$$

При $\frac{|k|}{A_1 e} \geqslant \eta(1)$ и $r = \left\lfloor \eta^{-1}\left(\frac{|k|}{A_1 e}\right)\right\rfloor$ имеем

$$\left(\frac{A_1}{|k|}\eta(r)\right)^r \leqslant e^{-\left\lfloor \eta^{-1}\left(\frac{|k|}{A_1 e}\right)\right\rfloor} \leqslant e\cdot e^{-\eta^{-1}\left(\frac{|k|}{A_1 e}\right)}. \qquad \square$$

Для классов функций, задаваемых условиями $|c_k(f)| \leqslant A|k|^\beta \theta^{|k|^{1/\alpha}}$ ($\alpha > 0$, $\beta\in\mathbb{R}$, $\theta \in (0,1)$) и $\|g^{(r)}\| \leqslant Ar^\tau q^r r^{r\alpha}$ ($\alpha, q > 0$, $\tau\in\mathbb{R}$), леммы 4 и 5 в значительно более сильном виде доказаны в [10]. Именно, в [10] найдены неулучшаемые по порядку оценки для $\|f^{(r)}\|$ и $|c_k(g)|$ на этих классах функций. Вместе с тем, множество мажорант, к которым применимы леммы 4 и 5, шире. Описание классов Жевре в терминах коэффициентов Фурье содержится также в [11].

Лемма 6. *Пусть Ω – область в $\mathbb{C}$, функция F голоморфна в Ω, E – промежуток в $\mathbb{R}$, функция $f\colon E\to\Omega$ бесконечно дифференцируема, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность положительных чисел, последовательность $\left\{nb_n^{-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ убывает. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $x_0 \in E$ и $|f^{(\nu)}(x_0)| \leqslant A_1^\nu b_\nu^\nu$ при всех $\nu\in\mathbb{N}$, то $|(F\circ f)^{(r)}(x_0)| \leqslant A_2^r b_r^r$ при всех $r\in\mathbb{N}$.*
2. *Если $E=\mathbb{R}$, $f\in C^{(\infty)}$ и $\|f^{(\nu)}\| \leqslant A_1^\nu b_\nu^\nu$ при всех $\nu\in\mathbb{N}$, то $\|(F\circ f)^{(r)}\| \leqslant A_2^r b_r^r$ при всех $r\in\mathbb{N}$.*

Здесь A_2 зависит лишь от A_1, F и расстояния от $f(E)$ до границы области Ω.

Доказательство. Второе утверждение очевидно следует из первого; докажем первое. Не умаляя общности, можно считать, что $x_0 = 0$. По условию $f(0)\in\Omega$. Возьмем такое $\delta > 0$, что $B = \{z : |z - f(0)| \leqslant \delta\} \subset \Omega$. Пусть $T_r(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{r} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} z^\nu$ – многочлен Тейлора функции f.

Обеспечим включение $T_r(z)\in B$. Возьмем $\varepsilon > 0$ (выбор числа ε уточним чуть позже) и положим $\rho_r(\varepsilon) = rb_r^{-1}\varepsilon$. Пусть $|z| \leqslant \rho_r(\varepsilon)$.

Тогда

$$
\begin{aligned}
|T_r(z) - f(0)| &= \left|\sum_{\nu=1}^{r} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} z^\nu\right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{r} A_1^\nu \frac{b_\nu^\nu}{\nu!} \rho_r^\nu(\varepsilon) \\
&= \sum_{\nu=1}^{r} A_1^\nu \left(\frac{b_\nu}{\nu}\frac{r}{b_r}\right)^\nu \frac{\nu^\nu}{\nu!}\varepsilon^\nu \leqslant \sum_{\nu=1}^{r} (A_1 e\varepsilon)^\nu < \frac{A_1 e\varepsilon}{1 - A_1 e\varepsilon} \leqslant \delta
\end{aligned}
$$

при $A_1 e\varepsilon \leqslant \frac{\delta}{1+\delta}$. Мы воспользовались неравенством $\nu! > (\nu/e)^\nu$ и убыванием величины νb_ν^{-1} по ν. Тем самым при $|z| \leqslant \rho_r(\varepsilon)$ будет $T_r(z) \in B$ и

$$
|(F \circ T_r)(z)| \leqslant \max_B |F| = A_3.
$$

По формуле Коши для производных

$$
(F \circ f)^{(r)}(0) = (F \circ T_r)^{(r)}(0) = \frac{r!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{(F \circ T_r)(z)}{z^{r+1}}\, dz,
$$

где γ_r – окружность радиуса $\rho_r(\varepsilon)$ с центром в нуле. Оценивая интеграл, находим

$$
\left|(F \circ f)^{(r)}(0)\right| \leqslant \frac{r! A_3}{2\pi} \cdot 2\pi \rho_r(\varepsilon) \cdot \frac{1}{\rho_r^{r+1}(\varepsilon)} = \frac{r! A_3}{\rho_r^r(\varepsilon)} \leqslant \frac{r^r A_3}{\rho_r^r(\varepsilon)} = A_3 \varepsilon^{-r} b_r^r. \ \square
$$

Как уже было отмечено, в случае $b_n = n^\alpha$, $\alpha > 1$ лемма 6 доказана в [9].

