Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 491, 2020 г.

М. В. Бабушкин

ОЦЕНКИ ПОСТОЯННОЙ В НЕРАВЕНСТВЕ ТИПА ДЖЕКСОНА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§1. Введение

Пусть C – пространство непрерывных 2π-периодических функций, $E_n(f)$ – наилучшее приближение функции $f \in C$ тригонометрическими полиномами порядка меньше n, $\omega_m(f, h)$ – модуль непрерывности порядка m функции f с шагом h.

В теории аппроксимации известно неравенство типа Джексона

$$E_n(f) \leqslant \frac{J(m, r, \tau)}{n^r} \omega_m(f^{(r)}, \tau/n).$$

Имеется не так много случаев, когда найдена точная постоянная J в этом неравенстве. Многие исследования посвящены хорошим оценкам для J.

При этом каждое такое исследование улучшает оценки лишь в определённом диапазоне значений m, r и τ. Например, в случае $m \geqslant 2$, $r \to +\infty$, $\tau \geqslant \pi$ лучшей оказывается оценка, найденная в [1, гл. 3, §5, теорема 2]; при $m \to +\infty$, $r \in \mathbb{N}$, $\tau < \pi$ – в [1, гл. 7, §1, теорема 4] (где она выражена через нормы сумм Рисса, оцененные в [2]); при $m \in \mathbb{N}$, $r = 0$, $\tau \to +\infty$ – в [3, гл. 2, §3, теорема 3]; при $m \in \mathbb{N}$, $r = 0$, $\tau \to +0$ – в [4]; при $m \geqslant 10$, $r = 0$ и некоторой окрестности точки $\tau = \pi$ – в [5]. Работы, содержащие рекордные оценки при малых значениях m, r и некоторых τ: при $r = 0$, $m = 2$ – [6]; $r = 0$, $m = 4, 6, 8$ – [7]; при малых $r \in \mathbb{N}$ – [8] (эта статья обобщает статью [9]).

В данной работе устанавливаются оценки для постоянной J, которые улучшают известные в случае $m \to +\infty$, $r \in \mathbb{N}$, $\tau \geqslant \pi$. Вычисления показывают, что они меньше известных и для некоторых малых значений m, r и τ.

Наилучшие в указанном случае оценки до настоящего момента содержались в [5], где также имеется подробное сопоставление различных результатов.

Ключевые слова: неравенства Джексона, прямые теоремы теории аппроксимации, функции Стеклова, наилучшее приближение, модуль непрерывности.

Техника получения оценок в данной работе в целом аналогична таковой из работы [5]. При этом также ключевую роль играют модификации функций Стеклова $S_{h,2,m}f$ (определены формулой (1)). Неравенство Джексона выводится из соотношений

$$\begin{aligned}E_n(f) &\leqslant E_n(f - S^l_{h,2,m}f) + E_n(S^l_{h,2,m}f)\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{l-1} E_n(S^k_{h,2,m}(f - S_{h,2,m}f)) + E_n(S^l_{h,2,m}f).\end{aligned}$$

Каждое слагаемое мажорируется модулем непрерывности производной функции f. Улучшение возникающей при этом постоянной достигается за счёт несколько иного, чем в [5], способа оценивания величины $E_n(S^k_{h,2,m}(f - S_{h,2,m}f))$.

В следующем пункте вводятся необходимые обозначения, после чего формулируется основной результат работы (теорема 1), доказательство которого содержится в §2. Далее в §3 даётся описание асимптотического поведения найденной оценки для $J(m, r, \tau)$, на основании которого в §4 она сравнивается с оценкой из [5]. В завершение для малых значений m и r в случаях $\tau = \pi$ и $\tau = 2\pi$ приводятся вычисленные приближённо наилучшие оценки для $J(m, r, \tau)$ среди работ, упомянутых во введении.

1.1. Обозначения и известные утверждения. В дальнейшем $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ – множества вещественных, неотрицательных вещественных, целых, неотрицательных целых, натуральных чисел соответственно; $[a : b] = [a, b] \cap \mathbb{Z}$. Функции, имеющие в некоторой точке устранимый разрыв, доопределяются в этой точке по непрерывности; в других случаях символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0.

Через C обозначается пространство непрерывных 2π-периодических функций f с нормой $\|f\| = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$; C^r – пространство r раз непрерывно дифференцируемых функций из C.

Если $1 \leqslant p < \infty$, то L_p – пространство 2π-периодических измеримых функций, у которых

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} < \infty;$$

L_∞ – пространство 2π-периодических измеримых существенно ограниченных функций f с нормой

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{vrai\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

Если не оговорено противное, пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными.

Пусть $\mathcal{H}_n$ – пространство тригонометрических полиномов порядка не выше n. Полагаем

$$E_n(f)_P = \inf_{T\in\mathcal{H}_{n-1}} P(f-T)$$

– наилучшее приближение функции $f\in C$ тригонометрическими полиномами порядка меньше n относительно полунормы P;

$$\delta_t^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k f\left(x + \frac{mt}{2} - kt\right)$$

– центральная разность m-го порядка функции f с шагом t;

$$\omega_m(f,h)_P = \sup_{0\leqslant t\leqslant h} P\left(\delta_t^m f\right)$$

– модуль непрерывности порядка m функции $f\in C$ с шагом h относительно полунормы P.

Через $\mathcal{A}$ обозначается класс полунорм $P\colon C\to\mathbb{R}_+$, обладающих свойствами:

- существует такая постоянная M, что для любой функции $f\in C$ будет $P(f)\leqslant M\,\|f\|$;
- для любых $f\in C$ и $h\in\mathbb{R}$ верно $P(f(\cdot+h)) = P(f)$.

Например, $\|\cdot\|, \|\cdot\|_p\in\mathcal{A}$, где $1\leqslant p<\infty$. Если $P\in\mathcal{A}$, то $E_n(\cdot)_P$, $\omega_m(\cdot,h)_P\in\mathcal{A}$. Для полунорм этого класса справедливо следующее утверждение.

Лемма A ([1, гл. 2, §3]). *Пусть $f\in C$, $P\in\mathcal{A}$, функция K непрерывна на множестве $\mathbb{R}\times[a,b]$, где $-\infty<a<b<+\infty$. Тогда $\int_a^b K(\cdot,t)\,dt\in C$ и*

$$P\left(\int_a^b K(\,\cdot\,,t)\,dt\right) \leqslant \int_a^b P(K(\,\cdot\,,t))\,dt.$$

Функция Стеклова для функции f определяется так:

$$S_h^1 f = \frac{1}{h} \int\limits_{-h/2}^{h/2} f(\cdot + t)\,dt,$$

$$S_h^r f = S_h^1 S_h^{r-1} f, \qquad \text{если } r - 1 \in \mathbb{N}.$$

Полагаем

$$S_{h,2,m} f = \frac{2}{C_{2m}^m} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} C_{2m}^{m-j} S_{jh}^2 f$$

$$= f + \frac{2(-1)^{m-1}}{C_{2m}^m} \int\limits_0^1 \delta_{th}^{2m} f \cdot (1-t)\,dt, \tag{1}$$

$\alpha_{2,m} = \|S_{h,2,m}\|_{C\to C}$ – норма оператора $S_{h,2,m}$ в пространстве C.

