Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 491, 2020 г.

В. Боровицкий

НЕРАВЕНСТВО ЛИТЛВУДА–ПЭЛИ–РУБИО ДЕ ФРАНСИА ДЛЯ ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УОЛША

§1. Введение

Пусть $\mathbf{Z}$ — какое-то счетное множество, $\{\phi_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ — ортонормированный базис в пространстве L^2, а M_I, где $I \subseteq \mathbf{Z}$, — оператор, действующий по закону $M_I f = \sum_{n\in I}\langle f, \phi_n\rangle\phi_n$. Если $M_I f = f$, мы будем говорить, что спектр функции f лежит в множестве I и писать при этом $\operatorname{spec} f \subseteq I$.

Пусть $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — какое-то разбиение множества $\mathbf{Z}$, а $f_k \in L^2$ такие, что $\operatorname{spec} f_k \subseteq I_k$, тогда выполнено равенство

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right\|_{L^2} = \left\|\left(\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^2}. \tag{1}$$

Это утверждение очевидным образом следует из равенства Парсеваля и в некотором смысле обобщает его: если I_k – одноэлементные подмножества множества $\mathbf{Z}$, получается в точности равенство Парсеваля.

Конечно, если L^2-норму в (1) заменить на L^p-норму для какого-то $p \neq 2$, равенство, вообще говоря, перестает быть верным. В этом случае интересен вопрос о соотношении между правой и левой частью (1). В частности, для конкретных базисов $\{\phi_n\}$ и некоторых классов разбиений $\mathbf{Z} = \cup_{k\in\mathbb{N}} I_k$ остается верным то или иное одностороннее неравенство с константой.

Ключевые слова: неравенство Литлвуда–Пэли, неравенство Рубио де Франсиа, система Уолша, теорема Ганди, мартингал, пространство Харди, двупараметрический, многопараметрические сингулярные интегральные операторы.

Работа была поддержана грантом в форме субсидий из федерального бюджета на осуществление государственной поддержки создания и развития международных математических центров мирового уровня (соглашение No. 075-15-2019-1620 между МОН и ПОМИ РАН) и грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Самым знаменитым из утверждений такого рода является неравенство Литлвуда–Пэли

$$c_p \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_{L^p} \leqslant C_p \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}, \ 1<p<\infty, \quad (2)$$

где $\phi_n(t) = e^{2\pi int}$, $n \in \mathbb{Z}$, – тригонометрическая система на отрезке $[0,1]$, а I_k – разбиение множества $\mathbb{Z}$ целых чисел в лакунарную по Адамару последовательность отрезков. [1]

Соответствующее утверждение для тригонометрической системы и для разбиений множества $\mathbb{Z}$ на произвольные отрезки доказал Рубио де Франсиа в 1985 году [16]. Он показал, что в этом случае выполняются односторонние неравенства

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_{L^p} \leqslant C_p \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p}, \qquad 1 < p \leqslant 2, \quad (3)$$

$$c_p \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_{L^p}, \qquad p \geqslant 2, \quad (4)$$

которые называют неравенствами Литлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа или просто неравенствами Рубио де Франсиа. Работа Рубио де Франсиа положила начало целой серии исследований: множество обобщений и расширений его результата было доказано к настоящему моменту.

Большинство обобщений посвящены случаю тригонометрической системы. В частности, в статьях [1,22] неравенство (3) было обобщено на случай показателей $0 < p \leqslant 2$. В статьях [7,17,23,24] было доказано обобщение неравенств (3), (4) на случай, когда ϕ_n, $n \in \mathbb{Z}^D$, – D-параметрическая тригонометрическая система, а I_k – произвольные прямоугольники в $\mathbb{Z}^D$, причем для неравенства (3) такое обобщение остается верным и для $p \leqslant 1$. Самим Рубио де Франсиа в оригинальной работе [16], а также другими авторами в работах [20,21] рассматривались некоторые весовые обобщения. В работах [11,14] рассматривались варианты неравенств такого рода в пространствах Мори–Компанато и

[1] Одновременно с работой [10] Литлвуда и Пэли, в которой доказывалось неравенство (2), вышла работа [15] Пэли, где аналогичные неравенства доказывались для системы Уолша, на которой мы концентрируемся в данной работе.

Трибеля–Лизоркина. Некоторым из перечисленных обобщений, а также и некоторым другим, посвящен обзор Лэйси [9].

Не так давно Осипов в работе [13] доказал вариант неравенства (3) для случая, когда ϕ_n, $n \in \mathbb{Z}_+$ – система (базис) Уолша. В данной заметке мы продолжаем эту линию исследований и доказываем неравенство (3) для двупараметрической системы Уолша ϕ_n, $n \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ и разбиений множества $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ в объединение произвольных прямоугольников I_k. Более точно, мы доказываем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $I_k = I_k^1 \times I_k^2$ – произвольные непересекающиеся прямоугольники в $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$. Пусть f_k – функции со спектром Уолша в I_k, то есть такие, что*

$$f_k(x_1, x_2) = \sum_{(n_1,n_2)\in I_k} (f_k, w_{n_1} w_{n_2}) w_{n_1}(x_1) w_{n_2}(x_2),$$

где w_{n_i} – стандартные функции Уолша, упорядоченные по Пэли.

