Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 490, 2020 г.

А. Л. Смирнов, Г. А. Струков

КОРОТКИЕ СЕЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ РАССЛОЕНИЙ НА ПРОЕКТИВНОЙ ПРЯМОЙ

§1. Введение

Речь идет о векторных расслоениях на проективной прямой над кольцом целых чисел, то есть о расслоениях на арифметической поверхности. Рассматриваются d-сечения, то есть сечения подкрутки $E(d)$ исходного расслоения E. Для образности удобно считать, что сечения с меньшими степенями подкрутки короче сечений с большими степенями подкрутки. Особый интерес представляют невырожденные сечения, то есть сечения, нигде не обращающиеся в ноль. Из теоремы Ханны (см. [1]) вытекает, что всякое расслоение допускает невырожденное сечение некоторой степени. Для каждого конкретного расслоения E желательно уметь строить d-сечение минимальной степени. Этот инвариант расслоения обозначается $l_{\min}(E)$.

Сложность расслоений определяется высотой подскоков этого расслоения. Речь идет о том, что ограничение расслоения на проективную прямую над $\mathbb{F}_p$ для некоторых простых p ведет себя нетипично. Например, расслоение E ранга 2 с тривиальным общим слоем, то есть такое, что $E \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$, при ограничении на проективную прямую над $\mathbb{F}_p$ может дать расслоение вида $\mathcal{O}(-h) \oplus \mathcal{O}(h)$. В этом случае говорят, что E имеет в простом p подскок высоты h.

Расслоения с подскоками высоты один относительно хорошо изучены. В данной работе начато изучение расслоений с подскоками высоты два. При этом мы ограничимся специальным случаем. А именно, речь идет о расслоениях, полученных заменой базы из расслоений с простыми подскоками. Эта замена базы осуществляется с помощью эндоморфизма возведения в квадрат $\psi_2 : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$. Высота подскока

Ключевые слова: векторное расслоение, подскок, арифметическая поверхность, проективная прямая, результант, подкрутка.

Работа первого автора поддержана РФФИ (грант 19-01-00513). Работа второго автора поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение 075-15-2019-1619.

в каждом p удваивается. Однако некоторые инварианты ведут себя более интересным образом.

Известно, что $l_{\min}(V) \leqslant 2$ для расслоения V с простыми подскоками. Поэтому $l_{\min}(E) \leqslant 4$, где $E = \psi_2^* V$. Один из основных результатов данной работы – теорема 3.7.2 – утверждает, что $l_{\min}(E) \leqslant 3$. Высота подскоков дает локальные нижние ограничения на минимальную степень невырожденного сечения, то есть на $l_{\min}(E)$. В частности, $l_{\min}(E) \geqslant 2$ для расслоения с подскоками высоты два. Интересное явление состоит в том, что минимальная степень невырожденного сечения может отличаться от этих нижних оценок. Для расслоений с простыми подскоками это явление отмечено в [5]. Для расслоений с подскоками высоты два это явление обнаружено вторым автором в [2]. При этом конкретный пример из этой работы представлен ниже в 3.6.3. Другое интересное явление, также обнаруженное в [2], состоит в том, что расслоения V с простым подскоками и $l_{\min}(V) = 2$ могут по-разному вести себя при указанной выше замене базы. Для некоторых из них $l_{\min}(E) = 3$, а для некоторых $l_{\min}(E) = 2$ (см.3.6.3). Чтобы различить эти случаи, используется необходимый признак существования невырожденного 2-сечения 3.6.3. Этот признак также получен в [2]. К результатам, полученным вторым автором в дипломной работе [2], относятся также критерии 3.5.1, 3.6.1 и 3.7.1.

§2. Обозначения и предварительные сведения

Как обычно (см., например, [3]),

$$\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[t_0, t_1], \quad \deg t_0 = \deg t_1 = 1, \quad U_i \text{ – дополнение к нулям } t_i.$$

Тогда

$$\mathcal{O}(U_0) = \mathbb{Z}[x], \quad \mathcal{O}(U_1) = \mathbb{Z}[x^{-1}], \quad \mathcal{O}(U_0 \cap U_1) = \mathbb{Z}[x, x^{-1}],$$

где $x = t_1/t_0$. Здесь и далее пишем $\mathcal{O}$ вместо $\mathcal{O}_X$, если схема X ясна из контекста.

Ниже E – векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$. По умолчанию,

$$\operatorname{rk} E = 2.$$

Кроме того, по умолчанию E – расслоение с тривиальным общим слоем. Это означает, что векторное расслоение $E \otimes \mathbb{Q}$ на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Q}}$ изоморфно $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$.

2.1. Короткие сечения. Сечением E степени d, где $d \in \mathbb{Z}$, будем называть произвольный морфизм

$$\mathcal{O} \to E(d).$$

При этом, как обычно, $E(d) = \mathcal{O}(d) \otimes E$. Сечения степени d также будем называть d-сечениями. Для образности будем использовать сдедующую терминологию: сечение степени d_1 короче сечения степени d_2, если $d_1 < d_2$.

2.2. Невырожденные сечения. Пусть $s : \mathcal{O} \to E(d)$ сечение степени d. Сечение s будем называть невырожденным, если оно не имеет нулей на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$.

