Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 491, 2020 г.

А. В. Васин

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ЗИГМУНДА В ОБЛАСТЯХ

§1. Введение

Однородный C^k-гладкий сверточный оператор Кальдерона–Зигмунда в области определяется как интеграл в смысле главного значения

$$Tf(y) = PV \int f(x)K(y-x)\,dx,$$

где dx – мера Лебега в $\mathbb{R}^d$ и

$$K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^d}, \quad x \neq 0,$$

$\Omega(x)$ однородная функция нулевой степени, C^k-дифференцируемая в $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ с нулевым средним на единичной сфере. Функция $K(x)$ называется ядром Кальдерона–Зигмунда.

В заданной области $D \subset \mathbb{R}^d$ определим модификацию оператора T формулой

$$T_D f = (Tf)\chi_D, \quad \mathrm{supp} f \subset \mathrm{clos}(D).$$

Результаты работы мотивированы следующей теоремой (Матеу, Оробич и Вердера [8], см. также Аниконов [1]).

Теорема 1.1 ([8, Основная лемма])**.** *Пусть D ограниченная область с $C^{1+\alpha}$-гладкой границей, $0 < \alpha < 1$. Оператор T_D с четным ядром отображает пространство Липшица $\mathrm{Lip}_\alpha(D)$ в себя.*

В [14] теорема 1.1 была распространена на пространства функций “нулевой” гладкости между $\mathrm{Lip}_\alpha(D)$ и $\mathrm{BMO}(D)$. В данной работе мы рассматриваем операторы в классах Зигмунда высоких порядков гладкости в областях. Следуя Йенсену [4], определим функции роста общего вида.

Ключевые слова: операторы Кальдерона–Зигмунда с четным ядром, классы Зигмунда в областях, T(P)-теорема.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект No. 18-11-00053).

Определение 1.2. Непрерывная функция $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\omega(0) = 0$, называется функцией роста, если существует положительное число q_0, такое что выполняются два следующих свойства регулярности.

1. Для любого $q < q_0$ найдется положительная константа $C = C(q)$, такая что

$$\omega(st) < Cs^q\omega(t), \ s < 1. \tag{1}$$

2. Для любого $q > q_0$ найдется положительная константа $C = C(q)$, такая что

$$\omega(st) < Cs^q\omega(t), \ s > 1. \tag{2}$$

Заметим, что (1) означает, что функция $\frac{\omega(t)}{t^q}$ почти возрастает (эквивалентна возрастающей функции) для любого $q < q_0$. В частности, сама функция роста $\omega(t)$ является почти возрастающей. Аналогично, (2) означает, что функция $\frac{\omega(t)}{t^q}$ почти убывает для любого $q > q_0$. Последнее влечет, что $\omega(t)$ удовлетворяет известному свойству удвоения:

$$\sup_{t>0}\frac{\omega(2t)}{\omega(t)} < \infty. \tag{3}$$

Для функции роста ω определим тип $n = [q_0]$ как наименьшее целое число, не превосходящее q_0. Данный параметр определяет целую гладкость пространств Зигмунда, вводимых далее.

Пусть dx обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^d$. Пусть Q – куб в $\mathbb{R}^d$ со сторонами, параллельными координатным осям, обозначим через $|Q|$ объем куба Q и через $\ell = \ell(Q)$ длину его стороны. Также пусть $\mathcal{P}_n$ – пространство полиномов степени не выше n.

Определение 1.3. Для заданной функции роста ω типа $n > 0$, однородное пространство Зигмунда $\mathcal{C}_\omega(D)$ в области $D \subset \mathbb{R}^d$ состоит из функций $f \in L^1_{loc}(D, dx)$, для которых конечна полунорма Кампанато:

$$\|f\|_{\omega,D} = \sup_{Q\subset D}\inf_{P\in\mathcal{P}_n}\frac{1}{\omega(\ell)}\|f-P\|_{L^1(Q,dx/|Q|)}. \tag{4}$$

Замечание 1.4. Методы Кампанато [2], Мейерса [9], основанные на лемме Кальдерона–Зигмунда и используемые для пространств $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$ и $\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^d)$ (см. например, [7, раздел 1.2]), гарантируют в произвольной области D, что если $q_0 > 0$, то мы можем заменить L^1-норму в (4) любой L^p-нормой с $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Полученные полунормы эквивалентны и определяют то же самое пространство Зигмунда.