Если $1 < p \leqslant 2$, то

$$\left\| \sum_k f_k \right\|_{L^p} \leqslant C_p \left\| \left(\sum_k |f_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p},$$

где C_p не зависит от выбора прямоугольников $\{I_k\}$ и функций $\{f_k\}$.

Доказательство теоремы основано на сформулированном Ф. Вайсом [18] мартингальном варианте теории двупараметрических сингулярных интегральных операторов Р. Феффермана и Журне [4, 7].

Теория Вайса используется, чтобы установить теорему 4 – двупараметрический аналог теоремы Ганди [6] об ограниченности операторов, которые переводят мартингалы в измеримые функции. Теорема 4 может быть весьма удобна для доказательства ограниченности операторов, действующих на пространствах двупараметрических мартингалов и, таким образом, является весьма интересным дополнительным результатом данной работы. [2]

Посредством применения комбинаторного рассуждения из работы Осипова [13] про однопараметрическую систему Уолша независимо по каждой из переменных, удается свести доказательство теоремы 1 к вопросу об ограниченности некоторого оператора. Этот вопрос разрешается с помощью теоремы 4.

[2] Автору неизвестно о каких-либо упоминаниях этой теоремы в литературе.

§2. Предварительные сведения

Здесь мы сформулируем предварительные сведения, необходимые для доказательства теоремы 1. Сначала мы введем понятие двупараметрических мартингалов и определим соответствующие классы Харди. Затем приведем некоторые сведения из атомной теории классов Харди, полезные для доказательства ограниченности операторов, отображающих мартингалы в измеримые функци. Наконец, мы напомним определение классических функций Уолша и определим двупараметрическую систему Уолша.

Несмотря на то, что для доказательства теоремы 1 мы будем использовать теорию l^2-значных функций и мартингалов, в данном разделе мы сконцентрируемся на скалярнозначном случае, дабы избежать громоздких обозначений, при этом сразу оговорившись, что все определения и утверждения тривиальным образом переносятся на l^2-значный случай.

2.1. Двупараметрические диадические мартингалы. Зададим семейство σ-алгебр $\{\mathcal{F}_{n_1,n_2}\}_{n_1\in\mathbb{Z}_+,n_2\in\mathbb{Z}_+}$: пусть $\mathcal{F}_{n_1,n_2}$ – σ-алгебра, порожденная диадическими прямоугольниками размера $2^{-n_1}\times 2^{-n_2}$, то есть

$$\mathcal{F}_{n_1,n_2}=\sigma\left(\left\{\left[\frac{k_1}{2^{n_1}},\frac{k_1+1}{2^{n_1}}\right]\times\left[\frac{k_2}{2^{n_2}},\frac{k_2+1}{2^{n_2}}\right]:0\leqslant k_i<2^{n_i}\right\}\right),$$

где $\sigma(\mathcal{H})$ обозначает σ-алгебру, порожденную элементами множества $\mathcal{H}$. Символом $\mathbb{E}_{n_1,n_2}$ будем обозначать оператор условного математического ожидания относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_{n_1,n_2}$.

Элементы $(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2_+$ будем часто заменять одной буквой n. Для $n,m\in\mathbb{Z}^2_+$ будем говорить, что $n\leqslant m$ тогда и только тогда, когда $n_1\leqslant m_1$ и $n_2\leqslant m_2$.

Определение. *Семейство интегрируемых функций* $u=\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}^2_+}$ *называется двупараметрическим диадическим мартингалом* (*в дальнейшем просто* “*мартингалом*”), *если*

1) *функция* u_n *измерима относительно* σ*-алгебры* $\mathcal{F}_n$ *для любого* $n\in\mathbb{Z}^2_+$,

2) *выполнено* $E_nu_m=u_n$ *для любых* n,m, *для которых* $n\leqslant m$.

Говорят, что мартингал u лежит в L^p для $0<p\leqslant\infty$, если $u_n\in L^p$ для всех $n\in\mathbb{Z}^2_+$ и $\|u\|_{L^p}:=\sup_{n\in\mathbb{Z}^2_+}\|u_n\|_{L^p}<\infty$. Для двупараметрических мартингалов, как и для однопараметрических, справедлив следующий факт [19]: если $u \in L^p$ при $1 < p < \infty$, то существует такая функция $g \in L^p$, что $u_n = \mathbb{E}_n g$ и

$$\lim_{\min(n_1,n_2)\to\infty} \|u_n - g\|_{L^p} = 0, \qquad \|u\|_{L^p} = \|g\|_{L^p}.$$

Мы, следуя распространенной практике, будем в таком случае отождествлять мартингал u с функцией g, специально это не оговаривая.

Мартингальные разности Δ_n определяются соотношением

$$\Delta_{n_1,n_2} u := u_{n_1,n_2} - u_{n_1-1,n_2} - u_{n_1,n_2-1} + u_{n_1-1,n_2-1},$$

где не определенные ранее символы $u_{n_1,-1}$ и u_{-1,n_2} полагаются равными нулю.

