Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 490, 2020 г.

А. Г. Мошонкин

АНАЛОГ СИЛЬНОЙ ФОРМЫ ТЕОРЕМЫ ХОЛЛА О РАЗЛИЧНЫХ ПРЕДСТАВИТЕЛЯХ ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

1. Введение. В работе [1] сформулирован и доказан векторный аналог слабой формы классической теоремы Холла. В настоящей работе доказан векторный аналог сильной формы этой теоремы.

Классическая теорема Холла формулируется следующим образом:

Пусть имеются конечные подмножества $S_i, (i = 1, 2, \dots, n)$, некоторого множества S. Тогда различные представители этих множеств, а именно элементы $a_i \in S_i$ и $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$ найдутся тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие.

Условие С. Для любого числа k попарно различных индексов i объединение множеств S_i содержит не менее k элементов. Мы называем это утверждение слабой формой теоремы Холла. Дело в том, что при выполнении условия С можно утверждать нечто большее, а именно, среди множеств S_i найдется такое, которое может быть представлено любым своим элементом в какой либо системе различных представителей. Это утверждение мы называем сильной формой теоремы Холла. В векторном аналоге теоремы вместо конечных множеств рассматриваются конечномерные векторные пространства над некоторым полем l, которые можно считать подпространствами некоторого объемлющего пространства, а вместо различных представителей множеств — линейно независимые представители пространств. Аналогом мощности множества является размерность пространства, а аналогом объединения множеств — линейная оболочка пространств.

Векторный аналог слабой формы теоремы Холла формулируется следующим образом. Пусть имеются конечномерные подпространства $L_i, (i = 1, 2, \dots, n)$, некоторого векторного пространства L. Тогда линейно независимые представители этих пространств, а именно элементы $l_i \in L_i$, которые являются линейно независимыми, найдутся тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие.

Ключевые слова: различные представители множеств, линейно независимые представители векторных пространств.

Условие В. Для любого числа k попарно различных индексов i размерность линейной оболочки пространств L_i не менее k. Доказательство несложно в случае бесконечного поля l. Если взять в каждом пространстве по произвольному вектору, и они окажутся линейно зависимыми, то, варьируя эти векторы, каждый внутри своего пространства, можно избавиться от линейной зависимости. Случай конечного поля потребовал дополнительных соображений, поскольку в этом случае возможность варьирования каждого вектора внутри своего пространства ограничена количеством элементов этого пространства. Мы приведем простое доказательство векторного аналога сильной формы теоремы Холла, которое не опирается на векторный аналог слабой формы этой теоремы и не зависит от конечности или бесконечности поля l.

2. Векторный аналог сильной формы теоремы Холла.

Теорема. *Если выполнено условие В, то среди пространств L_i найдется такое, которое может быть представлено любым своим ненулевым элементом в какой либо системе линейно независимых представителей.*

Будем называть систему конечномерных векторных подпространств некоторого пространства критической, если размерность их линейной оболочки равна их количеству.

Утверждение теоремы можно уточнить следующим образом. Если у системы пространств L_i нет собственных непустых критических подсистем, то каждое из этих пространств может быть представлено любым своим ненулевым элементом в некоторой системе линейно независимых представителей. В противном случае каждое пространство произвольной минимальной непустой критической подсистемы может быть представлено любым своим ненулевым элементом в некоторой системе линейно независимых представителей. В такой формулировке мы и будем доказывать теорему индукцией по числу пространств.

Доказательство. Если пространство всего одно, то все очевидно. Пусть утверждение справедливо, когда количество пространств меньше n, и пусть имеется n подпространств $L_1, L_2, \ldots, L_n$ пространства L. Если у системы пространств L_i нет собственных непустых критических подсистем, то возьмем любое пространство системы (можно считать, что это пространство L_1) и любой ненулевой вектор $l_1 \in L_1$.

При факторизации $L \to L/\langle l_1\rangle$ пространства L по одномерному подпространству, натянутому на вектор l_1, размерность образа каждого подпространства в сравнении с размерностью самого подпространства уменьшается на единицу или не изменяется, в зависимости от того, содержит это подпространство вектор l_1 или не содержит. Так как система подпространств $L_2, \ldots, L_n$ не является критической и не содержит непустых критических подсистем, то для их образов при факторизации выполняется условие В. Тогда по индукционному предположению у этих образов имеются линейно независимые представители. Если у каждого представителя взять произвольный прообраз и добавить к этим прообразам вектор l_1, то получится система линейно независимых представителей для исходной системы подпространств.

Пусть теперь у системы L_i имеются непустые собственные критические подсистемы. Рассмотрим произвольную минимальную такую подсистему. Можно считать, что это подсистема $L_1, L_2, \ldots, L_m (m < n)$. Заметим, что поскольку у этой подсистемы нет непустых собственных критических подсистем, то по индукционному предположению у пространств этой системы имеются линейно независимые представители, причем каждое из этих пространств может быть представлено любым своим ненулевым элементом в какой либо системе линейно независимых представителей. Поскольку размерность их линейной оболочки $\langle L_1, L_2, \ldots, L_m\rangle$ равна m, то при факторизации $L \to L/\langle L_1, L_2, \ldots, L_m\rangle$ размерность образа каждого подпространства пространства L в сравнении с размерностью самого подпространства уменьшается не более чем на m. Это означает, что для образов пространств $L_{m+1}, L_{m+2}, \ldots, L_n$ выполняется условие В. Действительно, рассмотрим произвольные k из этих пространств ($1 \leqslant k \leqslant n - m$). Из условия В для исходной системы пространств следует, что размерность линейной оболочки этих k пространств вместе с пространствами $L_1, L_2, \ldots, L_m$ не менее $m + k$, а значит размерность образа этой линейной оболочки, которая совпадает с линейной оболочкой образов этих k пространств, не менее k. Значит, по предположению индукции, у этих образов имеются линейно независимые представители. Если у каждого из этих представителей взять произвольный прообраз, то мы получим линейно независимые представители самих этих k пространств, причем никакая их нетривиальная линейная комбинация не попадет в $\langle L_1, L_2, \ldots, L_m\rangle$. Добавляя к этим представителям произвольные линейно независимые представители пространств $L_1, L_2, \dots, L_m$, мы получим линейно независимые представители пространств исходной системы. $\square$

Список литературы

1. A. G. Moshonkin, *Concerning Hall's Theorem.* — American Mathematical Society. Translations, Series 2, Volume 174 (1996), Advances in the Mathematical Sciences, Mathematics in St. Petersburg, A. A. Bolibruch, A. S. Merkur'ev, N. Yu. Netsvetaev Editors, pp. 73–77.

Moshonkin A. G. Analog of the strong form of Hall's theorem for vector spaces.

In this paper we give a proof of an analog of the strong form of Hall's theorem for vector spaces.

С.-Петербургский Государственный Университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: AMoshonkin@gmail.com

Поступило 28 марта 2020 г.