Замечание 1.5. Для целого положительного n и вещественного s функция роста $\omega_{n,s}(t) = t^n \log^s 1/t$ типа n и соответствующее пространство Зигмунда $\mathcal{C}_{n,s}(D) = \mathcal{C}_{\omega_{n,s}}(D)$ являются модельными примерами в статье.

Замечание 1.6. Проиллюстрируем выбор аппроксимирующих полиномов. Если заменить $\mathcal{P}_n(D)$ на $\mathcal{P}_k(D)$ порядка k в определении 1.3, мы получим $\mathcal{C}_{\omega,k}(D)$.

(1) Если $k > n$, то вариант неравенства Маршо для локальной полиномиальной аппроксимации (см. например, [7, гл. 4] для степенных функций роста) гарантирует, что полунормы в (4) определяют то же самое пространство по модулю полиномов $\mathcal{P}_k(D)$.

(2) Если $\omega(t) = o(t^n)$, то для $k < n$ пространство $\mathcal{C}_{\omega,k}(D)$ тривиально и совпадает с пространством аппроксимирующих полиномов $\mathcal{P}_k(D)$.

(3) Если $t^n = O(\omega(t))$, то $k = n - 1$ допустимо и приводит к шкале пространств Липшица–Бернштейна $\mathcal{C}_{\omega,n-1}(D)$. Шкала пространств Липшица–Бернштейна $\mathcal{C}_{\omega,n-1}(D)$ отлична от шкалы пространств Зигмунда $\mathcal{C}_{\omega}(D)$ и не рассматривается в данной работе, поскольку эти пространства не инвариантны относительно операторов Кальдерона–Зигмунда даже для $D = \mathbb{R}^d$.

§2. Основные результаты

2.1. T(P)-теорема. Известно, что однородные пространства $\mathcal{C}_{\omega}(\mathbb{R}^d)$ инвариантны относительно классических сверточных операторов Кальдерона–Зигмунда (см. Петре [10], Йенсен [4, 5]). В предположениях функциональных пространств, заданных в областях, естественно рассматривать неоднородные пространства. Поскольку для ограниченной липшицевой области D справедливо включение $\mathcal{C}_{\omega}(D) \subset L^1(D, dx)$, мы рассматриваем $\mathcal{C}_{\omega}(D)$ как банахово неоднородное пространство с нормой

$$\|f\| = \|f\|_{\omega,D} + \|f\|_{L^1(D,dx)}.$$

Метод доказательства теоремы 1.1 для “нулевой” гладкости представляет вариант T(1)-теоремы. Для высокого порядка гладкости ограниченность оператора T_D проверяется не на константах, а на конечном множестве полиномов. Толса и Пратс (см. [12]), исследуя операторы

Кальдерона–Зигмунда в пространствах Соболева, назвали данный метод T(P)-теоремой.

Чтобы сформулировать T(P)-теорему для классов Зигмунда $\mathcal{C}_\omega(D)$, определим следующую ассоциированную функцию роста:

$$\widetilde{\omega}(x) = \frac{\omega(x)}{1 + \int\limits_x^1 \omega(t) t^{-n-1} dt}. \tag{5}$$

Теорема 2.1. *Пусть ω – функция роста типа $n > 0$ и пусть $D \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченнная липшицева область. Пусть T – оператор Кальдерона–Зигмунда с C^{n+1}-гладким ядром. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *оператор T_D ограничен в пространстве $\mathcal{C}_\omega(D)$;*
(2) *для любого полинома $P \in \mathcal{P}_n(D)$ имеем*

$$T_D P \in \mathcal{C}_{\widetilde{\omega}}(D).$$

Замечание 2.2. Если функция роста ω типа n регулярна по Дини, т.е. интеграл

$$\int\limits_0 \frac{\omega(t)}{t^{n+1}} dt$$

сходится, то функция $\widetilde{\omega}(x)$ эквивалентна $\omega(x)$ и $\mathcal{C}_\omega(D) = \mathcal{C}_{\widetilde{\omega}}(D)$. Если же функция ω не регулярна по Дини, то $\widetilde{\omega} = o(\omega)$ и $\mathcal{C}_{\widetilde{\omega}}(D) \subsetneq \mathcal{C}_\omega(D)$.