2.2. Пространства Харди двупараметрических диадических мартингалов. Для двупараметрических диадических мартингалов можно определить аналог квадратичной функции Литлвуда–Пэли.

Определение. *Квадратичная функция для мартингала u определяется следующим образом*

$$S(u) := \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}_+^2} |\Delta_n u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Норма $\|S(u)\|_{L^p}$ определяет так называемые мартингальные пространства Харди.

Определение. *Пусть $0 < p < \infty$. Мартингальное пространство Харди H^p (в дальнейшем просто "пространство Харди") состоит из мартингалов u, для которых*

$$\|u\|_{H^p} := \|S(u)\|_{L^p} < \infty.$$

Известно (см. [2, 3, 12]), что $\|S(u)\|_{L^p} \sim \|u\|_{L^p}$ для $1 < p < \infty$, то есть для таких p пространства L^p и H^p совпадают. Для $p \leqslant 1$ это не так, и пространства Харди становятся самостоятельными объектами.

Для пространств Харди справедлива следующая интерполяционная теорема

Теорема 2. *Пусть V – сублинейный оператор, ограниченно действующий из H^{p_0} в L^{p_0} и из H^{p_1} в L^{p_1}. Тогда V ограниченно действует между H^p и L^p для $p_0 < p < p_1$.*

Доказательство. См. [18, теорема A]. □

2.3. Ограниченность операторов в пространствах H^p. В тригонометрическом гармоническом анализе чрезвычайно полезным инструментом для доказательства ограниченности операторов в двупараметрических пространствах Харди является теорема Р. Феффермана [4]. Она позволяет получать ограниченность двупараметрических сингулярных интегральных операторов, проверяя некое условие, похожее по духу на стандартные критерии ограниченности однопараметрических сингулярных интегральных операторов.

Оказывается, что в мартингальном случае верно аналогичное утверждение, базирующееся, как и в тригонометрическом случае, на атомном разложении пространств Харди. Перед тем, как мы его представим, необходимо ввести два определения.

Во-первых, введем мартингальный вариант предатомов (rectangle atoms) Р. Феффермана.

Определение. *Функция* $a \in L^2$ *называется мартингальным* H^p*-предатомом (далее просто "предатомом"), если* 1) $\operatorname{supp} a \subseteq F$, *где* F *– диадический прямоугольник в* $[0,1)^2$,

2) $\|a\|_{L^2} \leqslant |F|^{1/2-1/p}$,

3) *для всех* $x, y \in [0,1)$ *выполнено* $\int\limits_0^1 a(u,y)du = \int\limits_0^1 a(x,u)du = 0$.

Как уже упоминалось ранее, атом может восприниматься и как функция, и как мартингал, в зависимости от контекста.

Во-вторых, введем класс операторов, удовлетворяющих тому самому "условию, похожему по духу на стандартные критерии ограниченности однопараметрических сингулярных интегральных операторов".

Определение. *Пусть* V *– оператор, который отображает мартингалы в измеримые функции. Он называется* H^p*-квазилокальным, если существует такое* $\delta > 0$, *что для любого* H^p*-предатома* a *с носителем на диадическом прямоугольнике* $R \subseteq [0,1)^2$ *и для произвольного* $r \in \mathbb{N}$ *выполнено*

$$\int\limits_{[0,1)^2 \setminus R_r} |Va|^p \leqslant C_p 2^{-\delta r},$$

где R_r *такой диадический прямоугольник, что* $R \subseteq R_r$ *и* $|R_r| = 2^{2r}|R|$, *а* C_p *– константа, зависящая только от* p.

Наконец, мы готовы сформулировать теорему.

Теорема 3. *Пусть V сублинейный оператор, являющийся H^p-квазилокальным для какого-то $0 < p \leqslant 1$. Если оператор V ограничен из L^2 в L^2, то*

$$\|Vu\|_{L^p} \leqslant C_p \|u\|_{H^p}, \quad u \in H^p.$$

Доказательство. См. [18, Theorem 2]. □

2.4. О двупараметрической системе Уолша. Напомним сначала определение классических однопараметрических функций Уолша.

Определение. *Система Уолша $\{w_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ это семейство кусочно постоянных функций одной переменной, определяющихся следующим образом. Во-первых, $w_0 = 0$. Далее, если $n > 0$ и $n = 2^{k_1} + \dots + 2^{k_s}$, $k_1 > k_2 > \dots > k_s \geqslant 0$, то*

$$w_n(x) := \prod_{i=1}^{s} r_{k_i+1}(x), \quad \text{где} \quad r_k(x) = \operatorname{sgn}\sin 2^k \pi x.$$

В литературе рассматриваются разные варианты упорядочивания функций Уолша. Порядок, использованный в данном выше определении, называется порядком Пэли. Мы будем рассматривать только его и не возвращаться больше к теме переупорядочиваний функций Уолша.