Теорема A ([10])**.** *Пусть* $m \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\alpha_{2,m} = \frac{2}{C_{2m}^m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\mu_{j-1,m}^2 + \mu_{j,m}^2}{\lambda_{j,m}},$$

где

$$\lambda_{j,m} = \sum_{k=j}^{m} (-1)^{k-j} \frac{C_{2m}^{m+k}}{k^2}, \quad \mu_{j,m} = \sum_{k=j+1}^{m} (-1)^k \frac{C_{2m}^{m+k}}{k^2}(k-j).$$

Кроме того,

$$1 \leqslant \alpha_{2,m} \leqslant \frac{2m}{m+1}.$$

Константы Фавара определяются равенством

$$\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}.$$

Отметим соотношения

$$1 = \mathcal{K}_0 < \mathcal{K}_2 < \ldots < \frac{4}{\pi} < \ldots < \mathcal{K}_3 < \mathcal{K}_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{r\to\infty} \mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi}.$$

Теорема B (см., например, [1, гл. 3, §1, следствие 2])**.** *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C^r$, $P \in \mathcal{A}$. *Тогда*

$$E_n(f)_P \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} E_n(f^{(r)})_P. \tag{2}$$

Пусть

$$W_{l,2,m}(f,h)_P = \sup_{0\leqslant t\leqslant h} P(t^{2l}(S^l_{t,2,m}f)^{(2l)}),$$

$$D_m = \frac{2}{C^m_{2m}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ нечёт.}}}^{m} \frac{C^{m+k}_{2m}}{k^2}.$$

Лемма B ([11]). *Пусть* $m\in\mathbb{N}$. *Тогда*

$$\frac{\pi^2}{4} - \frac{\sqrt{\pi(m+1/2)}}{m} \leqslant D_m \leqslant \frac{\pi^2}{4} - \frac{\sqrt{\pi m}}{m+1/2}.$$

Полагаем

$$g(r,\tau) = \begin{cases} 2^r\mathcal{K}_r\left(1 - \dfrac{4r\mathcal{K}_r^{1/r}}{(r+1)\tau} + \dfrac{4r\mathcal{K}_r^{2/r}}{(r+2)\tau^2}\right), & \text{если } r\in\mathbb{N},\ \tau > 2\mathcal{K}_r^{1/r}, \\ \dfrac{2\tau^r}{(r+1)(r+2)} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\eta(m,k,\tau) = \begin{cases} \dfrac{4^k\mathcal{K}_{2k}D^k_m}{\tau^{2k}}, & \text{если } k\in\mathbb{N},\ \tau > \dfrac{2\mathcal{K}_{2k}^{\frac{1}{2k}}\sqrt{D_m}}{\sqrt{\alpha_{2,m}}}, \\ \alpha^k_{2,m} & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3}$$

$$\rho(m,r,\tau) = \begin{cases} \dfrac{2\mathcal{K}_{2m+1}}{\tau}, & \text{если } r \text{ нечётно}, \tau > \dfrac{2\mathcal{K}_{2m+1}}{\mathcal{K}_{2m}}, \\ \mathcal{K}_{2m} & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$J(m,r,\tau)_P = \sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in C^r} \frac{n^rE_n(f)_P}{\omega_m(f^{(r)},\tau/n)_{E_n(\cdot)_P}}, \tag{4}$$

$$A(m,r,\tau) = \frac{g(r,\tau)}{C^{(m+r)/2}_{m+r}} \sum_{k=0}^{\lceil m/2\rceil-1} \eta\left(\frac{m+r}{2},k,\tau\right) + \frac{\rho\left(\frac{m+r}{2},r,\tau\right) D^{\lceil m/2\rceil}_{(m+r)/2}}{\tau^m}. \tag{5}$$

Как правило, вместо символов $E_n(f)_P$, $\omega_m(f,h)_{E_n(\cdot)_P}$, $J(m,r,\tau)_P$ и $W_{l,2,m}(f,h)_{E_n(\cdot)_P}$ будем использовать сокращения $E_n(f)$, $\omega_m(f,h)$, $J(m,r,\tau)$ и $W_{l,2,m}(f,h)$, соответственно.

1.2. Основной результат. Основной результат данной работы формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $m, r, \frac{m+r}{2} \in \mathbb{N}$, $\tau > 0$, $P \in \mathcal{A}$. *Тогда при* $\tau \leqslant 2$ *верно неравенство*

$$J(m,r,\tau) \leqslant A(m,r,\tau),$$

а в случае $\tau > 2$ *– неравенство*

$$J(m,r,\tau) \leqslant \min_{t\in[2,\tau]} A\,(m,r,t)\,.$$

Замечание 1. Так как

$$\omega_m(f,h)_{E_n(\cdot)_P} \leqslant \omega_m(f,h)_P,$$

то, заменяя P на норму в пространстве C, из теоремы 1 получаем те же оценки для точной постоянной в обобщённом неравенстве Джексона в пространстве C. Далее неравенства стандартным образом переносятся с пространства непрерывных функций на пространства L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

§2. Доказательство основного результата

Лемма 1. *Пусть* $l \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $f \in C$, $P \in \mathcal{A}$. *Тогда*

$$W_{l,2,m}(f,h)_P \leqslant D_m^l \omega_{2l}(f,h)_P. \tag{6}$$

Доказательство. В работе [12, формулы (4.2) и (4.5)] установлено, что

$$P((t^2 S_{t,2,m} f)^{(2)}) \leqslant D_m P(\delta_t^2 f).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} W_{l,2,m}(f,h)_P &= \sup_{0\leqslant t\leqslant h} P(t^{2l}(S^l_{h,2,m} f)^{(2l)}) \\ &\leqslant D_m^l \sup_{0\leqslant t\leqslant h} P(\delta_t^{2l} f) = D_m^l \omega_{2l}(f,h)_P. \end{aligned}$$ □

Лемма 2. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in [0:2m]$, $\tau > 0$, $f \in C^r$, $P \in \mathcal{A}$. *Тогда*

$$E_n(f - S_{\tau/n,2,m} f) \leqslant \frac{g(r,\tau)}{C_{2m}^m n^r} \omega_{2m-r}\left(f^{(r)}, \frac{\tau}{n}\right).$$

Доказательство. Полагая $h = \tau/n$ и пользуясь леммой A, имеем

$$E_n(f - S_{h,2,m}f) \leqslant \frac{2}{C_{2m}^m} \int_0^1 E_n(\delta_{th}^{2m} f)(1-t)\,dt$$
$$\leqslant \frac{2}{C_{2m}^m} \int_0^1 \omega_{2m}(f, th)(1-t)\,dt.$$