Теорема Ханны (см. [1]) утверждает, что для всякого E найдется некоторое d такое, что существует невырожденное сечение $\mathcal{O} \to E(d)$. Для каждого конкретного E некоторое такое d можно найти с помощью алгоритма из [8].

С расслоением E связан инвариант $l_{\min}(E)$ – минимальное d такое, что существует невырожденное d-сечение E.

2.3. Оснащенные расслоения и матрицы склейки. Пусть $\operatorname{rk} E = n$. Известно, что ограничения E на U_0 и U_1 являются свободными $\mathcal{O}$-модулями. Таким образом, можно выбрать такие наборы $e_1, \dots, e_n \in E(U_0)$ и $f_1, \dots, f_n \in E(U_1)$, что

$$E|_{U_0} = \mathcal{O}e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}e_n, \quad E|_{U_1} = \mathcal{O}f_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}f_n. \tag{1}$$

На $U_0 \cap U_1$ эти наборы связаны соотношением

$$(e_1, \dots, e_n)\sigma = (f_1, \dots, f_n), \text{ где } \sigma \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[x, x^{-1}]). \tag{2}$$

Матрица σ называется матрицей склейки расслоения. Она зависит от оснащения E, то есть от выбора базисов E на U_0 и U_1.

2.4. Тип расслоения. Пусть $\operatorname{rk} E = n$. Для схемной точки $y \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ обозначим $\mathbf{P}^1_y$ соответствующий слой структурной проекции $p : \mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Ограничение E на $\mathbf{P}^1_y$ обозначим E_y. По теореме Гротендика о векторных расслоениях на проективной прямой над полем существует изоморфизм

$$E_y \simeq \mathcal{O}(d_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(d_n), \text{ где } d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n.$$

При этом последовательность $d_1, \dots, d_n$ определена однозначно. Ее и будем называть типом E в точке y.

Пусть E – расслоение ранга 2 с тривиальным общим слоем. Дискриминантом E назовем число

$$\operatorname{disc}(E) = \prod_p p^{d_p(E)}.$$

Здесь p пробегает множество тех простых чисел, для которых

$$E \otimes \mathbf{F}_p \simeq \mathcal{O}(-d_p(E)) \oplus \mathcal{O}(d_p(E))$$

и $d_p(E) \geqslant 0$.

2.5. Расслоения с простыми подскоками.

Определение 2.5.1. *Говорим, что E – расслоение с простыми подскоками, если*

(1) *E имеет тип (0.0) или $(-1,1)$ во всякой замкнутой точке $y \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$;*
(2) *найдется хотя бы один подскок, то есть найдется хотя бы одна замкнутая точка $y \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, в которой E имеет тип $(-1,1)$.*

Расслоения с простыми подскоками относительно хорошо изучены.

Теорема 2.5.2 (см. [4]). *Расслоение с простыми подскоками можно получить с помощью матрицы склейки вида*

$$\begin{pmatrix} \alpha x^{-1} & \beta \\ \gamma & \delta x \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[x, x^{-1}]), \text{ где } \beta \neq 0, \pm 1. \qquad (3)$$

Наоборот, расслоение с матрицей склейки вида (3) является расслоением с простыми подскоками. При этом множество мест подскока E, то есть множество простых делителей $\operatorname{disc}(E)$, совпадает с множеством простых делителей β.

Рассмотрим расслоение E_i $(i = 1, 2)$, заданное матрицей склейки

$$\begin{pmatrix} \alpha_i x^{-1} & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i x \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[x, x^{-1}]), \text{ где } \beta_i \neq 0, \pm 1.$$

Расслоения E_1 и E_2 изоморфны тогда и только тогда, когда $\beta_1 = \pm\beta_2$ и

$$\delta_1/\delta_2 = \pm z^2 \pmod{\beta_1} \text{ для некоторого } z \in \mathbb{Z}.$$

В частности, класс изоморфизма E полностью определен парой (β, δ).

Теорема 2.5.3 (см. [5]). *У расслоения с простыми подскоками существует невырожденное сечение степени не выше* 2. *У расслоения с простыми подскоками и нечетным дискриминантом невырожденное* 1*-сечение существует тогда и только тогда, когда*

$$\delta = \pm z^2 \pmod{\beta} \text{ для некоторого } z \in \mathbb{Z}.$$

§3. Основные результаты

В данной работе рассматриваются расслоения с подскоками высоты два. Это означает, что $d_p(E) \leqslant 2$ для всех p и $d_p(E) = 2$ хотя бы для одного p (см. 2.4). Точнее говоря, в данной работе мы интересуемся специальным классом расслоений с подскоками высоты два. Перейдем к описанию этого класса.

3.1. Изучаемый класс расслоений. Зафиксируем эндоморфизм

$$f: \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1, \quad x \mapsto x^2.$$

Мы собираемся изучать расслоения вида $E = f^*V$, где V пробегает класс расслоений с простыми подскоками. Опишем эту ситуацию несколько подробнее.

3.1.1. Предположим, что V задано матрицей склейки

$$\begin{pmatrix} \alpha x^{-1} & \beta \\ \gamma & \delta x \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}), \quad \beta \neq 0, \pm 1. \tag{5}$$

Это предположение не уменьшает общности ввиду теоремы 2.5.2. Отметим, что

$$\alpha \text{ взаимно просто с } \beta \text{ и } \delta \text{ взаимно просто с } \beta \tag{6}$$

ввиду обратимости матрицы из (5).