Двупараметрические функции Уолша определяются соотношением

$$w_{n_1,n_2}(x_1,x_2) = w_{n_1}(x_1)w_{n_2}(x_2).$$

Система $\{w_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+^2}$ является ортонормированным базисом в $L^2\left([0,1]^2\right)$. Кроме того, для функций f выполняются соотношения

$$(\mathbb{E}_{k_1,k_2} f)(x_1,x_2) = \sum_{n_1=0}^{2^{k_1}-1} \sum_{n_2=0}^{2^{k_2}-1} \langle f, w_n\rangle \, w_n(x_1,x_2),$$
$$(\Delta_{k_1,k_2} f)(x_1,x_2) = \sum_{n\in\delta_{k_1,k_2}} \langle f, w_n\rangle \, w_n(x_1,x_2),$$

где

$$\begin{aligned} \delta_{k_1,k_2} &= [2^{k_1-1}, 2^{k_1}-1] \times [2^{k_2-1}, 2^{k_2}-1], && k_1,k_2 > 0, \\ \delta_{0,k_2} &= \{0\} \times [2^{k_2-1}, 2^{k_2}-1], && k_2 > 0, \\ \delta_{k_1,0} &= [2^{k_1-1}, 2^{k_1}-1] \times \{0\}, && k_1 > 0, \\ \delta_{0,0} &= \{(0,0)\}, \end{aligned} \tag{5}$$

а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в $L^2\left([0,1]^2\right)$.

Если $w_n(\cdot), w_m(\cdot)$, $n,m \in \mathbb{Z}_+$ – две классические функции Уолша, то $w_n(x)w_m(x) = w_{n\dot{+}m}(x)$, где $\dot{+}$ – операция побитового исключающего или на двоичных представлениях чисел n и m:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k 2^k\right) \dot{+} \left(\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k 2^k\right) := \sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k+\beta_k \mod 2)2^k.$$

Если ввести на парах чисел $n=(n_1,n_2)$ и $m=(m_1,m_2)$ операцию

$$n\dot{+}m = (n_1\dot{+}m_1, n_2\dot{+}m_2),$$

то будет выполнено

$$w_n(x_1,x_2)w_m(x_1,x_2) = w_{n\dot{+}m}(x_1,x_2).$$

§3. Двупараметрическая теорема Ганди

Теорема 3 из предыдущего раздела позволяет сформулировать в двупараметрическом случае некоторый вариант теоремы Ганди, доказанной им в работах [5, 6]. Отметим, что наша формулировка будет наиболее близка к варианту теоремы Ганди, сформулированному в работе Кислякова [8].

Эта теорема, благодаря простоте своей формулировки, может быть весьма полезна для доказательства ограниченности операторов, переводящих двупараметрические мартингалы в измеримые функции, и поэтому мы хотим выделить ее как интересный дополнительный результат данной работы.

В формулировке теоремы будет упоминаться термин "простой мартингал". Мартингал u называется простым, если существует такое $m \in \mathbb{Z}_+^2$, что $u_n = \mathbb{E}_m u_n$ для любого $n \in \mathbb{Z}_+^2$.

Теорема 4. *Пусть V – сублинейный оператор, который переводит мартингалы в измеримые функции. Пусть также выполнены следующие два условия.*

1) *Оператор V ограничен в L^2.*
2) *Если u – простой мартингал, для которого $u_{0,0}=0$ и*

$$\Delta_n u = \mathbb{1}_{e_n}\Delta_n u, \quad \text{где } e_n \in \mathcal{F}_m \text{ для какого-то } m \leqslant n, m \neq n,$$

то $\{|Vu|>0\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+^2\setminus\{0\}} e_n$.

Тогда V действует из H^p в L^p для любого $0<p\leqslant 1$.

Доказательство. Пусть $0 < p \leqslant 1$. Покажем, что оператор V является H^p-квазилокальным, тогда утверждение будет следовать из теоремы 3.

Пусть a – H^p-предатомом с носителем на диадическом прямоугольнике $R \subseteq [0,1)^2$, а r – натуральное число. Нужно проверить, что

$$\int\limits_{[0,1)^2 \setminus R^r} |Va|^p\,(x_1,x_2)dx_1dx_2 \leqslant C_p 2^{-\delta r}. \tag{6}$$

для какого-то δ, не зависящего от a и r.

Соотношение (6) достаточно проверять только для предатомов, являющихся простыми мартингалами. Действительно, пусть оно выполняется для всех предатомов, являющихся простыми мартингалами, покажем, что оно выполняется для произвольного предатома a. Ясно, что $a_n = \mathbb{E}_n a$ – простой мартингал, причем a_n остается предатомом (условия определения 2.3 несложно проверить). Из соотношения

$$\lim_{\min(n_1,n_2)\to\infty} \|a_n - a\|_{L^2} = 0$$

следует, что

$$\lim_{\min(n_1,n_2)\to\infty} \|Va_n - Va\|_{L^2} = 0,$$

так как V действует ограниченно в L^2. Отсюда

$$\lim_{\min(n_1,n_2)\to\infty} \|Va_n - Va\|_{L^p} = 0.$$

Это обосновывает предельный переход в неравенстве (6) и дает в итоге оценку для исходного предатома a.

В дальнейшем в этом доказательстве предполагаем, что все предатомы являются простыми мартингалами.