При любом $\tau > 0$ справедливы оценки

$$\int_0^1 \omega_{2m}(f, th)(1-t)\,dt \leqslant \int_0^1 (th)^r \omega_{2m-r}(f^{(r)}, th)(1-t)\,dt$$
$$\leqslant h^r \omega_{2m-r}(f^{(r)}, h) \int_0^1 t^r (1-t)\,dt = \frac{h^r}{(r+1)(r+2)} \omega_{2m-r}(f^{(r)}, h).$$

При $r \in [1:2m]$ и $\tau > 2\mathcal{K}_r^{1/r}$ для оценки модуля непрерывности под интегралом воспользуемся неравенствами

$$\omega_{2m}(f, t) \leqslant t^r \omega_{2m-r}(f^{(r)}, t), \quad \text{если } t \leqslant \frac{2\mathcal{K}_r^{1/r}}{n},$$
$$\omega_{2m}(f, t) \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \omega_{2m}(f^{(r)}, t) \leqslant \frac{2^r \mathcal{K}_r}{n^r} \omega_{2m-r}(f^{(r)}, t),$$
$$\text{если } t > \frac{2\mathcal{K}_r^{1/r}}{n}.$$

Положим $b := 2\mathcal{K}_r^{1/r}/\tau$. Тогда

$$\int_0^1 \omega_{2m}(f, th)(1-t)\,dt = \int_0^b + \int_b^1$$
$$\leqslant \int_0^b (th)^r \omega_{2m-r}(f^{(r)}, th)(1-t)\,dt + \int_b^1 \frac{(b\tau)^r}{n^r} \omega_{2m-r}(f^{(r)}, th)(1-t)\,dt.$$

Последнее выражение в силу возрастания модуля непрерывности не превосходит величины

$$h^r\omega_{2m-r}(f^{(r)},bh)\int\limits_0^b t^r(1-t)\,dt+\frac{(b\tau)^r}{n^r}\omega_{2m-r}(f^{(r)},h)\int\limits_b^1(1-t)\,dt$$
$$\leqslant\left(\frac{b^{r+1}}{r+1}-\frac{b^{r+2}}{r+2}+\frac{b^r(1-b)^2}{2}\right)\frac{\tau^r}{n^r}\omega_{2m-r}\left(f^{(r)},\frac{\tau}{n}\right).$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых, приходим к доказываемому неравенству. □

Лемма 3. *Пусть* n, $m\in\mathbb{N}$, $l\in\mathbb{Z}_+$, $r\in[0:2m]$, $\tau>0$, $f\in C^r$, $P\in\mathcal{A}$. *Тогда*

$$E_n(f-S^l_{\tau/n,2,m}f)\leqslant\left(\sum_{k=0}^{l-1}\eta(m,k,\tau)\right)\frac{g(r,\tau)}{C^m_{2m}n^r}\omega_{2m-r}\left(f^{(r)},\frac{\tau}{n}\right).$$

Доказательство. Положим $h=\tau/n$. Воспользуемся разложением

$$f-S^l_{h,2,m}f=\sum_{k=0}^{l-1}S^k_{h,2,m}(f-S_{h,2,m}f). \tag{7}$$

По теореме A справедливо неравенство

$$E_n(S_{h,2,m}f)\leqslant\alpha_{2,m}E_n(f),$$

поэтому при $k\in[0:l-1]$ имеем

$$E_n(S^k_{h,2,m}f)\leqslant\alpha^k_{2,m}E_n(f). \tag{8}$$

Применяя неравенства (2) и (6), находим

$$E_n(S^k_{h,2,m}f)\leqslant\frac{\mathcal{K}_{2k}}{n^{2k}}E_n((S^k_{h,2,m}f)^{(2k)})=\frac{\mathcal{K}_{2k}}{(nh)^{2k}}E_n(h^{2k}(S^k_{h,2,m}f)^{(2k)})$$
$$\leqslant\frac{\mathcal{K}_{2k}}{\tau^{2k}}W_{k,2,m}(f,h)\leqslant\frac{\mathcal{K}_{2k}}{\tau^{2k}}D^k_m\omega_{2k}(f,h)\leqslant\frac{\mathcal{K}_{2k}}{\tau^{2k}}D^k_m2^{2k}E_n(f).$$

Сопоставляя полученное неравенство и (8), заключаем, что

$$E_n(S^k_{h,2,m}f)\leqslant\min\left\{\alpha^k_{2,m},\frac{4^k\mathcal{K}_{2k}D^k_m}{\tau^{2k}}\right\}E_n(f)=\eta(m,k,\tau)E_n(f),$$

где функция η определена формулой (3).

Возвращаясь к (7), получаем

$$\begin{aligned} E_n(f - S^l_{h,2,m} f) &\leqslant \sum_{k=0}^{l-1} E_n(S^k_{h,2,m}(f - S_{h,2,m} f)) \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{l-1} \eta(m,k,\tau) E_n(f - S_{h,2,m} f). \end{aligned}$$

Доказательство завершается применением леммы 2. □

Лемма 4. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in [0 : 2m]$, $\tau > 0$, $f \in C^r$, $P \in \mathcal{A}$. *Положим* $l = \lceil m - r/2 \rceil$. *Тогда*

$$E_n(S^l_{\tau/n,2,m} f) \leqslant \frac{\rho(m,r,\tau) D^l_m}{\tau^{2m-r} n^r} \omega_{2m-r}\left(f^{(r)}, \frac{\tau}{n}\right).$$

Доказательство. Имеем при $h = \tau/n$:

$$E_n(S^l_{h,2,m} f) = \frac{1}{h^{2l}} E_n(h^{2l} S^l_{h,2,m} f) \leqslant \frac{1}{h^{2l}} W_{l,2,m}(f^{(-2l)}, h).$$

По лемме 1

$$E_n(S^l_{h,2,m} f) \leqslant \frac{D^l_m}{h^{2l}} \omega_{2l}(f^{(-2l)}, h). \tag{9}$$

Пусть $p \in [2m : 2l + r]$. Используя свойства модуля непрерывности, а также принимая во внимание неравенство (2), находим

$$\begin{aligned} \omega_{2l}(f^{(-2l)}, h) &\leqslant h^{2l+r-p} \omega_{p-r}(f^{(r-p)}, h) \leqslant h^{2l+r-p} \frac{\mathcal{K}_p}{n^p} \omega_{p-r}(f^{(r)}, h) \\ &\leqslant h^{2l+r-p} \frac{\mathcal{K}_p}{n^p} 2^{p-2m} \omega_{2m-r}(f^{(r)}, h). \end{aligned}$$

Тогда из (9) следует оценка

$$E_n(S^l_{h,2,m} f) \leqslant D^l_m h^r \left(\min_{p \in [2m : 2l + r]} \frac{\mathcal{K}_p 2^{p-2m}}{\tau^p} \right) \omega_{2m-r}(f^{(r)}, h). \tag{10}$$

Если r чётно, то $2l + r = 2\lceil m - r/2 \rceil + r = 2m$, поэтому

$$\min_{p \in [2m : 2l + r]} \frac{\mathcal{K}_p 2^{p-2m}}{\tau^p} = \frac{\mathcal{K}_{2m}}{\tau^{2m}}.$$