Теорема 2. *Пусть $f \in C^{(\infty)}$, Ω – область в $\mathbb{C}$, функция F голоморфна в Ω, $f(\mathbb{R}) \subset \Omega$, $\omega\colon [1, +\infty) \to (0, +\infty)$, функция $\frac{\omega(x)}{x^\alpha}$ возрастает при некотором $\alpha > 0$, а функция $\frac{\omega(x)}{x}$ убывает. Тогда если $|c_k(f)| \leqslant A_1 e^{-A_2\omega(|k|)}$ при всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то $|c_k(F \circ f)| \leqslant A_3 e^{-A_4\omega(|k|)}$ при всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, где A_3 и A_4 зависят лишь от A_1, A_2, ω, α, F и расстояния от $f(\mathbb{R})$ до границы области Ω.*

Доказательство. Заметим, что ввиду убывания функции $\frac{\omega(x)}{x}$ справедливо неравенство

$$
\omega\left(\frac{x}{A}\right) \geqslant \frac{\omega(x)}{A}, \quad A \geqslant 1. \tag{2}
$$

По лемме 4 будет $\|f^{(r)}\| \leqslant A_5^r \left(\omega^{-1}(r\omega(1))\right)^r$ при всех $r \in \mathbb{N}$. Положим $b_n = \omega^{-1}(n\omega(1))$. В силу убывания функции $\frac{\omega(x)}{x}$ последовательность $\left\{nb_n^{-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ убывает. По лемме 6 имеем

$$\|(F \circ f)^{(r)}\| \leqslant A_6^r \left(\omega^{-1}(r\omega(1))\right)^r$$

при всех $r \in \mathbb{N}$. Положим $\eta(y) = \omega^{-1}(y\omega(1))$. По лемме 5 и неравенству (2) будет

$$|c_k(F \circ f)| \leqslant A_7 e^{-A_8\omega(|k|)} \quad \text{при всех} \quad |k| > k_0,$$

а тогда такая же оценка с другими константами верна при всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. □

§4. Доказательство основной теоремы

Замечание 1. В теореме A можно считать функцию γ четной и положительной на $(-a, a)$.

Доказательство. Чтобы построить четную функцию, можно сначала построить функцию γ_1 для числа $\frac{a}{2}$ и положить

$$\gamma(y) = \frac{1}{2}\left(\gamma_1\left(\frac{a}{2} + y\right) + \gamma_1\left(\frac{a}{2} - y\right)\right).$$

Тогда функция γ, очевидно, ненулевая, четная, и $\widehat{\gamma}$ допускает ту же оценку.

Чтобы добиться неотрицательности, можно построить γ_1 по функции $\omega(2x)$ и положить $\gamma = \gamma_1^2$.

Наконец, чтобы сделать γ положительной на $(-a, a)$, достаточно построить неотрицательную функцию γ_1 для отрезка $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$, свернуть ее с характеристической функцией этого отрезка и нормировать. □

В [4–7] функция γ сразу была построена четной.

Доказательство теоремы 1. Случай, когда ω обращается в ноль, тривиален, поэтому будем считать функцию ω положительной.

Достаточно построить функцию γ, для которой выполняется более слабое неравенство

$$|\widehat{\gamma}(x)| \leqslant A_1 e^{-A_2\omega(|x|)} \tag{3}$$

с некоторыми положительными константами A_1 и A_2, зависящими от ω. Действительно, пусть для любой функции ω из условий теоремы построена функция γ, для которой верна оценка (3). Построим функцию ω_1 из леммы 3, которая тоже удовлетворяет условиям теоремы и такова, что $\omega(x) = o(\omega_1(x))$ при $x \to +\infty$, а затем построим функцию γ для ω_1. Тогда окажется, что

$$|\widehat{\gamma}(x)| \leqslant A_1 e^{-A_2\omega_1(|x|)} \leqslant e^{-\omega(|x|)}, \quad |x| > x_0.$$

Будем считать, что $\frac{\omega(x)}{\sqrt{x}}$ возрастает, иначе заменим ω на функцию ω_1 из следствия 1. Тем самым ω строго возрастает к $+\infty$.