Пусть пара $N \in \mathbb{Z}_+^2$ такова, что $R \in \mathcal{F}_N$, причем если $R \in \mathcal{F}_n$, то $N \leqslant n$. Благодаря тому, что $\operatorname{supp} a \subseteq R$ и благодаря свойству 3 в определении предатома, выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \Delta_n a &= \mathbb{1}_R \Delta_n a \quad \text{для } n \geqslant N, n \neq N, \\ \Delta_n a &= \mathbb{1}_\emptyset \Delta_n a \quad \text{иначе.} \end{aligned}$$

Кроме того, $a_{0,0} = 0$ также благодаря условию 3 определения предатома. Тогда из условия 2 доказываемой теоремы следует, что

$$\{(Va)>0\} \subseteq R,$$

откуда

$$\int\limits_{[0,1)^2\setminus R^r} |Va|^p (x_1, x_2) dx_1 dx_2 \leqslant \int\limits_{[0,1)^2\setminus R} |Va|^p (x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0.$$

Правая часть тривиальным образом не превосходит $C_p 2^{-\delta r}$ для произвольного $\delta > 0$. Это доказывает теорему. $\square$

Следствие. *Если условия теоремы 4 выполнены для какого-то $0 < p \leqslant 1$, то оператор V ограничен как оператор между L^s и L^s при $1 < s \leqslant 2$.*

Доказательство. Интерполяция между ограниченностью $V \colon H^p \to L^p$ и ограниченностью $V : L^2 \to L^2$ с помощью теоремы 2 дает требуемый результат. $\square$

§4. Вспомогательный оператор G

Здесь мы введем оператор, к вопросу об ограниченности которого будет в итоге сводиться доказательство теоремы 1, и докажем его ограниченность. Это двупараметрический вариант оператора G из работы Осипова [13].

Пусть задано некоторое семейство мульти-индексов $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}_+^2 \times \mathbb{Z}_+^2$. Элементы семейства $\mathcal{A}$ – это пары (j,k), где $j,k \in \mathbb{Z}_+^2$. Пусть δ_k – диадические прямоугольники (как в формуле (5)) и задано такое семейство пар $\{a_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{Z}_+^2$, что $\{a_{j,k} \dot{+} \delta_k\}_{(j,k)\in\mathcal{A}}$ – семейство взаимно непересекающихся подмножеств в $\mathbb{Z}_+^2$.

Лемма. *Рассмотрим оператор G, действующий на векторнозначную функцию $h = \{h_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}_+^4}$ из $L^p(l^2_{\mathbb{Z}_+^4})$, $1 < p \leqslant 2$, по закону*

$$(Gh)(x_1, x_2) := \sum_{(j,k)\in\mathcal{A}} w_{a_{j,k}}(x_1, x_2) \left(\Delta_k h_{j,k}\right)(x_1, x_2).$$

Тогда G ограничен как оператор из $L^p(l^2_{\mathbb{Z}_+^4})$ в L^p, то есть

$$\|Gh\|_{L^p} \leqslant C_p \|h\|_{L^p(l^2_{\mathbb{Z}_+^4})},$$

где константа C_p зависит только от p.

Доказательство. Так как в случае $1 < p \leqslant 2$ существует взаимно однозначное соответствие между функциями из L^p и мартингалами из L^p, оператор G можно воспринимать как оператор, отображающий

$l^2(\mathbb{Z}_+^4)$-значные мартингалы (а не $l^2(\mathbb{Z}_+^4)$-значные функции) в измеримые функции.

Мы докажем, что оператор G удовлетворяет всем условиям обобщения теоремы 4 на случай $l^2(\mathbb{Z}_+^4)$-значных мартингалов. Здесь мы пользуемся тем, что, как уже упоминалось, все определения и утверждения переносятся на l^2-значный случай.

Линейность оператора G, а значит и его сублинейность, очевидны.

Теорема Планшереля и то, что $\left\{a_{j,k}\dot{+}\delta_k\right\}_{(j,k)\in\mathcal{A}}$ – семейство взаимно непересекающихся подмножеств в $\mathbb{Z}_+^2$, дают ограниченность оператора G в L^2.

Наконец, пусть u – простой $l^2(\mathbb{Z}_+^4)$-значный мартингал, для которого $u_{0,0} = 0$ и $\Delta_n u = \mathbb{1}_{e_n}\Delta_n u$, где $e_n \in \mathcal{F}_m$, $m \leqslant n, m \neq n$. Покажем, что выполнено $\{|Gu| > 0\} \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+^2\setminus\{0\}} e_n$.

Действительно,

$$\begin{aligned}\{|Gu| > 0\} &\subseteq \bigcup_{(j,k)\in\mathcal{A}} \left\{\left|w_{a_{j,k}}\Delta_k u_{j,k}\right| > 0\right\} = \bigcup_{(j,k)\in\mathcal{A}} \{|\Delta_k u_{j,k}| > 0\} \\ &= \bigcup_{(j,k)\in\mathcal{A}} \{|\mathbb{1}_{e_k}\Delta_k u_{j,k}| > 0\} \subseteq \bigcup_{(j,k)\in\mathcal{A}} \{|\mathbb{1}_{e_k}| > 0\} \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{Z}_+^2\setminus\{0\}} e_k. \qquad \square\end{aligned}$$

§5. Доказательство теоремы 1

Здесь мы, пользуясь теорией, представленной в предыдущих разделах, докажем наконец теорему 1.