Если r нечётно, то $2l+r=2m+1$, следовательно,

$$\min_{p\in[2m:2l+r]}\frac{\mathcal{K}_p 2^{p-2m}}{\tau^p}=\min\left\{\frac{\mathcal{K}_{2m}}{\tau^{2m}},\frac{2\mathcal{K}_{2m+1}}{\tau^{2m+1}}\right\}$$
$$=\frac{1}{\tau^{2m}}\min\left\{\mathcal{K}_{2m},\frac{2\mathcal{K}_{2m+1}}{\tau}\right\}.$$

Таким образом, из (10) получаем

$$E_n(S^l_{h,2,m}f)\leqslant\frac{D^l_m h^r}{\tau^{2m}}\rho(m,r,\tau)\omega_{2m-r}(f^{(r)},h),$$

что и требовалось. □

Лемма 5. *Пусть* $n,m\in\mathbb{N}$, $r\in[0:2m]$, $\tau>0$, $f\in C^r$, $P\in\mathcal{A}$, $l=\lceil m-r/2\rceil$. *Тогда*

$$E_n(f)\leqslant\inf_{t\in(0,\tau]}\Bigl(\frac{g(r,t)}{C^m_{2m}}\sum_{k=0}^{l-1}\eta(m,k,t)+\frac{\rho(m,r,t)D^l_m}{t^{2m-r}}\Bigr)\frac{1}{n^r}\omega_{2m-r}\Bigl(f^{(r)},\frac{\tau}{n}\Bigr).$$

Доказательство. Пусть $t\in(0,\tau]$. Имеем

$$E_n(f)\leqslant E_n(f-S^l_{t/n,2,m}f)+E_n(S^l_{t/n,2,m}f).$$

Применяя для оценки первого слагаемого лемму 3, а для второго – лемму 4, получаем

$$E_n(f)\leqslant\left(\sum_{k=0}^{l-1}\eta(m,k,t)\right)\frac{g(r,t)}{C^m_{2m}n^r}\omega_{2m-r}\left(f^{(r)},\frac{t}{n}\right)$$
$$+\frac{\rho(m,r,t)D^l_m}{t^{2m-r}n^r}\omega_{2m-r}\left(f^{(r)},\frac{t}{n}\right)$$
$$\leqslant\left(\frac{g(r,t)}{C^m_{2m}}\sum_{k=0}^{l-1}\eta(m,k,t)+\frac{\rho(m,r,t)D^l_m}{t^{2m-r}}\right)\frac{1}{n^r}\omega_{2m-r}\left(f^{(r)},\frac{\tau}{n}\right).$$

Остаётся перейти к инфимуму по t. □

Следствие 1. *Пусть* $n,m\in\mathbb{N}$, $\tau>0$, $f\in C$, $P\in\mathcal{A}$. *Тогда*

$$E_n(f)\leqslant\left(\frac{1}{C^m_{2m}}\sum_{k=0}^{m-1}\eta(m,k,\tau)+\frac{\mathcal{K}_{2m}D^m_m}{\tau^{2m}}\right)\omega_{2m}\left(f,\frac{\tau}{n}\right).$$

Доказательство. Полагая $r = 0$ в лемме 5, получаем

$$E_n(f) \leqslant \inf_{t\in(0,\tau]} \left(\frac{1}{C_{2m}^m} \sum_{k=0}^{m-1} \eta(m,k,t) + \frac{\mathcal{K}_{2m} D_m^m}{t^{2m}} \right) \omega_{2m}\left(f, \frac{\tau}{n}\right).$$

Инфимум убывающей функции достигается в крайней точке $t = \tau$. $\square$

Теорема 2. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in [1 : 2m-1]$, $\tau > 0$, $f \in C^r$, $P \in \mathcal{A}$. Положим $l = \lceil m - r/2 \rceil$,*

$$B(m,r,\tau) = \frac{g(r,\tau)}{C_{2m}^m} \sum_{k=0}^{l-1} \eta(m,k,\tau) + \frac{\rho(m,r,\tau) D_m^l}{\tau^{2m-r}}. \tag{11}$$

Тогда при $\tau \leqslant 2$ справедлива оценка

$$E_n(f) \leqslant \frac{B(m,r,\tau)}{n^r} \omega_{2m-r}\left(f^{(r)}, \frac{\tau}{n}\right),$$

а при $\tau > 2$ – оценка

$$E_n(f) \leqslant \min_{t\in[2,\tau]} B(m,r,t) \cdot \frac{1}{n^r} \omega_{2m-r}\left(f^{(r)}, \frac{\tau}{n}\right).$$

Доказательство. Найдём инфимум выражения из леммы 5 в случае $\tau \leqslant 2$.

Принимая во внимание лемму B, находим, что $D_m > 2$ при $m \geqslant 15$. Следовательно, учитывая теорему A, имеем

$$D_m \geqslant \alpha_{2,m}. \tag{12}$$

Непосредственными вычислениями неравенство (12) проверяется для $m \in [1 : 14]$.

Учитывая также неравенства $\mathcal{K}_r \geqslant 1$ и $\mathcal{K}_{2r} < \mathcal{K}_{2r+1}$ при любом $r \in \mathbb{N}$, получаем при $\tau \leqslant 2$:

$$B(m,r,\tau) = \frac{2\tau^r}{C_{2m}^m (r+1)(r+2)} \sum_{k=0}^{l-1} \alpha_{2,m}^k + \frac{\mathcal{K}_{2m} D_m^l}{\tau^{2m-r}}.$$

Исследование при помощи производной полученного выражения показывает, что оно убывает при $\tau \in (0, \tau_0]$, где

$$\tau_0 = \left(\frac{(2m-r)\mathcal{K}_{2m} D_m^l C_{2m}^m (r+1)(r+2)}{2r \sum_{k=0}^{l-1} \alpha_{2,m}^k} \right)^{\frac{1}{2m}}.$$

При $m \geqslant 15$, принимая во внимание неравенства $\mathcal{K}_{2m} > 1$, $\alpha_{2,m} \leqslant 2$, имеем

$$\begin{aligned}\tau_0^{2m} &\geqslant \frac{(2m-r)D_m^l C_{2m}^m (r+1)(r+2)}{2r(2^l-1)} \\ &\geqslant \frac{1}{2}(2m-r)(r+1)\left(1+\frac{2}{r}\right) C_{2m}^m \left(\frac{D_m}{2}\right)^l.\end{aligned}$$

Ясно, что

$$\min_{r\in[1:2m-1]}(2m-r)(r+1) = 2m.$$

Выше уже отмечалось неравенство $D_m > 2$ при $m \geqslant 15$. Значит,

$$\tau_0 \geqslant (mC_{2m}^m)^{\frac{1}{2m}} \geqslant \left(m\frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi(m+1/2)}}\right)^{\frac{1}{2m}} = 2\left(\frac{1}{\pi(\frac{1}{m}+\frac{1}{2m^2})}\right)^{\frac{1}{4m}} > 2.$$

Непосредственным подсчётом убеждаемся, что неравенство $\tau_0 > 2$ верно также при $m \in [1:14]$.