3.1.2. Положим

$$E = f^*V,$$

где V определено в 3.1.1. Тогда E задано матрицей склейки

$$\begin{pmatrix} \alpha x^{-2} & \beta \\ \gamma & \delta x^2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

3.2. Идентификация E вне делителей β. Нам потребуется изоморфизм

$$\mathcal{O}^2 \to E_Y, \tag{8}$$

где $Y = \mathbf{P}^1_B$, $B = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\beta^{-1}]$, а E_Y – ограничение E на Y.

Введем $g_1, g_2 \in \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_Y(U_0), E_Y(U_0))$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$\beta(g_1, g_2) = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -1 & \delta x^2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Пользуясь матрицей склейки (см. (7)), находим, что на $U_0 \cap U_1$ выполнено соотношение

$$\beta(g_1, g_2) = (f_1, f_2)\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ -\alpha x^{-2} & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Здесь (f_1, f_2) – базис ограничения E на U_1 из определения матрицы склейки. Видим отсюда, что g_1 и g_2 происходят из глобальных сечений E_Y. Будем обозначать эти глобальные сечения теми же символами. Таким образом, определим стрелку (8) парой g_1, g_2. Соотношения (9) и (10) показывают, что в (8) получили изоморфизм.

3.3. Идентификация $E \pmod{\beta}$. Нам потребуется изоморфизм

$$(h_1, h_2) : \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(2) \to E_Z, \tag{11}$$

где E_Z – ограничение E на $Z = \mathbf{P}^1_S$, $S = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}/(\beta)$. Положим

$$(t_0^{-2}h_1, t_0^2 h_2) = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} \bar\alpha & 0 \\ \bar\gamma x^2 & \bar\delta \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $(t_0^{-2}h_1, t_0^2 h_2)$ – базис ограничения E_Z на U_0. С помощью матрицы склейки σ находим, что на $U_0 \cap U_1$ верно соотношение

$$(t_0^{-2}h_1, t_0^2 h_2) = \det(\bar\sigma)(f_1, f_2)\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^{-2} \end{pmatrix}.$$

Отсюда видим, что

$$(t_1^{-2}h_1, t_1^2 h_2) = \det(\bar\sigma)(f_1, f_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому h_1 и h_2 определены глобально, а стрелка (11) – изоморфизм.

3.4. Сечения $E(d)$**.** Рассматриваемое расслоение E представлено в 3.1.2.

Зафиксируем отображение

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, E(d) \to \mathbb{Z}[x]^2, \quad s \mapsto (u, v), \tag{12}$$

заданное следующим образом. Вспомним (см. 2.3), что у сужения E на U_0 фиксирован базис (e_1, e_2). Таким образом, у сужения $E(d)$ на U_0 имеется базис $t_0^d(e_1, e_2)$. Сечению s сопоставим коэффициенты разложения

$$\mathrm{res}_0(s) = ut_0^d e_1 + vt_0^d e_2, \tag{13}$$

где res_i – операция ограничения на U_i.

Предложение 3.4.1. *Пусть* $d \geqslant 0$*. Отображение* (12) *инъективно. Его образ состоит из таких пар* (u, v)*, для которых*

$$\deg u \leqslant d, \tag{14}$$

$$\deg(\delta x^2 u - \beta v) \leqslant d. \tag{15}$$

Доказательство. Инъективность вытекает из локальной свободности E. Предположим, что $s \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, E)$ и $s \mapsto (u, v)$ при отображении (12). Проверим соотношения (14) и (15). Пользуясь (9), находим, что

$$s = (u\delta x^2 - v\beta)t_0^d g_1 + ut_0^d g_2.$$

Коэффициенты правой части представляют собой глобальные сечения $\mathcal{O}(d)$ над B, то есть формы степени d. Поэтому соотношения (14) и (15) верны.

Наоборот, предположим, что $u, v \in \mathbb{Z}[x]$ и выполнены соотношения (14) и (15). Положим $s_0 = ut_0^d e_1 + vt_0^d e_2$ и

$$s_1 = (\delta x^{-(d-2)}u - \beta x^{-d}v)t_1^d f_1 + (-\gamma x^{-d}u + \alpha x^{-(d+2)}v)t_1^d f_2.$$

Из (14) и (15) вытекает, что коэффициенты s_1 лежат в $\mathbb{Z}[x^{-1}]$. Поэтому s_1 – сечение $E(d)$ на U_1. Пользуясь (9) и (10), видим, что ограничения s_0 и s_1 на $U_0 \cap U_1$ совпадают. Поэтому найдется s, для которого $\mathrm{res}_i(s) = s_i$. Проверяется, что $s \mapsto (u, v)$ при отображении (12). □

Замечание 3.4.2. Предположим, что $u, v \in \mathbb{Z}[x]$, причем $\deg u \leqslant d$, $\deg v \leqslant d + 2$. При $d \geqslant 2$ условие (15) равносильно существованию $w_0, w_1 \in \mathbb{Z}$, для которых

$$u_{d-1} = \beta w_0, \quad u_d = \beta w_1, \quad v_{d+1} = \delta w_0, \quad v_{d+2} = \delta w_1. \tag{16}$$

Здесь $u = \sum u_i x^i$ и $v = \sum v_i x^i$. Из (15) вытекает, что $u_{d-1}\delta = v_{d+1}\beta$ и $u_d\delta = v_{d+2}\beta$. Так как δ и β взаимно просты, то u_{d-1} и u_d делятся на β. Поэтому в (16) можно взять $w_0 = u_{d-1}/\beta$, $w_1 = u_d/\beta$.