Доказательство. Как и в [13], мы построим разбиение прямоугольников I_k на фрагменты, которые хорошо ведут себя под действием операторов сдвига. Это позволит свести доказываемое утверждение к лемме 4 и утверждению об ограниченности квадратичной функции.

Пусть

$$I_k = I_k^1 \times I_k^2 = [a_k^{(1)}, b_k^{(1)} - 1] \times [a_k^{(2)}, b_k^{(2)} - 1].$$

Разбиение прямоугольников I_k мы получим как произведение разбиений отрезков I_k^1 и I_k^2. При этом разбивать отрезки I_k^i мы будем точно так же, как это было сделано в [13].

Напомним, что в [13] было построено разбиение отрезка $I = [a, b-1] \subseteq \mathbb{Z}_+$,

$$I = \{a\} \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{r} J_j\Big) \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{s} \tilde{J}_j\Big) = \Big(\bigcup_{j=0}^{r} J_j\Big) \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{s} \tilde{J}_j\Big),$$

где $r, s \in \mathbb{Z}_+$ – какие-то числа, $J_0 = \{a\}$ и J_j, $\tilde{J}_j$ – взаимно не пересекающиеся множества. Кроме того, для $j > 0$ выполнено $|J_j| = 2^{\kappa_j}$, $\left|\tilde{J}_j\right| = 2^{\gamma_j}$, где κ_j – строго возрастающая, а γ_j – строго убывающая последовательности чисел из $\mathbb{Z}_+$.

Наиболее важным свойством отрезков J_j и $\tilde{J}_j$ является то, что при сдвиге они переходят в диадические отрезки

$$a \dot{+} J_0 = \{0\}\,, \quad a \dot{+} J_j = [2^{\kappa_j}, 2^{\kappa_j+1} - 1], \quad b \dot{+} \tilde{J}_j = [2^{\gamma_j}, 2^{\gamma_j+1} - 1], \tag{7}$$

благодаря чему выполнено

$$\Delta_{\kappa_j+1} w_a f = w_a f, \quad \text{если} \quad \operatorname{spec} f \subseteq J_j, \tag{8}$$

$$\Delta_{\gamma_j+1} w_b f = w_b f, \quad \text{если} \quad \operatorname{spec} f \subseteq \tilde{J}_j. \tag{9}$$

Если теперь задан прямоугольник $I = I^1 \times I^2 = [a^{(1)}, b^{(1)} - 1] \times [a^{(2)}, b^{(2)} - 1] \subseteq \mathbb{Z}_+^2$, то разбив каждый из отрезков I^i представленным выше способом и рассмотрев всевозможные декартовы произведения получившихся подотрезков, получим

$$I = \Big(\bigcup_j A_j\Big) \cup \Big(\bigcup_j B_j\Big) \cup \Big(\bigcup_j C_j\Big) \cup \Big(\bigcup_j D_j\Big),$$

где

$$A_j = J^{(1)}_{j^{(1)}} \times J^{(2)}_{j^{(2)}}, \quad B_j = \tilde{J}^{(1)}_{j^{(1)}} \times \tilde{J}^{(2)}_{j^{(2)}},$$
$$C_j = \tilde{J}^{(1)}_{j^{(1)}} \times J^{(2)}_{j^{(2)}}, \quad D_j = J^{(1)}_{j^{(1)}} \times \tilde{J}^{(2)}_{j^{(2)}},$$

при этом верхний индекс указывает на то, к разбиению какого из отрезков I^1, I^2 относится индексируемый объект.

Построенное разбиение прямоугольника I обладает свойствами, аналогичными соотношениям (8), (9). Пусть пары a, b, c, d суть вершины прямоугольника I, то есть

$$a := \big(a^{(1)}, a^{(2)}\big), \; b := \big(b^{(1)}, b^{(2)}\big), \; c := \big(b^{(1)}, a^{(2)}\big), \; d := \big(a^{(1)}, b^{(2)}\big),$$

тогда

$$\Delta_{\kappa^{(1)}_{j_1}+1,\kappa^{(2)}_{j_2}+1} w_a f = w_a f, \quad \text{если} \quad \operatorname{spec} f \subseteq A_j, \tag{10}$$

$$\Delta_{\gamma^{(1)}_{j_1}+1,\gamma^{(2)}_{j_2}+1} w_b f = w_b f, \quad \text{если} \quad \operatorname{spec} f \subseteq B_j, \tag{11}$$

$$\Delta_{\gamma^{(1)}_{j_1}+1,\kappa^{(2)}_{j_2}+1} w_c f = w_c f, \quad \text{если} \quad \operatorname{spec} f \subseteq C_j, \tag{12}$$

$$\Delta_{\kappa^{(1)}_{j_1}+1,\gamma^{(2)}_{j_2}+1} w_d f = w_d f, \quad \text{если} \quad \operatorname{spec} f \subseteq D_j. \tag{13}$$

Эти свойства имеют ключевое значение для дальнейших рассуждений.