Следовательно, для случая $\tau \leqslant 2$ верно соотношение

$$\inf_{t\in(0,\tau]} B(m,r,t) = B(m,r,\tau).$$

Случай $\tau > 2$ тривиальным образом вытекает из леммы 5. □

Замечание 2. В следствии 1 утверждается, что для $m/2 \in \mathbb{N}$, $\tau > 0$ верна оценка

$$J(m,0,\tau) \leqslant A(m,0,\tau).$$

Аналогично можно переформулировать и теорему 2. Для этого нужно заменить m на выражение $(m+r)/2$. Полученное утверждение совпадёт с теоремой 1, указанной во введении, поскольку

$$B\left(\frac{m+r}{2}, r, \tau\right) = A(m,r,\tau).$$

§3. Асимптотика оценки

Установим некоторые асимптотические соотношения для величины $A(m,r,\tau)$ в случае чётных m и r.

В дальнейшем запись типа $f(x,y) = O(g(x,y))$ при $x \to x_0$ означает, что найдётся постоянная $C(y)$, такая что

$$|f(x,y)| \leqslant C(y)|g(x,y)|$$

в некоторой окрестности точки x_0. Соотношение

$$f(x,y) \asymp g(x,y) \quad \text{при } x \to x_0$$

равносильно тому, что

$$f(x,y) = O(g(x,y)) \quad \text{и} \quad g(x,y) = O(f(x,y)) \quad \text{при } x \to x_0.$$

Лемма 6. *Пусть $m/2 \in \mathbb{N}$, $r/2 \in \mathbb{Z}_+$. Тогда*

$$D_{(m+r)/2}^{m/2} \asymp \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \exp\left(-(2/\pi)^{3/2}\sqrt{m}\right) \quad \text{при } m \to +\infty.$$

Доказательство. Из леммы B следует, что

$$D_m = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\theta_m\sqrt{\pi}}{\sqrt{m}},$$

где $\theta_m > 0$, $\theta_m = 1 + O(\frac{1}{m})$ при $m \to +\infty$. Тогда

$$D_m^m = \left(\frac{\pi^2}{4}\right)^m \left(\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\frac{\theta_m\sqrt{\pi}}{\sqrt{m}}\right)^{\sqrt{m}}\right)^{\sqrt{m}}.$$

Положим $t_m = \frac{4\sqrt{\pi}}{\pi^2}\theta_m$. Так как при всех достаточно больших m (см. [13, п. 3.6.2]) справедлива оценка

$$e^{-t_m}\left(1 - \frac{t_m^2 e^{t_m}}{2\sqrt{m}}\right) \leqslant \left(1 - \frac{t_m}{\sqrt{m}}\right)^{\sqrt{m}} \leqslant e^{-t_m},$$

то

$$\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^m e^{-t_m\sqrt{m}}\left(1 - \frac{t_m^2 e^{t_m}}{2\sqrt{m}}\right)^{\sqrt{m}} \leqslant D_m^m \leqslant \left(\frac{\pi^2}{4}\right)^m e^{-t_m\sqrt{m}}.$$

Отсюда

$$D_m^m \asymp \left(\frac{\pi^2}{4}\right)^m e^{-t_m\sqrt{m}}.$$

Имеем

$$e^{-t_m\sqrt{m}} = \exp\left(-\frac{4\sqrt{\pi}}{\pi^2}(1 + O(1/m))\sqrt{m}\right) \sim \exp\left(-\frac{4\sqrt{\pi}}{\pi^2}\sqrt{m}\right).$$

Следовательно,

$$D_m^m \asymp \left(\frac{\pi^2}{4}\right)^m \exp\left(-\frac{4\sqrt{\pi m}}{\pi^2}\right).$$

Заменяя в последнем соотношении m на $\frac{m+r}{2}$, находим

$$\begin{aligned} D^{m/2}_{(m+r)/2} &= \frac{1}{D^{r/2}_{(m+r)/2}} D^{(m+r)/2}_{(m+r)/2} \asymp \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \exp\left(-\frac{4\sqrt{\pi(m+r)}}{\pi^2\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \exp\Big(-(2/\pi)^{3/2}\sqrt{m}\,(1+O(1/m))\Big) \\ &\asymp \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \exp\Big(-(2/\pi)^{3/2}\sqrt{m}\Big). \end{aligned}$$ □

Лемма 7. *Пусть* $\tau \in (0, \pi/\sqrt{2})$, $m/2 \in \mathbb{N}$, $r/2 \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда*

$$A(m,r,\tau) \asymp \left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^m \exp\Big(-(2/\pi)^{3/2}\sqrt{m}\Big) \quad \text{при } m \to +\infty.$$

Доказательство. Принимая во внимание неравенство $\mathcal{K}_{2k}^{\frac{1}{2k}} \geqslant 1$ при $k \in \mathbb{N}$, теорему A и лемму B, получаем

$$\frac{2\mathcal{K}_{2k}^{\frac{1}{2k}}\sqrt{D_m}}{\sqrt{\alpha_{2,m}}} > \sqrt{2}\sqrt{D_m} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + o(1).$$

Тогда при всех достаточно больших m будет $\eta(m,k,\tau) = \alpha^k_{2,m}$. Следовательно,

$$A(m,r,\tau) = \frac{g(r,\tau)}{C^{(m+r)/2}_{m+r}} \sum_{k=0}^{m/2-1} \alpha^k_{2,(m+r)/2} + \frac{\mathcal{K}_{m+r} D^{m/2}_{(m+r)/2}}{\tau^m}.$$

Покажем, что последнее слагаемое имеет наибольший порядок роста по m. Учитывая теорему A, имеем

$$\frac{g(r,\tau)}{C^{(m+r)/2}_{m+r}} \sum_{k=0}^{m/2-1} \alpha^k_{2,(m+r)/2} \leqslant \frac{g(r,\tau)}{C^{(m+r)/2}_{m+r}} \cdot 2^{m/2} = O\left(\frac{\sqrt{m}}{2^{m/2}}\right).$$

По лемме 6 находим

$$\frac{D^{m/2}_{(m+r)/2}}{\tau^m} \asymp \left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^m \exp\Big(-(2/\pi)^{3/2}\sqrt{m}\Big) = \frac{1}{2^{m/2}} \frac{\left(\frac{\pi}{\tau\sqrt{2}}\right)^m}{\exp\big((2/\pi)^{3/2}\sqrt{m}\big)}.$$

Так как $\tau < \pi/\sqrt{2}$, то

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\left(\frac{\pi}{\tau\sqrt{2}}\right)^m}{\big(\exp\big((2/\pi)^{3/2}\big)\big)^{\sqrt{m}}} = +\infty.$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
A(m,r,\tau) &= o\left(\frac{D^{m/2}_{(m+r)/2}}{\tau^m}\right) + \frac{\mathcal{K}_{m+r} D^{m/2}_{(m+r)/2}}{\tau^m} \\
&\asymp \left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^m \exp\left(-(2/\pi)^{3/2}\sqrt{m}\right). \qquad \square
\end{aligned}
$$