Замечание 2.3. Функции $\widetilde{\omega}(x)$ и $\omega(x)$ имеют один и тот же тип n, поэтому пространство $\mathcal{C}_{\widetilde{\omega}}(D)$ определяется тем же множеством $\mathcal{P}_n$ аппроксимирующих полиномов.

Замечание 2.4. С другой стороны, неэквивалентные функции роста могут иметь эквивалентные ассоциированные функции. Например, для семейства $\omega_{n,s}(t) = t^n \log^s 1/t$ типа $n > 0$ из замечания 1.5 справедливо соотношение

$$\widetilde{\omega}_{n,s} \approx \omega_{n,-1}$$

при всех $s > -1$. Поэтому оператор T_D ограничен в $\mathcal{C}_{n,s}(D)$ при всех $s > -1$ тогда и только тогда, когда он ограничен в $\mathcal{C}_{n,s}(D)$ для некоторого $s > -1$.

Замечание 2.5. В условиях T(P)-теоремы мы предполагаем, что область D липшицева, и не рассматриваем области общего вида. В приложениях T(P)-теоремы оказывается, что граница области ∂D имеет гладкость на один больше гладкости пространства, заданного в этой области. Поэтому мы ограничиваемся липшицевыми областями (так же, как Толса и Пратс в [12]). На самом деле, нам всего лишь требуется возможность продолжения функций, заданных в области D, на все пространство $\mathbb{R}^d$. Для регулярных по Дини функций роста следуем классическим результатам о продолжении гладких функций с произвольных замкнутых множеств (см. Стейн [13, гл. VI]). В общем случае применяем метод Джонса [6] для BMO (или см. ДеВор, Шарпли [3] для пространств Бесова).

2.2. Регулярность образа характеристической функции. Чтобы установить ограниченность оператора T_D в пространствах Зигмунда и проверить условие (2) теоремы 2.1, мы накладываем дополнительные условия как на границу области D, так и на оператор T_D.

(1) Оператор Кальдерона–Зигмунда имеет четное C^{2n+1}-гладкое ядро.
(2) Граница области удовлетворяет ляпуновскому условию гладкости.

Определение 2.6. Для заданной функции роста ω типа n, такой что $\omega(t) = o(t^n)$, ограниченная область с липшицевой границей D называется $C^{1,\omega}$-ляпуновской областью, если ее граница может быть параметризована так, что внешняя единичная нормаль N к ∂D локально определена как C^{ω}-гладкая вектор-функция.

В главном результате работы устанавливается зависимость ограниченности оператора T_D в пространстве Зигмунда от гладкости границы области.

Теорема 2.7. *Пусть ω – функция роста типа n и $D \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с $C^{1,\widetilde{\omega}}$-ляпуновской границей. Пусть T – сверточный C^{2n+1}-гладкий оператор Кальдерона–Зигмунда с четным ядром. Тогда оператор T_D ограничен в пространстве Зигмунда $\mathcal{C}_\omega(D)$.*

Замечание 2.8. Для функции роста $\omega(t)$ типа n имеем $\widetilde{\omega}(t) = o(t^n)$, следовательно, $C^{1,\widetilde{\omega}}$-ляпуновские области корректно определены.

В доказательстве теоремы 2.7 устанавливается вспомогательный результат о регулярности образа характеристической функции области. Из этого результата следует, что T(P)-теорема сводится к некоторой T(1)-теореме.

Теорема 2.9. *Пусть ω – функция роста типа n, такая что $\widetilde{\omega}(t) = o(t^n)$, и пусть $D \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с $C^{1,\omega}$-ляпуновской границей. Пусть T –сверточный C^{2n+1}-гладкий оператор Кальдерона–Зигмунда с четным ядром. Тогда*

$$T_D\chi_D \in \mathcal{C}_\omega(D). \tag{6}$$

Стандартные методы [1, 8] оценок для $T_D\chi_D$ при малых гладкостях существенно используют известное свойство сокращения оператора Кальдерона–Зигмунда с четным ядром. Это свойство сокращения означает, в частности, что производные образа характеристической функции полупространства равны нулю вне его границы. Аппроксимируя границу гладкой области линейными поверхностями, удается свести оценки интегралов к оценкам по узким секторам, достаточным при малой гладкости.