Итак, построим такое разбиение для всех прямоугольников I_k, добавляя дополнительный индекс k всем объектам, возникающим в этом построении. Тогда функция f_k со спектром Уолша в прямоугольнике I_k представима в виде

$$f_k = \sum_j f^A_{k,j} + \sum_j f^B_{k,j} + \sum_j f^C_{k,j} + \sum_j f^D_{k,j},$$

где $\operatorname{spec} f^A_{k,j} \subseteq A_{k,j}$, $\operatorname{spec} f^B_{k,j} \subseteq B_{k,j}$, $\operatorname{spec} f^C_{k,j} \subseteq C_{k,j}$, $\operatorname{spec} f^D_{k,j} \subseteq D_{k,j}$.

Пусть, по определению,

$$g^A_{k,j} = w_{a_k} f^A_{k,j},\ g^B_{k,j} = w_{b_k} f^B_{k,j},\ g^C_{k,j} = w_{c_k} f^C_{k,j},\ g^D_{k,j} = w_{d_k} f^D_{k,j}.$$

Тогда $\sum\limits_k f_k$ представляется в виде

$$\sum_k \Big(w_{a_k} \sum_j g^A_{k,j} + w_{b_k} \sum_j g^B_{k,j} + w_{c_k} \sum_j g^C_{k,j} + w_{d_k} \sum_j g^D_{k,j} \Big).$$

Применяя к этому выражению лемму 4, что возможно благодаря свойствам (10)–(13), а затем применяя неравенство треугольника, получаем

$$\Big\| \sum_k f_k \Big\|_{L^p} \lesssim \Big\| \Big(\sum_k \Big(\sum_j |g^A_{k,j}|^2 + \sum_j |g^B_{k,j}|^2 + \sum_j |g^C_{k,j}|^2 + \sum_j |g^D_{k,j}|^2 \Big) \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p}$$

$$\leqslant \Big\| \Big(\sum_k \sum_j |g^A_{k,j}|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p} + \Big\| \Big(\sum_k \sum_j |g^B_{k,j}|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p} \tag{14}$$

$$+ \Big\| \Big(\sum_k \sum_j |g^C_{k,j}|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p} + \Big\| \Big(\sum_k \sum_j |g^D_{k,j}|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p}. \tag{15}$$

Здесь и далее символ $\lesssim$ означает неравенство с точностью до константы.

Рассмотрим теперь отдельно, например, третье слагаемое. Можно заметить, что

$$w_{c_k} f_k = w_{c_k \dot{+} a_k} \sum_j g_{k,j}^A + w_{c_k \dot{+} b_k} \sum_j g_{k,j}^B + \sum_j g_{k,j}^C + w_{c_k \dot{+} d_k} \sum_j g_{k,j}^D,$$

причем $\Delta_{\gamma_{k,j_1}^{(1)}+1, \kappa_{k,j_2}^{(2)}+1} w_{c_k} f_k = g_{k,j}^C$. То есть в разложении $w_{c_k} f_k = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+^2} \Delta_n w_{c_k} f_k$ функции $g_{k,j}^C$ являются слагаемыми. В частности,

$$\sum_j \left| g_{k,j}^C \right|^2 \leqslant \sum_{n \in \mathbb{Z}_+^2} \left| \Delta_n w_{c_k} f_k \right|^2 = \big(S(w_{c_k} f_k) \big)^2,$$

где S – квадратичная функция. Пользуясь ограниченностью векторнозначной квадратичной функции, которая доказывается аналогично утверждению об ограниченности обыкновенной квадратичной функции [2, 3, 12] (см. также книгу [19]), получаем

$$\left\| \left(\sum_k \sum_j \left| g_{k,j}^C \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \leqslant \left\| \left(\sum_k \sum_{n \in \mathbb{Z}_+^2} \left| \Delta_n w_{c_k} f_k \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p}$$
$$\lesssim \left\| \left(\sum_k \left| w_{c_k} f_k \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} = \left\| \left(\sum_k |f_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p}.$$

Абсолютно аналогичным образом можно оценить каждое из четырех слагаемых в выражениях (14), (15). Соединяя вместе полученные таким образом оценки, выводим наконец

$$\left\| \sum_k f_k \right\|_{L^p} \lesssim \left\| \left(\sum_k |f_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p}, \tag{16}$$

что и требовалось доказать. □

Замечание. В свете работ [23] и [24] естественно спросить, справедлив ли аналог теоремы 1 для кратной системы Уолша и произвольных попарно не пересекающихся параллелепипедов (вместо прямоугольников). Автор планирует обратиться к нему в будущем. Пока отметим только, что прямых аналогов теоремы 3 для кратных мартингалов нет и, видимо, ее придется заменить более точным утверждением.