Для обозначения редукции по модулю β ниже используется черта над соответствующими символами. Отметим, что степень полинома при такой редукции может уменьшиться.

Следствие 3.4.3. *Предположим, что* $s \mapsto (u, v)$ *при отображении* (12). *Тогда*

$$\deg v \leqslant d+2; \quad \deg \bar{u} \leqslant d-2.$$

Доказательство. Первое неравенство вытекает из (14) и (15). Второе неравенство вытекает из (14), первого неравенства и замечания (3.4.2). □

3.5. Критерий невырожденности сечений. Рассматриваемое расслоение E представлено в 3.1.2.

3.5.1. Мы собираемся сформулировать критерии невырожденности сечения с помощью результантов. Классический результант определен для пары полиномов p и q, зависящих от одной переменной. Более естественным, с некоторой точки зрения, является результант пары бинарных однородных форм фиксированной степени $\mathrm{resultant}_{d,e}(f, g)$, где $\deg f = d, \deg g = e$. Предполагаемая, часто неявно, связь между полиномами одной переменной и бинарными формами состоит в том, что форме $f = \sum a(i,j) t_0^i t_1^j$ $(i+j=d)$ сопоставляется полином $p = \sum p(j) x^j$, где $p(j) = a(d-j, j)$. Тонкость состоит в том, что степень p может быть меньше $\deg f$. Поэтому для обратной конструкции $p \mapsto \mathrm{form}_d(p) = f$ надо помнить степень f. Таким образом, связь между формами и полиномами можно выразить формулой

$$f = t_0^d p. \tag{17}$$

Ниже $\mathrm{resultant}_{d,e}(p, q)$ считается определенным и для полиномов при условии, что $\deg p \leqslant d$, $\deg(q) \leqslant e$. При этом имеется в виду, что

$$\mathrm{resultant}_{d,e}(p, q) = \mathrm{resultant}_{d,e}(\mathrm{form}_d\, p, \mathrm{form}_e\, q). \tag{18}$$

Предложение 3.5.1. *Пусть* $d \geqslant 2$. *Пусть* $s \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, E(d))$ *и* $s \mapsto (u, v)$ *при отображении* (12). *Сечение* s *невырожденно тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{resultant}_{d,d}(u, \delta x^2 u - \beta v) \text{ обратим в } \mathbb{Z}[1/\beta] \tag{19}$$

$$\mathrm{resultant}_{d-2,d+2}(\bar{u},\bar{v}) \textit{ обратим в } \mathbb{Z}/(\beta). \tag{20}$$

Результант в (20) *имеет корректные степени ввиду* 3.4.3.

Доказательство. Невырожденность s вне делителей β равносильна (19) ввиду того, что при отождествлении $\mathcal{O}_Y(d)^2 \simeq E(d)$ (см. 3.4) сечение s отождествляется с парой d-форм u, $\delta x^2 u - \beta v$. Отсутствие общих нулей у пары форм как раз и детектируется обратимостью соответствующего результанта.

Проверим теперь, что невырожденность s в специальных слоях сводится к (20). Для этого воспользуемся идентификацией E_Z из 3.3 и запишем сечение $\bar{s}$ как сечение $\mathcal{O}(d-2) \oplus \mathcal{O}(d+2)$:

$$\det(\bar{\sigma})\bar{s} = \det(\bar{\sigma})\left(\bar{u}t_0^d e_1 + \bar{v}t_0^d e_2\right) = t_0^{d-2}\bar{\delta}\bar{u}h_1 + t_0^{d+2}(\bar{\alpha}\bar{v} - \bar{\gamma}x^2\bar{u})h_2.$$

Таким образом (см. 3.5.1), невырожденность $\bar{s}$ равносильна тому, что формы $t_0^{d-2}\bar{\delta}\bar{u}$ и $t_0^{d+2}(\bar{\alpha}\bar{v} - \bar{\gamma}x^2\bar{u})$ не имеют общих нулей, то есть тому, что

$$\mathrm{resultant}_{d-2,d+2}(\bar{u}, \bar{\alpha}\bar{v} - \bar{\gamma}x^2\bar{u}) \in (\mathbb{Z}/(\beta))^*. \tag{21}$$

Так как $\mathrm{resultant}_{d-2,d+2}(\bar{u}, \bar{\alpha}\bar{v} - \bar{\gamma}x^2\bar{u}) = \bar{\alpha}^{d-2}\,\mathrm{resultant}_{d-2,d+2}(\bar{u},\bar{v})$, то (21) равносильно (20). □

Замечание 3.5.2. В условиях 3.5.1 для выполнения соотношения (20) достаточно того, что

$$\mathrm{resultant}_{d,d+2}(u,v) \text{ взаимно прост с } \beta. \tag{22}$$

Если коэффициент v_{d+1} взаимно прост с β, то (20) и (22) равносильны.

Это вытекает из того, что

$$\mathrm{resultant}_{d,d+2}(\bar{u},\bar{v}) = \bar{v}_{d+2}^2\,\mathrm{resultant}_{d-2,d+2}(\bar{u},\bar{v}).$$

3.6. Существование невырожденных сечений степени 2. Рассматриваемое расслоение E представлено в 3.1.2.