Лемма 8. *Пусть* $\tau \in [\pi/\sqrt{2}, \pi)$, $m/2 \in \mathbb{N}$, $r/2 \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда*

$$
A(m,r,\tau) = O\left(\sqrt{m}\left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^m \exp\left(-(2/\pi)^{3/2}\sqrt{m}\right)\right) \quad \text{при } m \to +\infty.
$$

Доказательство. Так как $D_m \to \pi^2/4$ при $m \to +\infty$, то при всех достаточно больших m будет $4D_{(m+r)/2}/\tau^2 > 1$. Тогда

$$
\begin{aligned}
A(m,r,\tau) &\leqslant \frac{g(r,\tau)}{C^{(m+r)/2}_{m+r}} \sum_{k=0}^{m/2-1} \mathcal{K}_{2k} \left(\frac{4D_{(m+r)/2}}{\tau^2}\right)^k + \frac{\mathcal{K}_{m+r} D^{m/2}_{(m+r)/2}}{\tau^m} \\
&= O\left(\frac{\sqrt{m}}{2^m}\right) \frac{\dfrac{2^m D^{m/2}_{(m+r)/2}}{\tau^m} - 1}{\dfrac{4D_{(m+r)/2}}{\tau^2} - 1} + O\left(\frac{D^{m/2}_{(m+r)/2}}{\tau^m}\right) \\
&= O\left(\sqrt{m}\frac{D^{m/2}_{(m+r)/2}}{\tau^m}\right) + O\left(\frac{D^{m/2}_{(m+r)/2}}{\tau^m}\right) = O\left(\sqrt{m}\frac{D^{m/2}_{(m+r)/2}}{\tau^m}\right).
\end{aligned}
$$

Остаётся принять во внимание лемму 6. $\square$

Лемма 9. *Пусть* $m/2 \in \mathbb{N}$, $r/2 \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда*

$$
A(m,r,\pi) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{g(r,\pi)}{2^r} \frac{\sqrt{m}}{C^{m/2}_m} + O\left(\frac{1}{2^m}\right) \quad \text{при } m \to +\infty.
$$

Доказательство. Имеем

$$
\begin{aligned}
A(m,r,\pi) &\leqslant \frac{g(r,\pi)}{C^{(m+r)/2}_{m+r}} \sum_{k=0}^{m/2-1} \mathcal{K}_{2k} \left(\frac{4D_{(m+r)/2}}{\pi^2}\right)^k + \frac{\mathcal{K}_{m+r} D^{m/2}_{(m+r)/2}}{\pi^m} \\
&\leqslant \frac{g(r,\pi) C^{m/2}_m}{C^{(m+r)/2}_{m+r}} \frac{4/\pi}{C^{m/2}_m} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4D_{(m+r)/2}}{\pi^2}\right)^k + \frac{4}{\pi} \frac{(\pi^2/4)^{m/2}}{\pi^m}. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Принимая во внимание лемму B, при $l \in \mathbb{N}$ получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4D_l}{\pi^2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{4}{\pi^2}D_l} \leqslant \frac{1}{1-(1-\frac{4}{\pi^2}\frac{\sqrt{\pi l}}{l+1/2})} = \frac{\pi^2}{4\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{l}+\frac{1}{2\sqrt{l}}\right).$$

Полагая $l=(m+r)/2$, находим

$$\begin{aligned}\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4D_{(m+r)/2}}{\pi^2}\right)^k &\leqslant \sqrt{\pi}\left(\sqrt{\frac{m+r}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2(m+r)}}\right)\\ &= \sqrt{\frac{\pi m}{2}}\,(1+O(1/m)).\end{aligned}$$

По формуле Стирлинга

$$C_m^{m/2} = \frac{2^m}{\sqrt{\pi m/2}}\,(1+O(1/m)).$$

Поэтому

$$\frac{C_m^{m/2}}{C_{m+r}^{(m+r)/2}} = \frac{1}{2^r}\sqrt{\frac{m+r}{m}}\,(1+O(1/m)) = \frac{1}{2^r}\,(1+O(1/m)). \qquad (14)$$

Возвращаясь к неравенству (13), имеем

$$\begin{aligned}A(m,r,\pi) &\leqslant \frac{g(r,\pi)}{2^r C_m^{m/2}}\sqrt{\frac{\pi m}{2}}(1+O(1/m)) + \frac{4}{2^m\pi}\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{g(r,\pi)}{2^r}\,\frac{\sqrt{m}}{C_m^{m/2}} + O\left(\frac{1}{2^m}\right). \qquad \square\end{aligned}$$

Лемма 10. *Пусть* $\tau > \pi$, $m/2 \in \mathbb{N}$, $r/2 \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда*

$$A(m,r,\tau) \leqslant \left(1+\frac{4/\pi}{(\tau/\pi)^2-1}\right)\frac{g(r,\tau)}{2^r C_m^{m/2}} + O\left(\frac{1}{2^m}\right) \quad \textit{при } m \to +\infty.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}A(m,r,\tau) &\leqslant \frac{g(r,\tau)}{C_{m+r}^{(m+r)/2}}\sum_{k=0}^{m/2-1}\mathcal{K}_{2k}\left(\frac{4D_{(m+r)/2}}{\tau^2}\right)^k + \frac{\mathcal{K}_{m+r}D_{(m+r)/2}^{m/2}}{\tau^m}\\ &\leqslant \frac{g(r,\tau)}{C_m^{m/2}}\,\frac{C_m^{m/2}}{C_{m+r}^{(m+r)/2}}\left(1+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4D_{(m+r)/2}}{\tau^2}\right)^k\right) + \frac{4}{\pi}\,\frac{(\pi^2/4)^{m/2}}{\tau^m}.\end{aligned}$$

По лемме B при $l \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4D_l}{\tau^2}\right)^k = \frac{4D_l}{\tau^2} \frac{1}{1 - \frac{4D_l}{\tau^2}} = \frac{1}{(\tau/\pi)^2 - 1} + O(1/\sqrt{l}) \quad \text{при } l \to +\infty.$$

Учитывая (14), находим

$$\begin{aligned} &A(m, r, \tau) \\ &\leqslant \frac{g(r,\tau)}{C_m^{m/2}} \frac{1}{2^r} \left(1 + \frac{4/\pi}{(\tau/\pi)^2 - 1} + O(1/\sqrt{m})\right)(1 + O(1/m)) + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^m \\ &\quad = \frac{g(r,\tau)}{2^r C_m^{m/2}} \left(1 + \frac{4/\pi}{(\tau/\pi)^2 - 1} + O(1/\sqrt{m})\right) + o\left(\frac{1}{2^m}\right) \\ &\qquad = \frac{g(r,\tau)}{2^r C_m^{m/2}} \left(1 + \frac{4/\pi}{(\tau/\pi)^2 - 1}\right) + O\left(\frac{1}{2^m}\right). \qquad \square \end{aligned}$$

Теорема 3. *Пусть $m/2 \in \mathbb{N}$, $r/2 \in \mathbb{Z}_+$, $\tau > 0$. Тогда справедливы следующие соотношения.*