Список литературы

1. J. Bourgain, *On square functions on the trigonometric system.* — Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B, **37**, No. 1 (1985), 20–26.
2. J. Brossard, *Comparaison des "Normes" L_p du Processus Croissant et de la Variable Maximale Pour Les Martingales Régulières à Deux Indices. Théorème Local Correspondant.* — The Annals of Probability, , (1980), 1183–1188.
3. J. Brossard, *Régularité des martingales à deux indices et inégalités de normes.* Processus Aléatoires à Deux Indices, Springer, 1981, 91–121.
4. R. Fefferman, *Calderon-Zygmund theory for product domains: H^p spaces.* — Proceedings of the National Academy of Sciences, **83**, No. 4 (1986), 840–843.
5. R. F. Gundy, *Inégalités pour martingales à un et deux indices: L'espace H^p*, Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour viii-1978, 1980, 251–334.
6. R. F. Gundy, *A decomposition for L^1-bounded martingales.* — The Annals of Mathematical Statistics, **39**, No. 1 (1968), 134–138.
7. J.-L. Journé, *Calderón-Zygmund operators on product spaces.* — Revista matemática iberoamericana **1**, No. 3 (1985), 55–91.
8. S. V. Kislyakov, *Martingale transforms and uniformly convergent orthogonal series.* — Journal of Soviet Mathematics, **37**, No. 5 (1987), 1276–1287.
9. M. T. Lacey, *Issues related to Rubio de Francia's Littlewood–Paley Inequality: A Survey.* `arXiv preprint math/0306417` (2003).
10. J. E. Littlewood and R. EAC Paley, *Theorems on Fourier series and power series.* — Journal of the London Mathematical Society **1**, No. 3 (1931), 230–233.
11. E. Malinnikova, N. N. Osipov, *Two Types of Rubio de Francia Operators on Triebel–Lizorkin and Besov Spaces.* — Journal of Fourier Analysis and Applications **25**, No. 3 (2019), 804–818.
12. Ch. Métraux, *Quelques inégalités pour martingales à paramètre bidimensionnel.* Séminaire de Probabilités XII, Springer, 1978, 170–179.
13. N. Osipov, *Littlewood–Paley–Rubio de Francia inequality for the Walsh system.* — St. Petersburg Mathematical Journal, **28**, No. 5 (2017), 719–726.
14. N. N. Osipov, The Littlewood–Paley–Rubio de Francia inequality in Morrey-Campanato spaces. — Sbornik: Mathematics **205**, No. 7 (2014), 1004.
15. R. EAC Paley, *A remarkable series of orthogonal functions.* — Proc. London Math. Soc. **34**, No. 1 (1931), 241–279.
16. R. de Francia, L. José, *A Littlewood–Paley inequality for arbitrary intervals.* — Revista Matematica Iberoamericana **1**, No. 2 (1985), 1–14.
17. F. Soria, *A note on a Littlewood-Paley inequality for arbitrary intervals in $\mathbb{R}^2$.* — J. London Math. Soc., **2**, No. 1 (1987), 137–142.
18. F. Weisz, *Cesaro summability of two-parameter Walsh–Fourier series.* — J. Approx. Theory, **88**, No. 2 (1997), 168–192.
19. F. Weisz, *Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier analysis.* Springer, 2006.
20. В. Боровицкий, Весовое неравенство Литлвуда–Пэли для произвольных прямоугольников в $\mathbb{R}^2$. — Алгебра и анализ **32**, No. 6 (2020), ???–???.
21. С. В. Кисляков, *Теорема Литлвуда–Пэли для произвольных интервалов: весовые оценки.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **355** (2008), 180–198.

22. С. В. Кисляков, Д. В. Парилов, *О теореме Литлвуда–Пэли для произвольных интервалов.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **327** (2005), 98–114.
23. Н. Н. Осипов, *Неравенство Литлвуда–Пэли для произвольных прямоугольников в* $\mathbb{R}^2$ *при* $0 < p \leqslant 2$. — Алгебра и анализ **22**, No. 2 (2010), 164–184.
24. Н. Н. Осипов, *Одностороннее неравенство Литлвуда–Пэли в* $\mathbb{R}^n$ *для* $0 < p \leqslant 2$. — Зап. науч. семин. ПОМИ **376** (2010), 88–115.

Borovitskiy V. Littlewood–Paley–Rubio de Francia inequality for the two-parameter Walsh system.

We prove a version of Littlewood–Paley–Rubio de Francia inequality for the two-parameter Walsh system: for any family of disjoint rectangles $I_k = I_k^1 \times I_k^2$ in $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ and a family of functions f_k with Walsh spectrum inside I_k the following is true

$$\Big\|\sum_k f_k\Big\|_{L^p} \leqslant C_p \Bigg\|\Big(\sum_{k=1} |f_k|^2\Big)^{1/2}\Bigg\|_{L^p}, \qquad 1 < p \leqslant 2,$$

where C_p does not depend on the choice of rectangles $\{I_k\}$ or functions $\{f_k\}$. The arguments are based on the atomic theory of two-parameter martingale Hardy spaces. In the course of the proof, we formulate a two-parametric version of the Gundy theorem on the boundedness of operators taking martingales to measurable functions, which might be of independent interest.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
С.-Петербургский государственный
университет, С.-Петербург, Россия
E-mail: viacheslav.borovitskiy@gmail.com

Поступило 27 августа 2020 г.