Предложение 3.6.1. *Существование невырожденного сечения* $\mathcal{O} \to E(2)$ *равносильно следующему условию: существуют целочисленные полиномы*

$$u = u_0 + u_1x + u_2x^2, \quad v = v_0 + v_1x + v_2x^2 + v_3x^3 + v_4x^4$$

и целые числа w_0, w_1 *такие, что*

$$u_1 = \beta w_0, \quad u_2 = \beta w_1, \quad v_3 = \delta w_0, \quad v_4 = \delta w_1. \tag{23}$$

$$\mathrm{resultant}_{2,2}(u, \delta x^2 u - \beta v) = \pm 1. \tag{24}$$

Доказательство. Покажем сначала необходимость условия. Пусть имеется невырожденное сечение $s : \mathcal{O} \to E(2)$. Сечение s определяет пару полиномов u, v при помощи отображения (12). Эти полиномы имеют нужные степени (см. 3.4.1, 3.4.2). Условие (23) вытекает из 3.5.1. Осталось проверить верность (24). Для этого заметим (см. 3.5.1), что $\mathrm{resultant}_{0,4}(\bar{u}, \bar{v})$ обратим. Вычисление показывает, что

$$\mathrm{resultant}_{0,4}(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{\delta}^2 \bar{u}_0^4. \tag{25}$$

Таким образом, получили обратимость $\bar{u}_0$. Вычисление показывает, что

$$\mathrm{resultant}_{2,2}(u, \delta x^2 u - \beta v) = \delta^2 u_0^4 \pmod{\beta}. \tag{26}$$

С учетом проверенной обратимости $\bar{u}_0$ видим, что $\mathrm{resultant}_{2,2}(\bar{u}, \bar{\delta} x^2 \bar{u} - \bar{\beta}\bar{v}) \in (\mathbb{Z}/(\beta))^*$. Отсюда и из (19) вытекает (24).

Проверим достаточность условия предложения. Пусть для u и v выполнены (23) и (24). Из 3.4.1 вытекает, что у пары u, v имеется прообраз s при отображении (12). Из (24) вытекает (19). Поэтому 3.5.1 применимо и показывает невырожденность s. □

Замечание 3.6.2. Отметим, что в критерии 3.6.1 отсутствует конгруэнц-условие общего критерия 3.5.1. Это специфика случая $d = 2$.

Следствие 3.6.3. *Для существования невырожденного сечения $\mathcal{O} \to E(2)$ необходимо, чтобы было разрешимо уравнение*

$$u_0^4 = \pm\delta^{-2} \pmod{\beta'}. \tag{27}$$

Здесь $\beta' = \beta$ для нечетного β и $\beta' = 2\beta$ для четного β.

Доказательство. Вычисление показывает, что

$$\mathrm{resultant}_{2,2}(u, \delta x^2 u - \beta v) = \delta^2 u_0^4 - 2\beta\delta u_0^3 v_2 \pmod{\beta^2}.$$

Это доказывает следствие. □

Вопрос о достаточности условия (27) не ясен. Приведем некоторые соображения в пользу предположения о достаточности.

3.6.1. Здесь β – нечетное простое число, а χ – символ Лежандра по модулю β.

Для $\beta = 3 \pmod 4$ условие (27) всегда выполнено и всегда $l_{\min}(E) = 2$. Таким образом, здесь условие (27) хотя и пусто, но является достаточным. Действительно, в рассматриваемом случае $\chi(-1) = -1$.

Поэтому либо $\chi(\delta) = 1$, либо $\chi(-\delta) = 1$ и (27) выполнено: в качестве u_0 можно корень либо из δ^{-1}, либо из $-\delta^{-1}$. С другой стороны, $l_{\min}(V) = 1$, где V указано в 3.1.1, а равенство вытекает из 2.5.3. Следовательно, $l_{\min}(E) \leqslant 2$.

Рассмотрим случай

$$\beta = 5 \pmod 8 \text{ и } \chi(\delta) = 1. \tag{28}$$

Тогда $\delta = \rho^2 \pmod \beta$ и можно взять $u_0 = \rho$ в (27). Таким образом, необходимое условие существования невырожденного сечения степени 2 выполнено. С другой стороны, предположение $\chi(\delta) = 1$ влечет (2.5.3) существование невырожденного сечения степени 1 у V (см. 3.1.1) и, следовательно, существование невырожденного сечения степени 2 у E. Таким образом, в случае (28) условие (27) является не только необходимым, но и достаточным.

Рассмотрим случай

$$\beta = 1 \pmod 8 \text{ и } \chi(\delta) = 1. \tag{29}$$

В этом случае $l_{\min}(V) = 1$, $l_{\min}(E) = 2$ и условие (27) является не только необходимым, но и достаточным.

Рассмотрим случай

$$\beta = 1 \pmod 8 \text{ и } \chi(\delta) = -1. \tag{30}$$

В этом случае $l_{\min}(V) = 2$, $l_{\min}(E) = 3$ (см. 3.7.2) и ситуация полностью ясна. Покажем, что необходимое условие для существования невырожденного 2-сечения не выполнено. Если $u_0^4 = \pm\delta^{-2}$, то $(u_0^2)^2 = \delta^{-2}$ или $(u_0^2)^2 = -\delta^{-2}$. В первом случае $u_0^2 = \pm\delta^{-1}$. Это невозможно, так как $\chi(\delta) = -1$. Во втором случае $u_0^2 = \pm\zeta_4\delta^{-1}$. Это невозможно, так как $\chi(\zeta_4) = 1$, где ζ_4 – примитивный корень 4-той степени из 1.