Для высокого порядка гладкости мы приближаем границу области полиномиальными поверхностями вместо линейных пространств. Производные образа характеристической функции области, ограниченной полиномиальной поверхностью порядка выше одного, уже не обращаются в нуль. Доказывается дополнительное свойство сокращения для четного ядра, которое удобно для полиномиальных областей в $\mathbb{R}^d$. Методы теории функций комплексного переменного применялись в похожих исследованиях для оператора Берлинга в полиномиальных областях на плоскости в статье [11].

§3. Схема доказательства теорем

3.1. Доказательство T(P)-теоремы. Доказательство теоремы 2.1 в основном следует рассуждениям в [14, теорема 1.3] с заменой констант при малой гладкости на подходящие полиномы для гладкости высокого порядка. Пусть $f \in \mathcal{C}_\omega(D)$, требуется доказать, что $T_D f \in \mathcal{C}_\omega(D)$.

Определение 3.1. Для заданной функции $f \in \mathcal{C}_\omega(D)$ и куба $Q \subset D$ назовем $P_Q \in \mathcal{P}_n$ полиномом почти наилучшего приближения для f в Q, если

$$\|f - P_Q\|_{L^1(Q,dx/|Q|)} \lesssim \omega(\ell)\|f\|_{\omega,D}$$

с константой, не зависящей от f, Q.

Используя такой полином P_Q, положим (см. [14])

$$\begin{aligned} f_1 &= P_Q \chi_D, \\ f_2 &= (f - P_Q)\chi_{2Q}, \\ f_3 &= (f - P_Q)\chi_{D \setminus 2Q}. \end{aligned}$$

Отметим, что $f = f_1 + f_2 + f_3$. Данное разложение без первого слагаемого является стандартным для оценок операторов Кальдерона–Зигмунда в однородных пространствах. Здесь f_2 – это локальная часть функции (атом) с носителем в удвоенном кубе, а f_3 – глобальная часть.

Лемма 3.2. *Существуют полиномы $P_{k,Q}$, $k = 2, 3$, такие что*

$$\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |T_D f_k - P_{k,Q}| dx \leqslant C\omega(\ell)\|f\|,$$

где константа $C > 0$ не зависит от Q.

Доказательство леммы аналогично доказательству из [14]. При $k = 2$ используется ограниченность оператора T_D в L^2 и эквивалентность L^p-норм для различных p для локальной части. При $k = 3$ используем известные методы работы с сингулярными интегралами: диадические разложения и метод телескопического суммирования. Вывод оценок следует изложению Кислякова–Кругляка [7, гл. IV] для степенных функций роста. Свойства из определения 1.2 о почти возрастании и убывании позволяют перенести доказательство для функций роста общего вида.

Лемма сводит доказательство свойства $T_D f \in \mathcal{C}_\omega(D)$ к проверке аналогичного условия для полинома P_Q почти наилучшего приближения. В этом – главное отличие метода T(P)-теоремы от известных результатов для сингулярных интегральных операторов в однородных пространствах.

3.2. Доказательство теоремы 2.9. Как уже говорилось, теорема 2.9 следует из теоремы 2.7. В свою очередь, теорема 2.7 является непосредственным следствием утверждения, в котором проверяется, что образ характеристической функции $(T_D \chi_D)$ области D принадлежит некоторому вещественному классу Блоха в этой области.

Лемма 3.3. *Пусть ω – функция роста типа n, такая что $\widetilde{\omega}(t) = o(t^n)$, и пусть $D \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с $C^{1,\omega}$-ляпуновской границей. Пусть T – сверточный C^{2n+1}-гладкий оператор Кальдерона–Зигмунда с четным ядром. Тогда существует константа C_0, такая что для любой точки $x \in D$ справедлива оценка*

$$|\nabla^{n+1}(T_D\chi_D)(x)| \leqslant C_0 \frac{\omega(\operatorname{dist}(x, \partial D))}{\operatorname{dist}(x, \partial D)}. \tag{7}$$

Для того, чтобы доказать лемму, мы аппроксимируем границу области D некоторой полиномиальной областью локально в окрестности каждой граничной точки. Такая аппроксимация позволяет оценить по абсолютной величине интеграл по разности областей. Данный этап рассуждений следует рассуждениям из [14] для "нулевой" гладкости.