При $m \to +\infty$

$$A(m, r, \tau) \asymp \left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^m \exp\left(-(2/\pi)^{3/2}\sqrt{m}\right), \quad \text{если } 0 < \tau < \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

$$A(m, r, \tau) = O\left(\sqrt{m}\left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^m \exp\left(-(2/\pi)^{3/2}\sqrt{m}\right)\right), \quad \text{если } \frac{\pi}{\sqrt{2}} \leqslant \tau < \pi,$$

$$A(m, r, \pi) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{g(r,\pi)}{2^r} \frac{\sqrt{m}}{C_m^{m/2}} + O\left(\frac{1}{2^m}\right), \tag{15}$$

$$A(m, r, \tau) \leqslant \left(1 + \frac{4/\pi}{(\tau/\pi)^2 - 1}\right) \frac{g(r,\tau)}{2^r C_m^{m/2}} + O\left(\frac{1}{2^m}\right), \quad \text{если } \tau > \pi. \tag{16}$$

При $r \to +\infty$

$$A(m, r, \tau) \to \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^m, \quad \text{если } 0 < \tau \leqslant 2,$$
$$A(m, r, \tau) \to +\infty, \quad \text{если } \tau > 2.$$

При $\tau \to +0$

$$A(m, r, \tau) = \frac{\mathcal{K}_{m+r} D_{(m+r)/2}^{m/2}}{\tau^m} + O(\tau^r). \tag{17}$$

При $\tau \to +\infty$

$$A(m,r,\tau) \to \frac{2^r \mathcal{K}_r}{C_{m+r}^{(m+r)/2}}.$$

Доказательство. Асимптотические соотношения при $m \to +\infty$ следуют из лемм 7, 8, 9 и 10.

При $\tau \in (0,2]$ из (5) и (12) следует равенство

$$A(m,r,\tau) = \frac{1}{C_{m+r}^{(m+r)/2}} \frac{2\tau^r}{(r+1)(r+2)} \sum_{k=0}^{m/2-1} \alpha_{2,(m+r)/2}^k + \frac{\mathcal{K}_{m+r} D_{(m+r)/2}^{m/2}}{\tau^m}. \tag{18}$$

При фиксированных значениях m и r имеем

$$A\,(m,r,\tau) = \frac{\mathcal{K}_{m+r} D_{(m+r)/2}^{m/2}}{\tau^m} + O(\tau^r) \quad \text{при } \tau \to +0.$$

Из формулы (18) также при фиксированных m и $\tau \in (0,2]$ вытекает

$$A(m,r,\tau) = \frac{\mathcal{K}_{m+r} D_{(m+r)/2}^{m/2}}{\tau^m} + O\left(\frac{(\tau/2)^r}{r^{3/2}}\right) \quad \text{при } r \to +\infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{r \to +\infty} A(m,r,\tau) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^m.$$

Пусть теперь $\tau > 2$. Из (5) при $r \to +\infty$ получаем

$$\begin{aligned} A(m,r,\tau) &> \frac{g(r,\tau)}{C_{m+r}^{(m+r)/2}} \\ &= \frac{2^r \mathcal{K}_r}{C_{m+r}^{(m+r)/2}} \left(1 - \frac{4r\mathcal{K}_r^{1/r}}{(r+1)\tau} + \frac{4r\mathcal{K}_r^{2/r}}{(r+2)\tau^2}\right) \to +\infty. \end{aligned}$$

При $\tau \to +\infty$ и фиксированных значениях m и r находим

$$A(m,r,+\infty) = \frac{g(r,+\infty)}{C_{m+r}^{(m+r)/2}} = \frac{2^r \mathcal{K}_r}{C_{m+r}^{(m+r)/2}}. \qquad \square$$

§4. Сопоставление оценок

В работе [5] при $m/2 \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\tau > 0$ установлено неравенство

$$J(m,r,\tau) \leqslant \frac{1}{C_m^{m/2}} \sum_{k=0}^{m/2-1} \frac{4^k \mathcal{K}_{2k+r} D_{m/2}^k}{\tau^{2k}} + \frac{\mathcal{K}_{m+r} D_{m/2}^{m/2}}{\tau^m} =: J_{\mathrm{VZh2012}}(m,r,\tau).$$

При $\tau \geqslant \pi$ величины A и J_{VZh2012} имеют наименьший порядок по m среди оценок из работ, упомянутых во введении. Установим, что для $r/2 \in \mathbb{N}$, $\tau \geqslant \pi$ верно неравенство

$$A(m,r,\tau) < J_{\mathrm{VZh2012}}(m,r,\tau) \quad \text{при } m \to +\infty. \tag{19}$$

Заметим, что в этом случае

$$g(r,\tau) < 2^r \mathcal{K}_r \left(1 - \frac{1}{\tau}\right). \tag{20}$$

Действительно, учитывая неравенство $1 \leqslant \mathcal{K}_r < 4/\pi$, имеем

$$\begin{aligned}\frac{g(r,\tau)}{2^r \mathcal{K}_r} &= 1 - \frac{4r\mathcal{K}_r^{1/r}}{(r+1)\tau} + \frac{4r\mathcal{K}_r^{2/r}}{(r+2)\tau^2} \\ &= 1 - \frac{4r\mathcal{K}_r^{1/r}}{\tau}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{\mathcal{K}_r^{1/r}}{(r+2)\tau}\right) \\ &< 1 - \frac{4r}{\tau}\left(\frac{1}{r+2} - \frac{\pi}{2(r+2)\tau}\right) \leqslant 1 - \frac{4r}{2\tau(r+2)} \leqslant 1 - \frac{1}{\tau}.\end{aligned}$$

Принимая во внимание леммы B и 6, при $m \to +\infty$ находим

$$\begin{aligned}J_{\mathrm{VZh2012}}(m,r,\pi) &\geqslant \frac{\mathcal{K}_r}{C_m^{m/2}} \sum_{k=0}^{m/2-1} \left(\frac{4D_{m/2}}{\pi^2}\right)^k = \frac{\mathcal{K}_r}{C_m^{m/2}} \frac{1 - (4D_{m/2}/\pi^2)^{m/2}}{1 - 4D_{m/2}/\pi^2} \\ &= \frac{\mathcal{K}_r}{C_m^{m/2}} \frac{1 + o(1)}{\frac{4\sqrt{\pi}}{\pi^2\sqrt{m}}(1+o(1))} = \frac{\mathcal{K}_r \pi^2}{4\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{m}}{C_m^{m/2}} + o\left(\frac{\sqrt{m}}{C_m^{m/2}}\right).\end{aligned}$$

Учитывая данное неравенство, а также формулу (15), для установления соотношения (19) при $\tau = \pi$ достаточно проверить выполнение неравенства

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{g(r,\pi)}{2^r} < \frac{\mathcal{K}_r \pi^2}{4\sqrt{\pi}},$$