3.6.2. Здесь, как и в 3.6.1, β – нечетное простое число, а χ – символ Лежандра по модулю β. Рассмотрим последний неразобранный и весьма интересный случай

$$\beta = 5 \pmod 8 \text{ и } \chi(\delta) = -1. \tag{31}$$

Здесь ситуация с достаточностью критерия 3.6.3 остается неясной.

Пусть ζ_4 – примитивный корень 4-той степени из 1 по модулю β. В рассматриваемом случае $\chi(\zeta_4) = -1$, так как по модулю β нет корней 8-й степени из 1. Поэтому $\chi(\zeta_4\delta) = 1$ и $\zeta + 4\delta = \rho^2$. Возьмем $u_0 = \rho$. Тогда $u_0^4 = \zeta_4^2\delta^2 = -\delta^2$. Таким образом, необходимое условие существования невырожденного 2-сечения выполнено. Однако достаточность этого условия пока неизвестна.

3.6.3. Рассмотрим примеры. Начнем с E, определенного матрицей склейки

$$\begin{pmatrix} 2x^{-2} & 5 \\ 1 & 2x^2 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Этот пример относится к неясному случаю 3.6.2. Здесь невырожденные 2-сечения существуют. Например, можно взять $u_0 = 1$, $w_0 = 1$, $w_1 = 1$, $v_0 = 0$, $v_1 = -1$, $v_2 = -1$. Этот пример был приведен в [2] и является первым примером следующего интересного явления. При замене базы с помощью возведения в квадрат подскоки удваиваются, а отношение минимальной длины невырожденного сечениия к высоте подскока может падать.

Следующий пример также был указан в [2]. В этом примере расслоение E определено матрицей склейки

$$\begin{pmatrix} 3x^{-2} & 8 \\ 1 & 3x^2 \end{pmatrix}.$$

Этот пример интересен тем, что здесь β четно, а необходимый критерий 3.6.3 не выполнен. Таким образом, $l_{\min}(E) \geqslant 3$. Ниже мы увидим (см. 3.7.2), что $l_{\min}(E) = 3$.

Рассмотрим еще ряд примеров к неясному случаю 3.6.2. В этих примерах β – простое число, сравнимое с 5 по модулю 8. Пусть расслоение E определено матрицей склейки

$$\begin{pmatrix} (\beta+1)/2 \cdot x^{-2} & \beta \\ 1 & 2x^2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\chi(\delta) = -1$, а необходимый критерий 3.6.3 выполнен (см. 3.6.2). Если предполагать достаточность этого критерия, то для каждого такого β надо предъявить невырожденное 2-сечение.

Для $\beta = 13$ укажем два невырожденных 2-сечения: $u_0 = 2$, $w_0 = 28$, $w_1 = 33$, $v_0 = -1$, $v_1 = 23$, $v_2 = 29$ и $u_0 = 2$, $w_0 = 0$, $w_1 = -13$, $v_0 = -1$, $v_1 = 1$, $v_2 = 94$. Для $\beta = 29$ невырожденное 2-сечение таково: $u_0 = 8$, $w_0 = 11$, $w_1 = 15$, $v_0 = -1$, $v_1 = -40$, $v_2 = -54$. Невырожденное 2-сечение для $\beta = 37$: $u_0 = 15$, $w_0 = 5$, $w_1 = 3$, $v_0 = 1$, $v_1 = 12$, $v_2 = 8$.

3.7. Сечения степени 3. Рассматриваемое расслоение E представлено в 3.1.2.

Предложение 3.7.1. *Для существования невырожденного сечения $\mathcal{O} \to E(3)$ достаточно выполнение следующего условия: существуют целочисленные полиномы*

$$u = u_0+u_1x+u_2x^2+u_3x^3, \quad v = v_0+v_1x+v_2x^2+v_3x^3+v_4x^4+v_5x^5$$

и целые числа w_0, w_1 такие, что

$$u_2 = \beta w_0, \quad u_3 = \beta w_1, \quad v_4 = \delta w_0, \quad v_5 = \delta w_1; \tag{33}$$

$$\operatorname{resultant}_{3,3}(u, \delta x^2 u - \beta v) = \pm\beta; \tag{34}$$

$$\operatorname{resultant}_{3,5}(u, v) \text{ взаимно прост с } \beta. \tag{35}$$

Доказательство. Вытекает из 3.5.1 и 3.5.2. □

Теорема 3.7.2. *Пусть $E = f^*V$, где V расслоение ранга 2 с тривиальным общим слоем и простыми подскоками. Тогда*

$$l_{\min}(E) \leqslant 3.$$

Доказательство. Будем считать, что V – расслоение, представленное в 3.1.1. Из теоремы 2.5.2 следует, что это предположение не уменьшает общности. Таким образом, к E применимо предложение 3.7.1. Будем придерживаться обозначений из 3.7.1 и покажем, что сформулированное там достаточное условие выполнено. Положим

$$\begin{aligned} &u_0 = 1, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = \beta w_0, \quad u_3 = \beta w_1, \\ &v_0 = 0, \quad v_1 = 0, \quad v_4 = \delta w_0, \quad v_5 = \delta w_1. \end{aligned} \tag{36}$$