Во время оценок интегралов по полиномиальным областям учитываем, что производные образа характеристической функции такой области уже не обращаются в нуль. Тем не менее, такие производные можно вычислить явно. Здесь существенное значение играет следующее довольно неожиданное свойство сокращения сверточных операторов Кальдерона–Зигмунда с четным ядром.

Лемма 3.4. *Пусть T – сверточный C^{2n+1}-гладкий оператор Кальдерона–Зигмунда с четным ядром K. Пусть L^{d-1} – гиперплоскость, не проходящая через начало координат, dx' – мера Лебега на L^{d-1}. Тогда*

$$\int\limits_{L^{d-1}} K(x')dx' = 0.$$

Список литературы

1. D. S. Anikonov, *On the boundedness of a singular integral operator in the space* $C^\alpha(\overline{G})$. — Math. USSR-Sb., **33(4)** (1977), 447–464.
2. S. Campanato, *Proprieta di holderianita di alcune classi di funzioni.* [*Holder properties of certain function classes*]. — Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, **17(3)** (1963), 175–188.
3. R. A. DeVore, R. C. Sharpley, *Besov spaces on domains in* $\mathbb{R}^d$. — Trans. Amer. Math. Soc., **335**, No. 2 (1993), 843–864.
4. S. Janson, *Generalizations of Lipschitz spaces and an application to Hardy spaces and bounded mean oscillation.* — Duke Math. J., **47** (1980), 959–982.
5. S. Janson, *On functions with condition on mean oscilation.* — Ark. Mat., **14** (1976), 189–196.
6. P. W. Jones, *Extension theorems for* BMO. — Indiana Univ. Math. J., **29** (1980), 41–66.

7. S. Kislyakov, N. Kruglyak, *Extremal problems in interpolation theory, Whitney-Besicovitch coverings, and singular integrals.* — Birkhauser/Springer Basel AG (2013).
8. J. Mateu, J. Orobitg, J. Verdera, *Extra cancellation of even Calderón-Zygmund operators and quasiconformal mappings.* — J. Math. Pures Appl., **(9) 91**, No. 4 (2009), 402–431.
9. N. G. Meyers, *Mean oscillation over cubes and Holder continuity.* — Proc. Amer. Math. Soc., **15** (1964), 717–721.
10. J. Peetre, *On convolution operators leaving* $L^{p,\lambda}$ *spaces invariant.* — Ann. Mat. Pura Appl., **72** (1966), 295–304.
11. M. Prats, *Sobolev regularity of the Beurling transform on planar domains.* — Publ. Mat., **61** (2017), 291–336.
12. M. Prats, X. Tolsa, *A T(P) theorem for Sobolev spaces on domains.* — J. Funct. Anal., **268** (2015), 2946–2989.
13. E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions.* — Princeton University Press, Princeton (1970).
14. A. V. Vasin, *A T*1 *theorem and Calderon–Zygmund operators in Campanato spaces on domains.* — Math. Nachr., **292** (2019), 1392–1407.

Vasin A. V. Singular integral operators on Zygmund spaces on domains.

Given a bounded Lipschitz domain $D \subset \mathbb{R}^d$ and a Calderón–Zygmund operator T, we study the relationship between smoothness properties of ∂D and the boundedness of T on the Zydmund space $\mathcal{C}_\omega(D)$ defined for a general growth function ω. We prove a T(P)-theorem for the Zygmund spaces, checking the boundedness of T on a finite collection of polynomials restricted to the domain. Also, we obtain a new form of an extra cancellation property for the even Calderón–Zygmund operators in polynomial domains.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27,
Санкт-Петербург 191023, Россия
E-mail: andrejvasin@gmail.com

Поступило 21 сентября 2020 г.