которое, учитывая (20), следует из того, что

$$1-\frac{1}{\pi}<\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Теперь рассмотрим случай $\tau>\pi$. По лемме B при $m\to+\infty$ имеем

$$\begin{aligned}J_{\mathrm{VZh2012}(m,r,\tau)}&\geqslant\frac{\mathcal{K}_r}{C_m^{m/2}}\sum_{k=0}^{m/2-1}\left(\frac{4D_{m/2}}{\tau^2}\right)^k\\&=\frac{\mathcal{K}_r}{C_m^{m/2}}\frac{1+o(1)}{1-4D_{m/2}/\tau^2}=\frac{\mathcal{K}_r\tau^2}{C_m^{m/2}(\tau^2-\pi^2)}+o\left(\frac{1}{C_m^{m/2}}\right).\end{aligned}$$

Тогда, принимая во внимание оценку (16), видим, что неравенство (19) будет верным при $\tau>\pi$, если выполнено неравенство

$$\left(1+\frac{4\pi}{\tau^2-\pi^2}\right)\frac{g(r,\tau)}{2^r}<\frac{\mathcal{K}_r\tau^2}{\tau^2-\pi^2}.$$

Учитывая оценку (20), достаточно проверить, что

$$\left(1+\frac{4\pi-\pi^2}{\tau^2}\right)\left(1-\frac{1}{\tau}\right)<1.$$

Поскольку

$$\frac{4\pi-\pi^2}{\tau^2}=\frac{1}{\tau}\cdot\frac{\pi}{\tau}(4-\pi)<\frac{1}{\tau},$$

получаем

$$\left(1+\frac{4\pi-\pi^2}{\tau^2}\right)\left(1-\frac{1}{\tau}\right)<\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\left(1-\frac{1}{\tau}\right)=1-\frac{1}{\tau^2}<1.$$

Приведём таблицы рекордных оценок для $J(m,r,\tau)$, вычисленных приближённо с четырьмя значащими цифрами (последняя цифра округлялась вверх, ноль перед десятичной точкой не записывается). В ячейках таблицы указаны ссылки на соответствующие работы. Отсутствие ссылки означает, что данное число является приближённым значением $\min_{t\in[2,\tau]}A(m,r,t)$. Под ссылкой [1] понимается указание на теорему 2 в §5 главы 3 этой книги; под ссылкой [3] – указание на теорему 3 в §3 главы 2 этой книги.

$m\backslash r$	0	2	4	6	8	10
2	.5813 [6]	.4237	.4175	.4269	.4386	.45
4	.2192 [7]	.1584 [8]	.1519	.1531	.1574	.152 [1]
6	.08195 [7]	.05687	.05083	.05053	.05182	.0492 [1]
8	.03234 [7]	.01848	.01605	.01571	.01597	.01547 [1]
10	.01279 [5]	.005715	.004864	.004701	.004742	.004748 [1]
$m\backslash r$	1	3	5	7	9	11
3	.2774 [8]	.2851	.2853	.2952	.2759 [1]	.2533 [1]
5	.1038 [8]	.09805	.0949	.09719	.09285 [1]	.08199 [1]
7	.04267	.03164	.02984	.03014	.03007 [1]	.02578 [1]
9	.01358	.00975	.009024	.009008	.009228	.007913 [1]
11	.004142	.002908	.002653	.002623	.002669	.002384

Оценки для $J(m, r, \pi)$

$m\backslash r$	0	2	4	6	8	10
2	.5313 [3]	.4237	.4175	.4269	.4386	.45
4	.1843 [3]	.1602	.1519	.1531	.1574	.152 [1]
6	.06101 [5]	.05051	.04935	.05005	.05166	.0492 [1]
8	.01777 [5]	.01445	.01425	.01453	.01504	.01547 [1]
10	.004997 [5]	.003996	.003925	.003982	.004102	.004252
$m\backslash r$	1	3	5	7	9	11
3	.3275	.285	.2853	.2952	.2759 [1]	.2533 [1]
5	.109	.09386	.09358	.09672	.09285 [1]	.08199 [1]
7	.03226	.02748	.02741	.02833	.02957	.02578 [1]
9	.009119	.007665	.00759	.007792	.008087	.007913 [1]
11	.002516	.002092	.002056	.002096	.002162	.002239

Оценки для $J(m, r, 2\pi)$

Список литературы

1. В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций.* Изд. ЛГУ, Ленинград, 1982.
2. В. В. Жук, С. Ю. Пименов, *О нормах сумм Ахиезера–Крейна–Фавара.* — Вестник СПбГУ. Серия 10, **4** (2006), 37–47.
3. В. В. Жук, *Структурные свойства функций и точность аппроксимации.* Изд. ЛГУ, Ленинград, 1984.
4. В. В. Жук, *Полунормы и модули непрерывности высоких порядков.* — Труды С.-Петербург. матем. общества **2** (1993), 116–177.
5. О. Л. Виноградов, В. В. Жук, *Оценки функционалов с известным конечным набором моментов через модули непрерывности и поведение констант в неравенствах типа Джексона.* — Алгебра и анализ **24**, No. 5 (2012), 1–43.

6. О. Л. Виноградов, *Точное неравенство для отклонения сумм Рогозинского и второго модуля непрерывности в пространстве непрерывных периодических функций.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **247** (1997), 26–45.
7. О. Л. Виноградов, *Улучшение неравенств типа Джексона для четвёртого, шестого и восьмого модуля непрерывности.* — Проблемы математического анализа **85** (2015), 59–70.
8. В. В. Жук, О. А. Тумка, Н. А. Козлов, *О константах в неравенствах типа Джексона для наилучших приближений периодических дифференцируемых функций.* — Вестник СПбГУ. Серия 10 **1** (2015), 33–41.
9. В. В. Жук, В. М. Буре, *О константах в обобщённой теореме Джексона.* — Проблемы матем. анализа **77** (2014), 105–110.
10. М. В. Бабушкин, Н. Ю. Додонов, В. В. Жук, *Модифицированные функции Стеклова и формулы численного дифференцирования.* — Проблемы математического анализа **94** (2018), 21–34.
11. S. Foucart, Y. Kryakin, A. Shadrin, *On the exact constant in Jackson–Stechkin inequality for the uniform metric.* — Constr. Approx., **29**, No. 2 (2009), 157–179.
12. О. Л. Виноградов, В. В. Жук, *Оценки функционалов с известной последовательностью моментов через отклонения средних типа Стеклова.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **383** (2010), 5–32.
13. D. S. Mitrinovic, *Analytic Inequalities.* Springer-Verlag, Berlin, 1970.

Babushkin M. V. Estimates for the constant in a Jackson type inequality for periodic functions.

New estimates are established for the constant J in the Jackson type inequality

$$E_n(f) \leqslant \frac{J(m,r,\tau)}{n^r}\omega_m(f^{(r)},\tau/n).$$

They improve previously known estimates in the case where $m \to +\infty$, $r \in \mathbb{N}$, $\tau \geqslant \pi$. Here f is a 2π-periodic continuous function, E_n is the best approximation by trigonometric polynomials of order less than n, ω_m is the modulus of continuity of order m.

Университет ИТМО
Кронверкский пр., 49
197101 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: m.v.babushkin@yandex.ru

Поступило 27 июля 2020 г.