Вычисление показывает, что после этих подстановок

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta}\operatorname{resultant}_{3,3}(u, \delta x^2 u - \beta v) = -(\beta v_2 - \delta)^3 \beta w_1 \\ + (\beta v_2 - \delta)^2 \beta^2 v_3 w_0 + \beta^3 v_3^3. \end{aligned} \tag{37}$$

$$\operatorname{resultant}_{3,5}(u, v) = v_3^3 \pmod{\beta}. \tag{38}$$

Подстановка (36) обеспечивает, помимо прочего, выполнение условия (33). Ввиду (37) и (38) для выполнения условий (34) и (35) достаточно обеспечить выполнение следующих двух условий:

$$-(\beta v_2 - \delta)^3 w_1 + (\beta v_2 - \delta)^2 \beta v_3 w_0 = 1 - \beta^2 v_3^3; \tag{39}$$

$$v_3 \text{ и } \beta \text{ взаимно просты.} \tag{40}$$

Чтобы обеспечить (39) и (40), действуем следующим образом. Сначала ищем v_2 так, чтобы выполнялось условие

$$\text{порядок группы } (\mathbb{Z}/m^2\mathbb{Z})^* \text{ не делится на } 3, \tag{41}$$

где

$$m = \beta v_2 - \delta. \tag{42}$$

Это возможно. Например, подойдет простое m, сравнимое с 2 по модулю 3. Такое найдется по теореме Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.

Из (42) и (6) вытекает, что

$$\beta \text{ взаимно просто с } m. \tag{43}$$

Находим v_3 так, чтобы

$$\beta^2 v_3^3 = 1 \pmod{m^2} \tag{44}$$

и было выполнено условие (40). Для этого сначала находим вспомогательное целое число z такое, что

$$\beta^2 z^3 = 1 \pmod{m^2}. \tag{45}$$

Это возможно благодаря (43) и того, что 3 не делит порядок группы $(\mathbb{Z}/m^2\mathbb{Z})^*$. Если z взаимно просто с β, то полагаем $v_3 = z$. В ином случае полагаем $v_3 = z + m^2$. В этом случае (40) вытекает из взаимной простоты β и m.

Ищем вспомогательные числа z_0 и z_1 так, чтобы

$$\beta v_3 z_0 - m z_1 = 1. \tag{46}$$

Это можно, так как взаимная простота m и βv_3 вытекает из (44). Полагаем

$$w_1 = z_1 r, \quad w_0 = z_0 r, \tag{47}$$

где $r = (1 - \beta^2 v_3^3)/m^2$. Таким образом, данные для критерия существования сечения сформированы. Осталось проверить, что эти данные обладают требуемыми свойствами. Условие (40) выполнено по построению v_3. Проверим, что выполнено (39). Умножим (46) на r и воспользуемся соотношениями из (47). Получим

$$-m w_1 + \beta v_3 w_0 = (1 - \beta^2 v_3^3)/m^2.$$

Это и есть (39). $\square$

Отметим, что приведенное доказательство теоремы 3.7.2 эффективно, то есть позволяет строить соответствующие невырожденные сечения.

§4. Заключительные замечания

Наметим некоторые направления дальнейшего изучения векторных расслоений на проективной прямой над кольцом целых чисел.

4.1. Построение расслоений. Было бы неплохо расширить арсенал приемов для построения расслоений.

4.1.1. Можно строить нетривиальные раслоения с помощью гомологий комплексов из стандартных расслоений. Теорема Бейлинсона [6, II, 3.1] гарантирует, что таким образом мы можем получить все расслоения. Этот метод был применен в [4] и [7] для получения классификационных результатов.

4.1.2. Обычно операциии Адамса Ψ_n применимы к элементам K-теории. Однако случай проективной прямой уникален. В этом случае операция Ψ_n применима к самим расслоениям. Для этого рассмотрим эндоморфизм $\psi_n : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$, заданный возведением в n-тую степень. Положим

$$\Psi_n V = \psi_n^* V.$$

Эта конструкция не очень интересна для проективной прямой над полем, так как в этом случае все векторные расслоения являются суммами линейных. Иное дело для проективной прямой над $\mathbb{Z}$. Именно этот метод при $n = 2$ применен в данной работе.

4.1.3. Можно использовать матрицы склейки, но для этого нужно наладить их производство. В целом, очень интересно увязать изучение расслоений с изучением групп $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[x, x^{-1}])$ и $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[x])$. Предположим, что у нас есть матрицы $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[x, x^{-1}])$, которые мы рассматриваем как матрицы склейки. С групповой точки зрения естественно рассмотреть матрицу $\sigma = \sigma_1\sigma_2$. Связанное с σ расслоение E можно рассматривать как результат некоторой композиции $E = E_1 * E_2$, где E_i соответствует матрице склейки σ_i. Эта композиция, однако, не выглядит естественно с точки зрения расслоений. В частности, она экстремально неинвариантна. Действительно, матрица σ_1 и матрица $\sigma_1' \lambda_1 \sigma_1 \rho_1$, где $\lambda_1 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[x])$, $\rho_1 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[x^{-1}])$, приводят к расслоению E_1', изоморфному E_1. Аналогично и для σ_2. При этом, однако, $E' = E_1' * E_2'$, как правило, отличается от $E_1 * E_2$. Например, пусть $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $\lambda_1 = 1$, $\rho_2 = 1$,

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\sigma' = \rho_1 \lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x^{-1} & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $E = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$, а $E' = \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$.