Положим $a = \pi + \varepsilon$ и построим функцию γ_0 из теоремы A с учетом замечания 1. Тем самым функция γ_0 четна, положительна на $(-a, a)$, равна нулю вне $[-a, a]$ и $|\widehat{\gamma_0}(x)| \leqslant e^{-\omega(|x|)}$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Воспользуемся известным приемом построения масштабирующей функции с ортонормированными целочисленными сдвигами; см., например, [2, 3]. Положим $f(y) = 2\pi \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} \gamma_0^2(y + 2l\pi)$. Ясно, что $f \in C$ и $f > 0$. Положим еще $g = \frac{1}{\sqrt{f}}$, $\gamma = g\gamma_0$. Тогда $\varphi = \widehat{\gamma}$ – масштабирующая функция Мейера. Докажем, что для нее верна оценка (3).

По формуле суммирования Пуассона

$$f(y) = \sqrt{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\gamma_0^2}(k) e^{iky}.$$

Поскольку прямое преобразование Фурье четной функции совпадает с обратным, $\widehat{\gamma_0^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{\gamma_0} * \widehat{\gamma_0}$. Кроме того, $\widehat{\gamma}(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g)\widehat{\gamma_0}(x - k)$.

По первому утверждению леммы 1 имеем

$$\left|\widehat{\gamma_0^2}(x)\right| \leqslant A_3 e^{-\omega(\frac{|x|}{2})}, \quad x \in \mathbb{R},$$

откуда по неравенству (2) получаем

$$|c_k(f)| \leqslant A_4 e^{-\omega(\frac{|k|}{2})} \leqslant A_4 e^{-\frac{1}{2}\omega(|k|)}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

По теореме 2 будет

$$|c_k(g)| \leqslant A_7 e^{-A_8\omega(|k|)}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Наконец, по второму утверждению леммы 1 и неравенству (2) верна оценка (3). □

Список литературы

1. Y. Meyer, *Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d'opérateurs.* — Séminaire Bourbaki **662** (1985–86), 209–223.
2. И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам.* Ижевск: РХД, 2001.
3. И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков.* М.: Физматлит, 2005.
4. A. E. Ingham, *A note on Fourier transforms.* — J. London Math. Soc. **9** (1934), 29–32.
5. N. Levinson, *Gap and density theorems.* New York: AM, 1940.
6. W. A. J. Luxemburg, J. Korevaar, *Entire functions and Müntz – Szász type approximation.* — Trans. Amer. Math. Soc. **157** (1971), 23–37.
7. V. Khavin, B. Jöricke, *The uncertainty principle in harmonic analysis.* Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag, 1994.
8. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т.2, М.: Физматгиз, 1959.
9. E. Laeng, *Uncertainty inequalities for Fourier series of pairs of reciprocal positive functions.* — Bull. London Math. Soc. **31** (1999), 314–322.
10. П. Л. Ульянов, *О классах бесконечно дифференцируемых функций.* — Мат. сб. **181**, No. 5 (1990), 589–609.
11. Y. Taguchi, *Fourier coefficients of periodic functions of Gevrey classes and ultradistributions.* — Yokohama Math. J. **35** (1987), 51–60.

Vinogradov O. L. On the rate of decay of a Meyer scaling function.

A function with the following properties is called a Meyer scaling function: $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, its integral shifts $\varphi(\cdot + n)$, $n \in \mathbb{Z}$, are orthonormal in $L_2(\mathbb{R})$, and its Fourier transform $\widehat{\varphi}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-iyt}\,dt$ has the following properties: $\widehat{\varphi}$ is even, $\widehat{\varphi} = 0$ outside $[-\pi-\varepsilon, \pi+\varepsilon]$, $\widehat{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ on $[-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon]$, where $\varepsilon \in \bigl(0, \frac{\pi}{3}\bigr]$. Here is the main result of the paper. Assume that

$$\omega\colon [\,0, +\infty) \to [\,0, +\infty)$$

and the function $\frac{\omega(x)}{x}$ decreases. Then the following assertions are equivalent.

1. For every (or, equivalently, for some) $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{3}]$ there exists $x_0 > 0$ and a Meyer scaling function φ such that $\widehat{\varphi} = 0$ outside $[-\pi-\varepsilon, \pi+\varepsilon]$ and $|\varphi(x)| \leqslant e^{-\omega(|x|)}$ for all $|x| > x_0$.

2. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x^2}\,dx < +\infty$.

С.-Петербургский государственный университет
Россия, 198504, Санкт-Петербург
Университетский пр., д.28
E-mail: olvin@math.spbu.ru

Поступило 28 июля 2020 г.