Для группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ важную роль играет алгебра Гекке, связанная с парой $H \subset G$, где $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, а $H = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. В нашем случае роль пары играет тройка групп $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[x, x^{-1}])$, $H_+ = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[x])$, $H_- = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[x^{-1}])$. Какую алгебраическую структуру разумно связать с этой тройкой?

4.2. Классификация. Известна классификация расслоений без подскоков, а также расслоений с простыми подскоками, если общий слой является подкруткой либо $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ (см. [4]), либо $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$ (см. [7]).

В качестве следующего шага интересно получить классификацию расслоений с тривиальным общим слоем и подскоками высоты 2. Кроме того, имеет смысл изучить вопрос об алгоритмической распознаваемости изоморфности двух расслоений. Возможно, что такой алгоритм может быть построен с помощью теоремы Бейлинсона и некоторой теории редукции. Помимо этого, имеется вопрос о конечности множества классов изоморфизма расслоений для данного дискриминанта.

4.3. Изучение невырожденных сечений. Для каждого конкретного расслоения E желательно уметь описывать спектр длин невырожденных сечений. Пока у нас нет надежных инструментов для решения этой задачи. Прежде всего речь идет о нахождении $l_{\min}(E)$. Вычисление мест подскока E и соответствующих высот подскока не вызывает трудностей. Эти данные дают нижние оценки для инварианта $l_{\min}(E)$, однако не всегда эти оценки точны. С другой стороны, алгоритм Смирнова–Яковенко (см. [8]) дает верхнюю оценку для $l_{\min}(E)$. В [2] указан пример E, для которого эта верхняя оценка также не точна. А именно, рассмотрим матрицу склейки (32). В этом случае алгоритм показывает, что $l_{\min}(E) \leqslant 3$, а на самом деле $l_{\min}(E) = 2$. В связи с этим возникает вопрос об изучении и модификации алгоритма, о геометрической интепретации алгоритма (см. 4.4) и о его связях с аппроксимациями Паде.

Можно ли получить верхние оценки для $l_{\min(E)}$ с помощью высот подскоков? Например, верно ли, что $l_{\min(E)} \leqslant h+1$, где h максимальная из высот подскока для E? Могут ли быть пробелы в списке длин невырожденных сечений?

Вопрос о существовании невырожденного d-сечения сводится к разрешимости диофантова уравнения. При этом принцип Хассе часто не выполняется и имеются вторичные препятствия. Можно ли их интерпретировать с помощью препятствия Манина [10]?

4.4. Геометрическая интерпретация. Весьма желательно интерпретировать методы работы с векторными расслоениями на проективной прямой геометрически. С векторным расслоением E связано расслоение $\mathbf{P}(E) \to \mathbf{P}^1$. Невырожденные сечения E соответствуют сечениям этого нелинейного расслоения. Слои $\mathbf{P}(E) \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ либо $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, либо соответствующие линейчатые поверхности F_n [3, V, 2.17]. Эти поверхности допускают перестройки с помощью раздутий и стягиваний ([9, IV, 3, с. 555]). Возможно, что эти перестройки могли бы стать исходным пунктом на пути к желаемой геометрической интерпретации.

Список литературы

1. Ch. C. Hanna, *Subbundles of vector bundles on the projective line.* — J. Algebra, **52**, No. 2 (1978), 322–327.
2. Г. А. Струков, *Векторные расслоения на арифметических многообразиях.* — Дипломная работа, Санкт-Петербургский государственный университет (2020).
3. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия.* — Москва, Мир (1981).
4. А. Л. Смирнов, *Векторные расслоения на* $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ *с простыми подскоками.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **452** (2016), 202–217.
5. A. L. Smirnov, *On filtrations of vector bundles over* $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$*. Arithmetic and Geometry.* — Cambridge Univ. Press, London Math. Soc. Lect. Note Series, **420** (2015), 436–457.
6. К. Оконек, М. Шнайдер, Х. Шпиндлер, *Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах.* — Москва, Мир (1984).
7. С. С. Яковенко, *Векторные* $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$*-расслоения с общим слоем* $\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(1)$ *и простыми подскоками.* — Препринт ПОМИ, **03** (2016).
8. А. Л. Смирнов, С. С. Яковенко, *Построение линейной фильтрации для расслоений ранга* 2 *на* $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$. — Матем. сборник, **208** (2017), 111–128.
9. Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии.* — Москва, Мир, **2** (1982).
10. Ю. И. Манин, *Кубические формы*, — Москва, Наука (1972).

Smirnov A. L., Strukov G. A. Short sections of some bundles on the projective line. The paper concerns vector bundles on the projective line over the ring of integers. We deal with bundles of rank 2 obtained by means of a certain base change. The source bundle runs over the bundles with the trivial generic fiber an simple jumps. We compute the minimal degree of nonvaniching sections for bundles in question. Certain interesting phenomena are found out.

Ст.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: smirnov@pdmi.ras.ru

Поступило 10 сентября 2020 г.

Ст.-Петербургский международный
Математический институт
им. Леонарда Эйлера
E-mail: georgiistrukov@gmail.com